

CAPITULO 5

Fracciones

FRACCION ALGEBRAICA RACIONAL. Es una expresión que se puede escribir como cociente de dos polinomios P/Q . El polinomio P es el numerador y Q el denominador de la fracción.

Por ejemplo, $\frac{3x - 4}{x^2 - 6x + 8}$ y $\frac{x^3 + 2y^2}{x^4 - 3xy + 2y^3}$ son fracciones algebraicas racionales.

LAS REGLAS para el cálculo con fracciones algebraicas son las mismas que las correspondientes de las fracciones en aritmética. Una de las fundamentales es: El valor de una fracción no se altera si se multiplican, o dividen, el numerador y el denominador por una misma cantidad, siempre que ésta sea distinta de cero. En estas condiciones las fracciones se llaman *equivalentes*.

Por ejemplo, si se multiplica el numerador y denominador de $\frac{x+2}{x-3}$ por $(x-1)$, se obtiene la fracción equivalente $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$ siempre que $(x-1)$ sea distinto de cero, es decir, $x \neq 1$.

Análogamente, la fracción $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$ se puede expresar por $\frac{(x+2)(x+1)}{(x+3)(x+1)}$ y dividir, entonces, su numerador y denominador por $(x+1)$, siempre que $(x+1)$ sea distinto de cero, o bien, $x \neq -1$, obteniéndose $\frac{x+2}{x+3}$. La operación de dividir por un factor común al numerador y denominador recibe el nombre de *simplificación* y se indica tachando el término común; por ejemplo, $\frac{(x+2)(\cancel{x+1})}{(x+3)(\cancel{x+1})} = \frac{(x+2)}{(x+3)}$.

SIMPLIFICAR una fracción es transformarla en otra equivalente cuyo numerador y denominador no tengan más factores comunes que la unidad, ± 1 . La fracción que resulta es irreducible. Esta reducción se lleva a cabo descomponiendo en factores el numerador y el denominador, simplificando, seguidamente, los factores comunes siempre que sean distintos de cero.

Por ejemplo, $\frac{x^2 - 4xy + 3y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x-3y)(\cancel{x-y})}{(x+y)(\cancel{x-y})} = \frac{x-3y}{x+y}$ siempre que $(x-y) \neq 0$

TRES SIGNOS están asociados a una fracción: el correspondiente al numerador, el del denominador y el de la fracción. Se pueden alterar dos cualesquiera de ellos, simultáneamente, sin que varíe el valor de la fracción. Si a una fracción no se le antepone signo alguno, se sobreentiende que éste es positivo (más).

Ejemplos. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \quad -\left(\frac{-a}{b}\right) = -\frac{a}{b}$

Muchas veces la simplificación consiste en un cambio de signo. Por ejemplo,

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x} = \frac{(x - 2)(x - 1)}{2 - x} = \frac{(x - 2)(x - 1)}{-(x - 2)} = \frac{x - 1}{-1} = 1 - x$$

LA SUMA ALGEBRAICA DE FRACCIONES que tienen el *mismo denominador* es otra fracción cuyo numerador es la suma algebraica de los numeradores de las fracciones dadas, y cuyo denominador es el denominador común.

Ejemplos. $\frac{3}{5} - \frac{4}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3 - 4 - 2 + 1}{5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$

$$\frac{2}{x-3} - \frac{3x+4}{x-3} + \frac{x^2+5}{x-3} = \frac{2 - (3x+4) + (x^2+5)}{x-3} = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-3}$$

PARA SUMAR Y RESTAR FRACCIONES de *distinto denominador*, se transforman éstas en otras equivalentes que tengan un denominador común.

El denominador común mínimo (D.C.M.) de varias fracciones es el mínimo común múltiplo (M.C.M.) de sus denominadores.

Por ejemplo, el D.C.M. de $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}$ es el M.C.M. de 4, 5, 10 que es 20, y

el D.C.M. de $\frac{2}{x^2}, \frac{3}{2x}, \frac{x}{7}$ es $14x^2$

Ejemplos. $\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{7}{10} = \frac{15}{20} - \frac{16}{20} + \frac{14}{20} = \frac{15 - 16 + 14}{20} = \frac{13}{20}$

$$\frac{2}{x^2} - \frac{3}{2x} - \frac{x}{7} = \frac{2(14) - 3(7x) - x(2x^2)}{14x^2} = \frac{28 - 21x - 2x^3}{14x^2}$$

$$\frac{2x+1}{x(x+2)} - \frac{3}{(x+2)(x-1)} = \frac{(2x+1)(x-1) - 3x}{x(x+2)(x-1)} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{x(x+2)(x-1)}$$

EL PRODUCTO de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

Ejemplos. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 15}{3 \cdot 5 \cdot 16} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-9}{x^2-6x+5} \cdot \frac{x-5}{x+3} &= \frac{(x+3)(x-3)}{(x-5)(x-1)} \cdot \frac{x-5}{x+3} \\ &= \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-1)\cancel{(x+3)}} = \frac{x-3}{x-1} \end{aligned}$$

EL COCIENTE de dos fracciones es otra fracción que se obtiene multiplicando la fracción dividiendo (o fracción numerador) por el recíproco de la fracción divisor (o fracción denominador).

Ejemplos. $\frac{3}{8} \div \frac{5}{4} \quad \text{o} \quad \frac{3/8}{5/4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{10}$

$$\frac{7}{x^2 - 4} \div \frac{xy}{x + 2} = \frac{7}{(x + 2)(x - 2)} \cdot \frac{x + 2}{xy} = \frac{7}{xy(x - 2)}$$

UNA FRACCION COMPUESTA es aquella que tiene una o más fracciones en el numerador o en el denominador. Para simplificarla:

- 1) Se reducen el numerador y denominador a fracciones simples.
- 2) Se dividen las dos fracciones que resultan.

Ejemplo.
$$\frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x + 1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x} \cdot \frac{x}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

REDUCCION DE FRACCIONES

1. a) $\frac{15x^2}{12xy} = \frac{3 \cdot 5 \cdot x \cdot x}{3 \cdot 4 \cdot x \cdot y} = \frac{5x}{4y}$

c) $\frac{14a^3b^3c^2}{-7a^2b^4c^2} = -\frac{2a}{b}$

b) $\frac{4x^2y}{18xy^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y}{2 \cdot 9 \cdot x \cdot y \cdot y^2} = \frac{2x}{9y^2}$

d) $\frac{8x - 8y}{16x - 16y} = \frac{8(x - y)}{16(x - y)} = \frac{1}{2} \quad (\text{siendo } x - y \neq 0)$

e) $\frac{x^3y - y^3x}{x^2y - xy^2} = \frac{xy(x^2 - y^2)}{xy(x - y)} = \frac{\cancel{xy}(x - y)(x + y)}{\cancel{xy}(x - y)} = x + y$

f) $\frac{x^2 - 4xy + 3y^2}{y^2 - x^2} = \frac{(x - 3y)(x - y)}{(y - x)(y + x)} = -\frac{(x - 3y)\cancel{(x - y)}}{(\cancel{x - y})(y + x)} = -\frac{x - 3y}{y + x} = \frac{3y - x}{y + x}$

g) $\frac{6x^2 - 3xy}{-4x^2y + 2xy^2} = \frac{3x(2x - y)}{2xy(y - 2x)} = -\frac{3x\cancel{(2x - y)}}{2xy\cancel{(2x - y)}} = -\frac{3}{2y}$

h) $\frac{r^3s + 3r^2s + 9rs}{r^3 - 27} = \frac{rs(r^2 + 3r + 9)}{r^3 - 3^3} = \frac{rs(r^2 + 3r + 9)}{(r - 3)(r^2 + 3r + 9)} = \frac{rs}{r - 3}$

i) $\frac{(8xy + 4y^2)^2}{8x^3y + y^4} = \frac{(4y[2x + y])^2}{y(8x^3 + y^3)} = \frac{16y^2(2x + y)^2}{y(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)} = \frac{16y(2x + y)}{4x^2 - 2xy + y^2}$

j) $\frac{x^{2n+1} - x^{2n}y}{x^{n+3} - x^ny^3} = \frac{x^{2n}(x - y)}{x^n(x^3 - y^3)} = \frac{x^{2n}(x - y)}{x^n(x - y)(x^2 + xy + y^2)} = \frac{x^n}{x^2 + xy + y^2}$

MULTIPLICACION DE FRACCIONES

$$2. a) \frac{2x}{3y^2} \cdot \frac{6y}{x^2} = \frac{12xy}{3x^2y^2} = \frac{4}{xy}$$

$$b) \frac{9}{3x+3} \cdot \frac{x^2-1}{6} = \frac{9}{3(x+1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{6} = \frac{x-1}{2}$$

$$c) \frac{x^2-4}{xy^2} \cdot \frac{2xy}{x^2-4x+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{xy^2} \cdot \frac{2xy}{(x-2)^2} = \frac{2(x+2)}{y(x-2)}$$

$$d) \frac{6x-12}{4xy+4x} \cdot \frac{y^2-1}{2-3x+x^2} = \frac{6(x-2)}{4x(y+1)} \cdot \frac{(y+1)(y-1)}{(2-x)(1-x)}$$

$$= -\frac{6(x-2)(y+1)(y-1)}{4x(y+1)(x-2)(1-x)} = -\frac{3(y-1)}{2x(1-x)} = \frac{3(y-1)}{2x(x-1)}$$

$$e) \left(\frac{ax+ab+cx+bc}{a^2-x^2} \right) \left(\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2+(b+a)x+ab} \right) = \frac{(a+c)(x+b)}{(a-x)(a+x)} \cdot \frac{(x-a)(x-a)}{(x+a)(x+b)}$$

$$= -\frac{(a+c)(x+b)}{(x-a)(a+x)} \cdot \frac{(x-a)(x-a)}{(x+a)(x+b)} = -\frac{(a+c)(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{(a+c)(a-x)}{(x+a)^2}$$

DIVISION DE FRACCIONES

$$3. a) \frac{5}{4} \div \frac{3}{11} = \frac{5}{4} \cdot \frac{11}{3} = \frac{55}{12}$$

$$c) \frac{3x}{2} \div \frac{6x^2}{4} = \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{6x^2} = \frac{1}{x}$$

$$b) \frac{9}{7} \div \frac{4}{7} = \frac{9}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$$

$$d) \frac{10xy^2}{3z} \div \frac{5xy}{6z^3} = \frac{10xy^2}{3z} \cdot \frac{6z^3}{5xy} = 4yz^2$$

$$e) \frac{x+2xy}{3x^2} \div \frac{2y+1}{6x} = \frac{x+2xy}{3x^2} \cdot \frac{6x}{2y+1} = \frac{x(1+2y)}{3x^2} \cdot \frac{6x}{(2y+1)} = 2$$

$$f) \frac{9-x^2}{x^4+6x^3} \div \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2+7x+6} = \frac{9-x^2}{x^4+6x^3} \cdot \frac{x^2+7x+6}{x^3-2x^2-3x}$$

$$= \frac{(3-x)(3+x)}{x^3(x+6)} \cdot \frac{(x+1)(x+6)}{x(x-3)(x+1)} = -\frac{3+x}{x^4}$$

$$g) \frac{2x^2-5x+2}{\frac{2x-1}{3}} = (2x^2-5x+2) \cdot \frac{3}{2x-1} = (2x-1)(x-2) \cdot \frac{3}{2x-1} = 3(x-2)$$

$$h) \frac{\frac{x^2-5x+6}{x^2+7x-8}}{\frac{9-x^2}{64-x^2}} = \frac{x^2-5x+6}{x^2+7x-8} \cdot \frac{64-x^2}{9-x^2} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x+8)(x-1)} \cdot \frac{(8-x)(8+x)}{(3-x)(3+x)} = -\frac{(x-2)(8-x)}{(x-1)(3+x)}$$

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

$$4. a) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$d) \frac{3t^2}{5} - \frac{4t^2}{15} = \frac{3t^2(3) - 4t^2(1)}{15} = \frac{5t^2}{15} = \frac{t^2}{3}$$

$$b) \frac{5}{18} + \frac{7}{24} = \frac{5(4)}{72} + \frac{7(3)}{72} = \frac{41}{72}$$

$$e) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy}$$

$$c) \frac{x}{6} + \frac{5x}{21} = \frac{x(7) + 5x(2)}{42} = \frac{17x}{42}$$

$$f) \frac{3}{x} + \frac{4}{3y} = \frac{3(3y) + 4(x)}{3xy} = \frac{9y + 4x}{3xy}$$

$$g) \frac{5}{2x} - \frac{3}{4x^2} = \frac{5(2x) - 3(1)}{4x^2} = \frac{10x - 3}{4x^2}$$

$$h) \frac{3a}{bc} + \frac{2b}{ac} = \frac{3a(a) + 2b(b)}{abc} = \frac{3a^2 + 2b^2}{abc}$$

$$i) \frac{3t-1}{10} + \frac{5-2t}{15} = \frac{(3t-1)3 + (5-2t)2}{30} = \frac{9t-3+10-4t}{30} = \frac{5t+7}{30}$$

$$j) \frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x^2} = \frac{3x(x+1) - 2x^2 + 2(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2(x+1)}$$

$$k) 5 - \frac{5}{x+3} + \frac{10}{x^2-9} = \frac{5(x^2-9) - 5(x-3) + 10}{x^2-9} = \frac{5(x^2-x-4)}{x^2-9}$$

$$l) \frac{3}{y-2} - \frac{2}{y+2} - \frac{y}{y^2-4} = \frac{3(y+2) - 2(y-2) - y}{y^2-4} = \frac{10}{y^2-4}$$

$$m) \frac{5}{2s+4} - \frac{3}{s^2+3s+2} + \frac{s}{s^2-s-2} = \frac{5}{2(s+2)} - \frac{3}{(s+1)(s+2)} + \frac{s}{(s-2)(s+1)}$$

$$= \frac{5(s+1)(s-2) - 3(2)(s-2) + s(2)(s+2)}{2(s+2)(s+1)(s-2)} = \frac{7s^2 - 7s + 2}{2(s+2)(s+1)(s-2)}$$

$$n) \frac{3x-6}{4x^2+12x-16} - \frac{2x-5}{6x^2-6} + \frac{3x^2+3}{8x^2+40x+32} = \frac{3x-6}{4(x+4)(x-1)} - \frac{2x-5}{6(x+1)(x-1)} + \frac{3x^2+3}{8(x+4)(x+1)}$$

$$= \frac{(3x-6)(6)(x+1) - (2x-5)(4)(x+4) + (3x^2+3)(3)(x-1)}{24(x+4)(x-1)(x+1)} = \frac{9x^3 + x^2 - 21x + 35}{24(x+4)(x-1)(x+1)}$$

FRACCIONES COMPUESTAS

$$5. a) \frac{5/7}{3/4} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$$

$$b) \frac{2/3}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$$

$$c) \frac{10}{5/6} = 10 \cdot \frac{6}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

$$d) \frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{3}{8}} = \frac{\frac{4}{6} + \frac{5}{6}}{\frac{3}{8}} = \frac{\frac{9}{6}}{\frac{3}{8}} = \frac{9}{6} \cdot \frac{8}{3} = 4$$

$$f) \frac{\frac{2}{a-b}}{\frac{a-b}{a-b}} = \frac{2}{a-b} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{2}{(a-b)^2}$$

$$e) \frac{\frac{x+y}{3x^2}}{\frac{x-y}{x}} = \frac{x+y}{3x^2} \cdot \frac{x}{x-y} = \frac{x+y}{3x(x-y)}$$

$$g) \frac{\frac{2a}{a}}{\frac{x+1}{x+1}} = 2a \cdot \frac{x+1}{a} = 2(x+1)$$

$$h) \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a-b}{a+b}} = \frac{\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)(a+b)}}{\frac{(a+b) + (a-b)}{a+b}} = \frac{\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}}{\frac{2a}{a+b}} = \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{a+b}{2a} = \frac{2b}{a-b}$$

$$i) \frac{\frac{2}{x+h-3} - \frac{2}{x-3}}{h} = \frac{\frac{2(x-3) - 2(x+h-3)}{(x+h-3)(x-3)}}{h} = \frac{\frac{-2h}{(x+h-3)(x-3)}}{h} = \frac{-2}{(x+h-3)(x-3)}$$

$$j) 3y + \frac{1 + \frac{2}{y}}{\frac{y}{y+2}} = 3y + \frac{\frac{y+2}{y}}{\frac{y}{y+2}} = 3y + \left(\frac{y+2}{y}\right)\left(\frac{y-2}{y+2}\right) = 3y + \frac{y-2}{y} = \frac{3y^2 + y - 2}{y}$$

$$k) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+1-x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = x+1$$

$$l) \frac{\frac{a}{a-b + \frac{a+b}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}}}{\frac{a}{a-b + \frac{a+b}{\frac{a^2-b^2}{ab}}}} = \frac{\frac{a}{a-b + \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a-b)}}}{\frac{a}{(a-b) + \frac{ab}{a-b}}} = \frac{a}{\frac{(a-b)^2 + ab}{a-b}} = \frac{a}{\frac{a^2 - ab + b^2}{a-b}} = \frac{a(a-b)}{a^2 - ab + b^2}$$

$$m) 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{2a-1}{2a+1}}} = 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{3(2a+1) - (2a-1)}{2a+1}}} = 1 - \frac{1}{2 - \frac{2a+1}{4a+4}} = 1 - \frac{1}{\frac{2(4a+4) - (2a+1)}{4a+4}} = 1 - \frac{4a+4}{6a+7} = \frac{6a+7 - (4a+4)}{6a+7} = \frac{2a+3}{6a+7}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Comprobar que:

$$6. a) \frac{24x^3y^2}{18xy^3} = \frac{4x^2}{3y}$$

$$d) \frac{4x^2 - 16}{x^2 - 2x} = \frac{4(x+2)}{x}$$

$$g) \frac{ax^4 - a^2x^3 - 6a^3x^2}{9a^4x - a^2x^3} = -\frac{x(x+2a)}{a(x+3a)}$$

$$b) \frac{36xy^4z^2}{-15x^4y^3z} = \frac{-12yz}{5x^3}$$

$$e) \frac{y^2 - 5y + 6}{4 - y^2} = \frac{3-y}{y+2}$$

$$h) \frac{xy - y^2}{x^4y - xy^4} = \frac{1}{x(x^2 + xy + y^2)}$$

$$c) \frac{5a^2 - 10ab}{a - 2b} = 5a$$

$$f) \frac{(x^2 + 4x)^2}{x^2 + 6x + 8} = \frac{x^2(x+4)}{x+2}$$

$$i) \frac{3a^2}{4b^3} \cdot \frac{2b^4}{9a^3} = \frac{b}{6a}$$

7. a) $\frac{8xyz^2}{3x^3y^2z} \cdot \frac{9xy^2z}{4xz^5} = \frac{6y}{x^2z^3}$ d) $\frac{x^2 - 4y^2}{3xy + 3x} \cdot \frac{2y^2 - 2}{2y^2 + xy - x^2} = -\frac{2(x+2y)(y-1)}{3x(x+y)}$
- b) $\frac{xy^2}{2x-2y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^3y^2} = \frac{x+y}{2x^2}$ e) $\frac{y^2-y-6}{y^2-2y+1} \cdot \frac{y^2+3y-4}{9y-y^3} = -\frac{(y+2)(y+4)}{y(y-1)(y+3)}$
- c) $\frac{x^2+3x}{4x^2-4} \cdot \frac{2x^2+2x}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2} = \frac{1}{2}$ f) $\frac{t^3+3t^2+t+3}{4t^2-16t+16} \cdot \frac{8-t^3}{t^3+t} = \frac{(t+3)(t^2+2t+4)}{4t(2-t)}$
8. a) $\frac{3x}{8y} \div \frac{9x}{16y} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{24x^3y^2}{5z^2} \div \frac{8x^2y^3}{15z^4} = \frac{9xz^2}{y}$ c) $\frac{x^2-4y^2}{x^2+xy} \div \frac{x^2-xy-6y^2}{y^2+xy} = \frac{y(x-2y)}{x(x-3y)}$
9. a) $\frac{6x^2-x-2}{3x-2} = (2x+1)^2$ b) $\frac{\frac{y^2-3y+2}{y^2+4y-21}}{\frac{4-4y+y^2}{9-y^2}} = -\frac{(y-1)(y+3)}{(y-2)(y+7)}$ c) $\frac{\frac{x^2y+xy^2}{x-y}}{x+y} = \frac{xy}{x-y}$
10. a) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x}{6}$ e) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{x^2-4}$
- b) $\frac{4}{3x} - \frac{5}{4x} = \frac{1}{12x}$ f) $\frac{r-1}{r^2+r-6} - \frac{r+2}{r^2+4r+3} + \frac{1}{3r-6} = \frac{r^2+4r+12}{3(r+3)(r-2)(r+1)}$
- c) $\frac{3}{2y^2} - \frac{8}{y} = \frac{3-16y}{2y^2}$ g) $\frac{x}{2x^2+3xy+y^2} - \frac{x-y}{y^2-4x^2} + \frac{y}{2x^2+xy-y^2} = \frac{3x^2+xy}{(2x+y)(2x-y)(x+y)}$
- d) $\frac{x+y^2}{x^2} + \frac{x-1}{x} - 1 = \frac{y^2}{x^2}$ h) $\frac{a}{(c-a)(a-b)} + \frac{b}{(a-b)(b-c)} + \frac{c}{(b-c)(c-a)} = 0$
11. a) $\frac{x+y}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = xy$ d) $\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}} = 2$
- b) $\frac{2 + \frac{1}{x}}{2x^2+x} = \frac{1}{x^2}$ e) $\frac{x}{1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{y}}} = x+y$
- c) $\frac{y + \frac{2y}{y-2}}{1 + \frac{4}{y^2-4}} = y+2$ f) $2 - \frac{2}{1 - \frac{2}{2 - \frac{2}{x^2}}} = 2x^2$