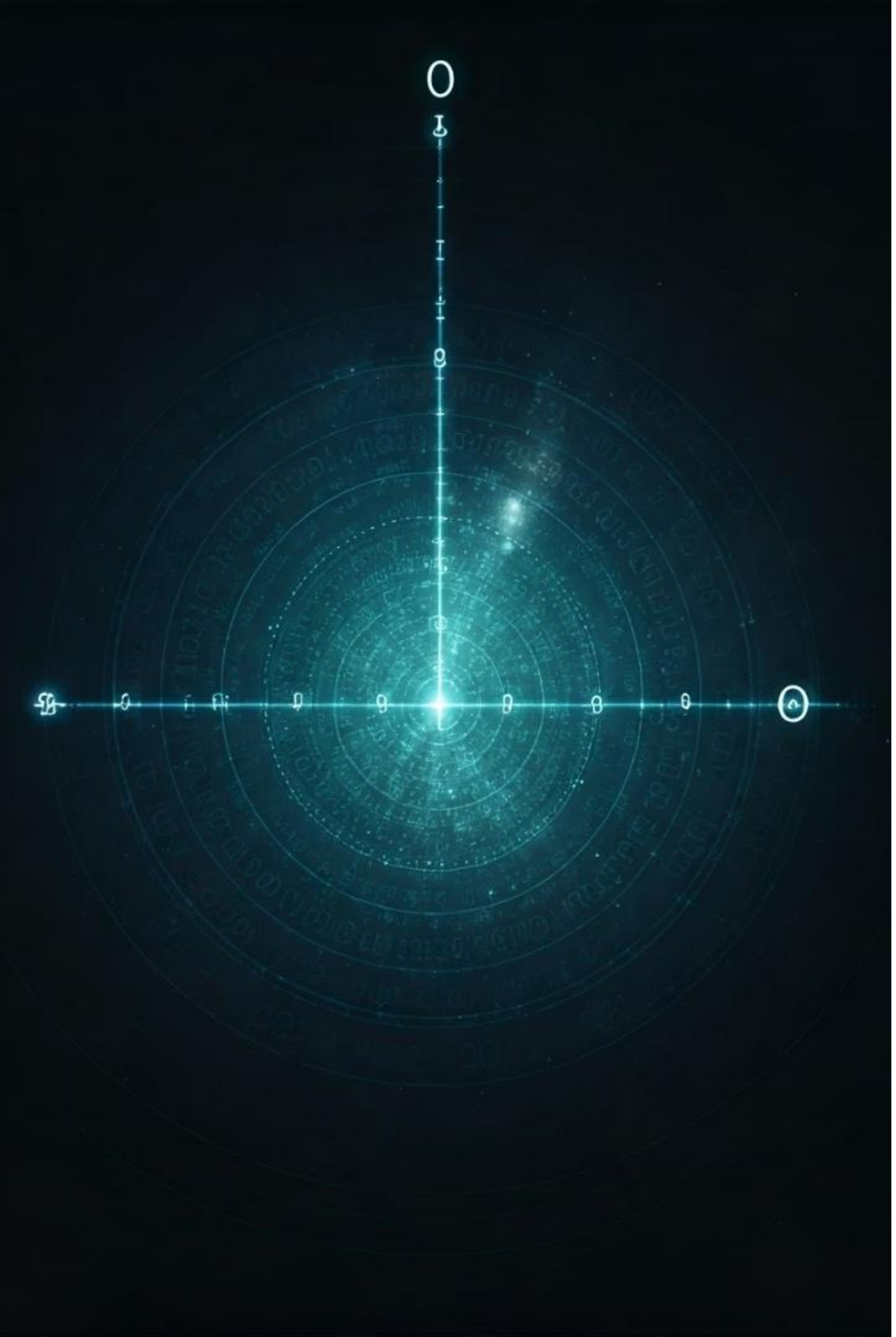
COORDINACIÓN DE ADMISIÓN Y NIVELACIÓN

DESTINO Unach

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO



Los Números Reales: Una Introducción

El conjunto de los números reales es uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas. Abarca todos los números que podemos imaginar, desde los números naturales hasta los números irracionales. En este viaje exploraremos la historia, clasificación y propiedades de los números reales, así como sus operaciones básicas.

Clasificación de los números reales y sus propiedades

Números Naturales

Números enteros no negativos utilizados para contar. Ejemplos: 1, 2, 3.

Números Enteros

Subconjunto de los racionales que incluye positivos, negativos y cero. Ejemplos: -2, 0, 3.

Números Racionales

Números que se pueden expresar como el cociente de dos enteros. Ejemplos: 1/2, -3, 0.75.

Números Irracionales

Números que no se pueden expresar como un cociente. La representación decimal es no periódica. Ejemplos:\

Evolución histórica de los números

1. ## Números Naturales (N)

   Utilizados para contar objetos, surgen con la necesidad de contabilizar animales, herramientas, etc.

2. ## Números Enteros (Z)

   Incorporan el cero y los números negativos, facilitando la representación de deudas o magnitudes bajo cero.

3. ## Números Racionales (Q)

   Surgen con la necesidad de representar cantidades fraccionarias, abarcando divisiones entre números enteros.

4. ## Números Irracionales (I)

   Desafiaron las ideas previas, introduciendo cantidades que no se pueden expresar como fracciones, como la raíz cuadrada de 2.

5. ## Números Reales (R)

   El conjunto total de números que conocemos, incluyendo los racionales e irracionales, abarca la recta numérica completa.

Conjunto de los números naturales (N)

1

Números para contar

Se utilizan para representar cantidades discretas y ordenadas.

2

Ordenados y finitos

Cada número natural tiene un sucesor único, y el conjunto no tiene un elemento final.

3

Base de otros conjuntos

Los números naturales son la base para construir otros conjuntos numéricos, como los enteros, racionales e irracionales.

Conjunto de los números enteros (Z)

1 Ampliación de los naturales

Los enteros incluyen a los naturales, el cero y sus opuestos negativos.

2 Operaciones básicas

Permiten la suma, resta, multiplicación y división, incluyendo la operación de inversión (opuesto).

3 Orden y comparación

Están ordenados en una recta numérica, permitiendo comparar su tamaño y posición relativa.

Conjunto de los números racionales (Q)

Fracciones

Se representan como divisiones entre dos números enteros, como 1/2 o -3/4.

Decimales

Pueden ser finitos o periódicos, y se pueden expresar como fracciones.

Recta Numérica

Los números racionales se ubican en la recta numérica, representando puntos específicos.

Conjunto de los números irracionales (I)

Infinitos y No Periódicos

Los números irracionales tienen representaciones decimales infinitas que no se repiten en un patrón.

No Fraccionarios

No se pueden expresar como fracciones de dos números enteros.

Ejemplos Comunes

Pi (π) y la raíz cuadrada de 2 son ejemplos conocidos de números irracionales.

Axiomas de los Números Reales

•**Axiomas de la suma:**

- Asociatividad: $(x+y)+z=x+(y+z)$
- Conmutatividad: $x+y=y+x$
- Existencia del elemento neutro aditivo (0): $x+0=x$
- Existencia del inverso aditivo: para cada x, existe −x tal que $x+(-x)=0$

Axiomas del producto:

- Asociativa: $(xy)z=x(yz)$
- Conmutativa: $xy=yx$
- Existencia del elemento neutro multiplicativo (1): $1\cdot x=x$
- Existencia del inverso multiplicativo: para cada x≠0 existe $1/x$ tal que $x\cdot 1/x=1$

•Distributiva: El producto distribuye sobre la suma:

$$x(y+z)=xy+xz$$

Estas propiedades garantizan que $(R,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo

Axiomas de Orden

Definen una relación de orden ≤ en los números reales que satisface:

•Reflexividad: si $x\le y$ y $y\le x$, entonces $x=y$

•Transitividad: si $x\le y$ y $y\le z$, entonces $x\le zx$

•Comparabilidad: para cualesquiera x,y se cumple $x\le y$ o $y\le x$

•Compatibilidad con la suma: si $x\le y$, entonces $x+z\le y+z$ para todo z

•Compatibilidad con el producto: si $0\le x$ y $0\le y$, entonces $0\le xy$

Estos axiomas garantizan que R es un cuerpo ordenado.

Operaciones con números reales

Adición

La suma combina dos números para obtener un total.

Se representa con el símbolo "+".

Sustracción

La resta encuentra la diferencia entre dos números.

Se representa con el símbolo "-".

Multiplicación

La multiplicación es una suma repetida de un mismo número.

Se representa con el símbolo "×" o "*".

División

La división separa un número en partes iguales.

Se representa con el símbolo "÷" o "/".

Operaciones con números reales

Adición

La suma combina dos números para obtener un total.

Se representa con el símbolo "+".

Sustracción

La resta encuentra la diferencia entre dos números.

Se representa con el símbolo "-".

Propiedades

$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ (a+b=b+a)$	Conmutativa.
$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}\ (a+(b+c)=(a+b)+c)$	Asociativa.
$\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ (a+0=0+a=a)$	0 es el elemento neutro aditivo.
$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ (a+b=b+a=0)$	b es el elemento inverso aditivo.

Suma y resta de fracciones del mismo denominador

- Para **sumar** fracciones del *mismo denominador*, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$$

- Ejemplo:

$$\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{8}{6}=\frac{4+3+8}{6}=\frac{15}{6}$$

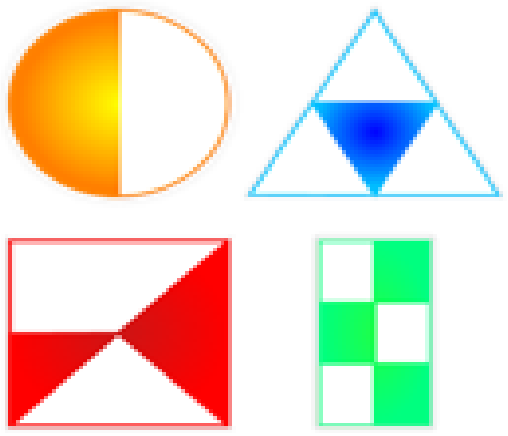
- Para **restar** fracciones del *mismo denominador*, se restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Ejemplo:

$$\frac{9}{7}-\frac{3}{7}=\frac{9-3}{7}=\frac{6}{7}$$

Ejemplos explicados



Suma y resta de fracciones de distinto denominador

- Para **sumar** fracciones de *distinto denominador*, se reducen las fracciones a común denominador; después se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.
- ***Ejemplo:***

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4\cdot 6}{30}+\frac{1\cdot 10}{30}+\frac{1\cdot 15}{30}=\frac{49}{30}$$

m.c.m. (5, 3, 2) = 30

- Para **restar** fracciones de *distinto denominador*, se reducen las fracciones a común denominador; después se restan los numeradores y se deja el mismo denominador:
- ***Ejemplo:***

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 4}{12}-\frac{1\cdot 3}{12}=\frac{5}{12}$$

m.c.m. (3, 4) = 12

Operaciones con números reales

Multiplicación

La multiplicación es una suma repetida de un mismo número.

Se representa con el símbolo "×" o "*".

División

La división separa un número en partes iguales.

Se representa con el símbolo "÷" o "/".

Ley de signos

(+) x (-) = (-)
(-) x (+) = (-)
(+)x (+) = (+)
(-) x (-) = (+)

Propiedades

$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ (a \cdot b = b \cdot a)$	Conmutativa.
$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}\ (a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$	Asociativa.
$\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ (a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$	1 es el elemento neutro multiplicativo.
$\forall (a \in \mathbb{R} \wedge \neg(a = 0))\ \exists b \in \mathbb{R}\ (a \cdot b = b \cdot a = 1)$	b es el elemento inverso multiplicativo.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)]$$

Multiplicación de fracciones

- El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

Considerando:

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} = \frac{a \cdot b}{a' \cdot b'} = \frac{d}{d'}$$

Ejemplo

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{8}{60}$$

División de fracciones

Para dividir una fracción $\frac{a}{b}$ por otra fracción $\frac{c}{d}$, se multiplica la fracción $\frac{a}{b}$ por la fracción inversa de $\frac{c}{d}$, ó se multiplican en cruz los términos de las fracciones.

Considerando:

$$\frac{a}{a'} \div \frac{b}{b'} = \frac{a \cdot b'}{a' \cdot b}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{32}{15}$$

Propiedades de la potenciación y radicación

Una potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación en que se repite un mismo factor un cierto número de veces.

$$a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\, a}_{n \text{ veces}}$$

a n: es la potencia
a : es la base
n : es el exponente

Si el exponente es fraccionario tenemos una expresión **algebraica** con radicales.

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Propiedades

Sean $a \neq 0$, $b \neq 0$:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
5. $(a^n)^m = a^{m\,n}$
6. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
7. $a^0 = 1$

Reglas de prioridad de operaciones

1

Paréntesis, corchetes y llaves

Las operaciones dentro de estos símbolos se realizan primero, de adentro hacia afuera.

2

Exponentes y raíces

Se calculan antes de la multiplicación y la división.

3

Multiplicación y división

Se realizan de izquierda a derecha.

4

Suma y resta

Se realizan de izquierda a derecha.