Capítulo 2

Números Reales

Introducción

La idea de número aparece en la historia del hombre ligada a la necesidad de contar objetos, animales, etc. Para lograr este objetivo, usaron los dedos, guijarros, marcas en bastones, nudos en una cuerda y algunas otras formas para ir pasando de un número al siguiente. A medida que la cantidad crece, se hace necesario un sistema más práctico de representación numérica.

El sistema de numeración más usado fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes. Acerca del origen indio del sistema, hay pruebas documentales más que suficientes, entre ellas la opinión de Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, quien fue uno de los introductores del nuevo sistema en Europa. En aquella época se usaban los números romanos y el ábaco. Su gran mérito fue la introducción del concepto y símbolo del cero, lo que permite un sistema en el que sólo diez símbolos puedan representar cualquier número por grande que sea y simplificar la forma de efectuar las operaciones. En su libro titulado *"Liber Abaci"* (Libro de los Cálculos) hizo tal referencia; y, si bien su obra fue un hecho revolucionario, debido a que no había sido inventada la imprenta, tuvieron que pasar tres siglos para que fuera conocida en toda Europa.

Fibonacci, matemático italiano (1170 - 1250)

En el capítulo anterior hemos utilizado los números y uno de los conjuntos que nos ha servido como referencia es $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, el cual se denomina conjunto de los números naturales.

En algunas situaciones de la vida diaria, tales como:

- Determinar el número que sumado con 5, dé por resultado 2.
- Tener un sobregiro de $\$ 100$ en una cuenta corriente.
- Disminuir la temperatura de 25 ºC a 20 ºC en un cierto instante de tiempo.
- Deber una cierta suma de dinero.

Nos encontramos con la dificultad de que no existen números naturales que puedan resolver dichos problemas. Las soluciones se encuentran en un nuevo conjunto denominado conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, del alemán **z**ahl (número).

¿Existe algún número que multiplicado por 2 sea 1? En general, dados dos números enteros m y n cualesquiera, ¿existe un número entero x que multiplicado por $n\,(n \neq 0)$ sea igual a m? La respuesta negativa a estas preguntas obligó a los matemáticos a una ampliación del conjunto $\mathbb{Z}$, introduciendo un nuevo conjunto numérico denominado conjunto de los números racionales, denotado por $\mathbb{Q}$ y definido por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ f / f = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$, del inglés **q**uotient (cociente).

Un número racional es aquel que puede expresarse como una fracción $\frac{p}{q}$ entre dos números enteros: p (numerador) y q (denominador), con denominador q diferente de cero.

Pero también existen números que no pueden ser representados como una fracción, a este conjunto lo denominamos $\mathbb{I}$: conjunto de los números irracionales. Tales números existen, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e, π, etc.

Tanto los números racionales como los irracionales forman el conjunto de los números reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. La siguiente figura muestra cómo se relacionan los conjuntos numéricos mencionados:

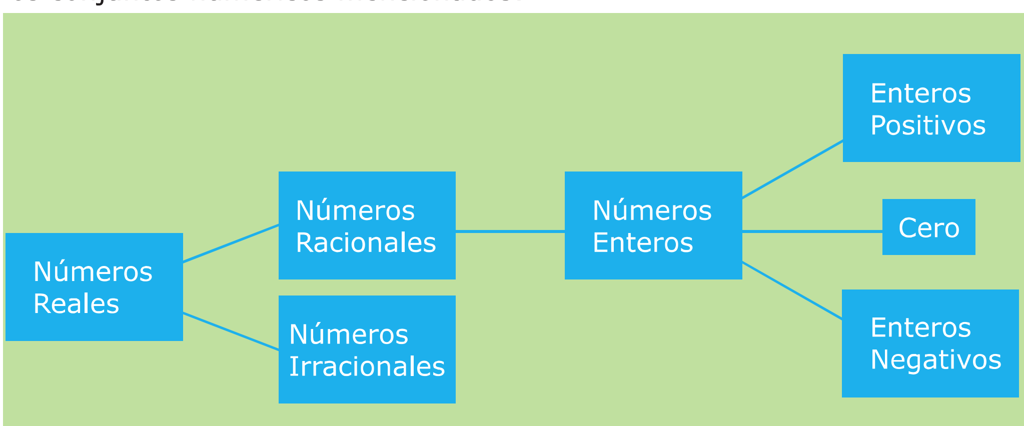

Figura 2.1: Relación de los Conjuntos Numéricos.

Es muy ilustrativa la representación gráfica de los números. Se puede utilizar una recta dibujada de manera horizontal, sobre la cual seleccionamos un punto y lo marcamos con $\mathbf{0}$ (origen), este punto representa el número cero. Si queremos identificar un número positivo, lo marcamos a la derecha del cero, mientras que si es negativo, lo marcamos a la izquierda del cero. A esta recta se la denomina recta de los números reales.

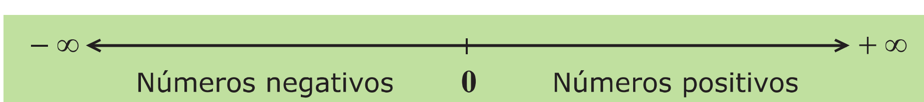

Figura 2.2: Recta de los Números Reales.

Capítulo 2

Números Reales

Si consideramos números enteros a la derecha de $\mathbf{0}$, estamos hablando del conjunto $\mathbb{Z}^+$, mientras que los que se encuentran a la izquierda de $\mathbf{0}$, representan el conjunto $\mathbb{Z}^-$. El cero no es positivo ni negativo.

Las mismas consideraciones se aplicarán para los números racionales, irracionales y reales en general. Dado que la cardinalidad de estos conjuntos es infinita, se utilizará el símbolo ∞ para representar tal valor en la recta numérica.

Si se tratara de un valor tan grande y positivo como sea posible, entonces se lo representará con $+\infty$; mientras que si el valor es tan grande como sea posible, pero negativo, entonces se utilizará $-\infty$.

2.1 Representación Decimal

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Representar un número racional en forma fraccionaria o periódica.
* Dada una representación decimal, determinar la fracción que le corresponde.
* Dado un número racional, representarlo en la recta real.
* Reconocer la diferencia entre la representación decimal de un número racional y uno irracional.

Los números reales pueden ser representados con cifras enteras y cifras decimales. Los números reales racionales tienen representaciones decimales con una cantidad finita de dígitos, o con cierto número de dígitos que aparecen indefinidamente siguiendo algún patrón de repetición.
Por ejemplo: $\frac{2}{5} = 0.4$ que tiene un solo decimal; $\frac{1}{6} = 0.166666...$, donde el dígito 6 se repite indefinidamente; $\frac{232}{99} = 2.343434...$, tiene los dígitos 3 y 4 repetidos en la secuencia decimal.
Los números reales irracionales tienen representaciones decimales que no terminan ni tienen un patrón de repetición. Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1.414213...$, $\pi = 3.14159...$ En la práctica, los números irracionales generalmente son representados por aproximaciones. Se suele utilizar el símbolo $\approx$ (se lee "aproximadamente igual a") para escribir $\sqrt{2} \approx 1.414$ y $\pi \approx 3.1416$.

Para lograr la representación decimal, en el caso de números racionales, es suficiente dividir el numerador para el denominador.