Capítulo 1

Lógica y Conjuntos

La lógica es un método de razonamiento que no acepta conclusiones erróneas. Esto se puede lograr definiendo en forma estricta cada uno de los conceptos. Todo debe definirse de tal forma que no dé lugar a dudas o imprecisiones en la veracidad de su significado. Nada puede darse por supuesto, y las definiciones de diccionario no son normalmente suficientes. Por ejemplo, en el lenguaje ordinario, un enunciado u oración se puede definir como "una palabra o grupo de palabras que declara, pregunta, ordena, solicita o exclama algo; unidad convencional del habla o escritura coherente, que normalmente contiene un sujeto y un predicado, que empieza con letra mayúscula y termina con un punto".

Sin embargo, en lógica simbólica una oración tiene un significado mucho más específico y se llama proposición.

Definición 1.1 (Proposición)

Una proposición es una unidad semántica que, o sólo es verdadera o sólo es falsa.

Los elementos fundamentales de la lógica son las proposiciones. Por ello, las oraciones que no son falsas ni verdaderas, las que son falsas y verdaderas al mismo tiempo, o las que demuestran algún tipo de imprecisión (carecen de sentido), no son objeto de estudio de la lógica.

Ejemplo 1.1 Oraciones que son proposiciones.

5 es un número primo.
$-17 + 38 = 21$.
Todos los números enteros son positivos.
Vicente Rocafuerte fue Presidente del Ecuador.

Las oraciones anteriormente expuestas son proposiciones, ya que son verdaderas o falsas. Todas ellas pueden ser calificadas por el lector con precisión y sin ambigüedades o subjetivismo.

Usualmente, las primeras letras del alfabeto español en minúscula se usan para representar proposiciones.

Ejemplo 1.2 Representación simbólica de proposiciones.

5 es un número primo puede ser representada por la letra a, de la forma:

a: 5 es un número primo.

Ejemplo 1.3 Oraciones que no son proposiciones.

Lava el auto, por favor.
Hola, ¿cómo estás?
¡Apúrate!
La conceptualización cambia lo absurdo en azul.
$x + 5 = 9$.
¡Mañana se acabará el mundo!

Las primeras cuatro oraciones no son proposiciones porque no se puede establecer su valor de verdad. Generalmente las oraciones imperativas, exclamativas e interrogativas no son proposiciones.

El quinto enunciado no es una proposición, ya que el valor de x no es preciso y por lo tanto no se puede establecer su valor de verdad.

La sexta oración no es una proposición porque su valor de verdad no se puede determinar.

Definición 1.2 (Valor de verdad)

El valor de verdad de una proposición es la cualidad de veracidad que describe adecuadamente la proposición. Éste puede ser verdadero o falso.

Usualmente al valor verdadero se lo asocia con: $\mathbf{1}$, V, T, $True$; mientras que el valor falso se lo asocia con: $\mathbf{0}$, F, $False$. Se podría utilizar cualquiera de ellas, pero la convención a seguir en el texto será el uso de $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$, tomando como referencia el sistema de numeración binario.

En el ejemplo 1.1 podemos observar que el valor de verdad de la segunda proposición es VERDADERO, mientras que el valor de verdad de la tercera proposición es FALSO.

Verdad y falsedad pueden considerarse simplemente como los valores lógicos de la unidad semántica descriptiva con sentido completo. Ese valor es lo que más nos interesa sobre una proposición.

Definición 1.3 (Tabla de verdad)

Una tabla de verdad es una representación de los posibles valores de verdad que podría tomar una proposición.

Las tablas de verdad sirven para mostrar los valores, las relaciones y los resultados posibles al realizar operaciones lógicas.

Ejemplo 1.4 Construcción de tablas de verdad.

a
0
1

a	b
0	0
0	1
1	0
1	1

a	b	c
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

La cantidad de combinaciones (filas de la tabla de verdad) depende de la cantidad de proposiciones presentes en la expresión lógica.

1.2 Operadores Lógicos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada la definición de los operadores lógicos, interpretar el comportamiento de estos operadores mediante su tabla de verdad.
* Dado un texto, traducirlo al lenguaje simbólico, identificando operadores lógicos y proposiciones presentes.
* Dada una proposición en el lenguaje simbólico, interpretar su mensaje en lenguaje natural.
* Dada una condicional de proposiciones, realizar parafraseos con las diferentes expresiones gramaticales existentes.
* Dada una condicional de proposiciones, determinar su recíproca, inversa y contrarrecíproca.
* Dada una proposición condicional verdadera, analizar sus condiciones necesarias y suficientes.

En nuestro lenguaje común usamos frecuentemente proposiciones más complejas, no tan simples o elementales.

Ejemplo 1.5 Proposiciones que no son simples.

- **No** te encontré en tu casa.
- Fui al banco **y** estaba cerrado.
- Tengo una moneda de cinco centavos **o** una de diez centavos.
- El carro de Juan **o** es azul **o** es negro.
- **Si** me gano la lotería, **entonces** me compro una casa.
- Estudio en la ESPOL **si y sólo si** me esfuerzo.

Surge entonces la necesidad de definir los nexos de estas proposiciones a los cuales se denominan **conectores** u **operadores lógicos**. Gramaticalmente, estos nexos, en su mayoría, son denominados partes invariables de la oración.

Definición 1.4 (Negación)

Sea a una proposición, la negación de a, representada simbólicamente por $\neg a$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	$\neg a$
0	1
1	0

Cuadro 1.1: Tabla de Verdad de la Negación.

Este operador lógico **cambia el valor de verdad de una proposición**: si a es una proposición verdadera, $\neg a$ es falsa; si a es una proposición falsa, $\neg a$ es verdadera. La negación se presenta con los términos gramaticales: “no”, “ni”, “no es verdad que”, “no es cierto que”.

Ejemplo 1.6 Negación de proposiciones.

Si se tiene la proposición:
a: Tengo un billete de cinco dólares.

La negación de a es:
$\neg a$: No tengo un billete de cinco dólares.

Ejemplo 1.7 Negación de proposiciones.

Si se tiene la proposición:
a: No quiero hacer el viaje.

La negación de a es:
$\neg a$: Quiero hacer el viaje.

Definición 1.5 (Conjunción)

Sean a y b proposiciones, la conjunción entre a y b, representada simbólicamente por $a \wedge b$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cuadro 1.2: Tabla de Verdad de la Conjunción.

Este operador lógico relaciona dos proposiciones para formar una nueva, en la cual **la proposición resultante será verdadera solamente cuando el valor de verdad de ambas proposiciones es verdadero**. En español, la conjunción copulativa se presenta con los términos gramaticales: "y", "pero", "mas", y signos de puntuación como: la coma, el punto, y el punto y coma.

Ejemplo 1.8 Conjunción de proposiciones.

Si se tienen las proposiciones:

a: Obtengo buenas notas.
b: Gano una beca.

La conjunción entre a y b es:

$a \wedge b$: Obtengo buenas notas y gano una beca.

Ejemplo 1.9 Conjunción de proposiciones.

Si se tienen las proposiciones:

a: Trabajo mucho.
b: Recibo un bajo sueldo.

La conjunción entre a y b se puede expresar como:

$a \wedge b$: Trabajo mucho pero recibo un bajo sueldo.

Definición 1.6 (Disyunción)

Sean a y b proposiciones, la disyunción entre a y b, representada simbólicamente por $a \vee b$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Cuadro 1.3: Tabla de Verdad de la Disyunción.

Este operador lógico relaciona dos proposiciones para formar una nueva, en la cual **la proposición resultante será falsa solamente cuando el valor de verdad de ambas proposiciones es falso**.

En español, la disyunción se presenta con el término gramatical "o".

Ejemplo 1.10 Disyunción de proposiciones.

Si se tienen las proposiciones:

a: Tengo un libro de Trigonometría.
b: Tengo un libro de Álgebra.

La disyunción entre a y b es:

$a \vee b$: Tengo un libro de Trigonometría o uno de Álgebra.

Como se podrá notar en este ejemplo, existe la posibilidad de poseer ambos libros, razón por la cual esta disyunción recibe el nombre de **disyunción inclusiva**.

En el lenguaje español suelen presentarse situaciones que son mutuamente excluyentes entre sí. La expresión "o estoy en Quito o estoy en Guayaquil" denota la imposibilidad de estar físicamente en Quito y Guayaquil al mismo tiempo.

Definición 1.7 (Disyunción exclusiva)

Sean a y b proposiciones, la disyunción exclusiva entre a y b, representada simbólicamente por $a \veebar b$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \veebar b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Cuadro 1.4: Tabla de Verdad de la Disyunción Exclusiva.

Este operador lógico relaciona dos proposiciones para formar una nueva, en la cual **la proposición resultante será verdadera cuando solamente una de ellas sea verdadera**.

La disyunción exclusiva $a \veebar b$ puede expresarse como:

$$(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$$

En español, la disyunción exclusiva se presenta con el término gramatical "o", "o sólo", "o solamente", "o..., o...".

Ejemplo 1.11 Disyunción exclusiva de proposiciones.

Si se tienen las proposiciones:

a: Estoy en Quito.
b: Estoy en Guayaquil.

La disyunción exclusiva entre a y b es:

$a \veebar b$: O estoy en Quito o estoy en Guayaquil.

Definición 1.8 (Condicional)

Sean a y b proposiciones, la condicional entre a y b, representada simbólicamente por $a \rightarrow b$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Cuadro 1.5: Tabla de Verdad de la Condicional.

Este operador lógico también se denomina enunciación hipotética o implicación. En la proposición $a \rightarrow b$, a es el antecedente, hipótesis o premisa; b es el consecuente, conclusión o tesis; y **la proposición resultante será falsa solamente cuando el valor de verdad del antecedente sea verdadero y el valor de verdad del consecuente sea falso.**

En español, la proposición $a \rightarrow b$ se puede encontrar con los siguientes términos gramaticales: "si a, entonces b", "a sólo si b", "a solamente si b", "b si a", "si a, b", "b con la condición de que a", "b cuando a", "b siempre que a", "b cada vez que a", "b ya que a", "b debido a que a", "b puesto que a", "b porque a", "se tiene b si se tiene a", "sólo si b, a", "b, pues a", "cuando a, b", "los a son b", "a implica b", o cualquier expresión que denote causa y efecto.

Ejemplo 1.12 Condicional de proposiciones.

Si se tienen las proposiciones:

a: Juan gana el concurso.
b: Juan dona \$ 10 000.

La condicional entre a y b es:

$a \rightarrow b$: Si Juan gana el concurso, dona \$ 10 000.

Parafraseando la condicional, tenemos:

- Juan gana el concurso sólo si dona \$ 10 000.
- Juan dona \$ 10 000 si gana el concurso.
- Si Juan gana el concurso, entonces dona \$ 10 000.
- Juan dona \$ 10 000 puesto que gana el concurso.
- Juan dona \$ 10 000 debido a que gana el concurso.
- Juan dona \$ 10 000 siempre que gane el concurso.
- Cuando Juan gane el concurso, dona \$ 10 000.
- Juan dona \$ 10 000 porque gana el concurso.

En base a este ejemplo, nos podemos preguntar: ¿cuándo se quebrantará la promesa de Juan? Esto será únicamente cuando Juan gane el concurso y no done el dinero.

Existen otras proposiciones relacionadas con la condicional $a \rightarrow b$, las cuales se denominan: recíproca, inversa y contrarrecíproca (o contrapositiva).

La **Recíproca**, es representada simbólicamente por: $b \rightarrow a$.

La **Inversa**, es representada simbólicamente por: $\neg a \rightarrow \neg b$.

La **Contrarrecíproca**, es representada simbólicamente por: $\neg b \rightarrow \neg a$.

Ejemplo 1.13 Variaciones de la condicional.

A partir de la proposición:

"Si es un automóvil, entonces es un medio de transporte".

La Recíproca sería:

"Si es un medio de transporte, entonces es un automóvil".

La Inversa sería:

"Si no es un automóvil, entonces no es un medio de transporte".

La Contrarrecíproca sería:

"Si no es un medio de transporte, entonces no es un automóvil".

Cabe anotar que una proposición puede ser reemplazada por su contrarrecíproca sin que se afecte su valor de verdad, lo cual no se cumple con la recíproca o la inversa.

A continuación se verifica este hecho en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.14 Variaciones de la condicional.

A partir de la proposición:
"Si un número es divisible para 6, entonces es divisible para 3".

La Recíproca sería:
"Si un número es divisible para 3, entonces es divisible para 6".

La Inversa sería:
"Si un número no es divisible para 6, entonces no es divisible para 3".

La Contrarrecíproca sería:
"Si un número no es divisible para 3, entonces no es divisible para 6".

Relacionadas a la enunciación hipotética, surgen las nociones de **condición necesaria** y **condición suficiente**, y puede afirmarse con propiedad que mucha gente tiene integrada estas nociones a su lenguaje cotidiano, tal como se ilustra en el siguiente caso.

Ejemplo 1.15 Introducción a las condiciones necesarias y suficientes.

Un profesor presenta este problema a sus estudiantes:

"Un hacendado tiene un cierto número de reses, de tal forma que: si las agrupa de 2 en 2, le sobra 1, si las agrupa de 3 en 3, le sobra 1, pero si las agrupa de 4 en 4, no le sobran. Entonces, ¿podría indicar usted el número de reses que tiene el hacendado?".

El razonamiento que presentaron los estudiantes a este problema, fue:

"Si el hacendado las agrupa de 2 en 2, sobra 1, por lo tanto no es múltiplo de 2. Si las agrupa de 3 en 3, sobra 1, por lo tanto no es múltiplo de 3. Pero si las agrupa de 4 en 4, no le sobran, por lo tanto es múltiplo de 4.
Mmmmm..., pero algo anda mal, porque si el número de reses es múltiplo de 4, también debe ser múltiplo de 2 debido a que 4 es múltiplo de 2. Luego, el problema está mal planteado".

Esto significa que las condiciones se contradicen y el problema tiene condiciones que no se pueden dar. Por lo tanto, no hay forma de determinar el número de reses del hacendado.

Analizando este problema desde el punto de vista lógico y suponiendo que n es un entero positivo bien definido, se tendrá la siguiente propiedad: "Si n es múltiplo de 4, entonces n es múltiplo de 2", la cual se puede expresar como $a \rightarrow b$, donde a: n es múltiplo de 4 y b: n es múltiplo de 2.

Al ser la proposición $a \rightarrow b$ verdadera, la condición "n es divisible para 4" es suficiente para que "n sea divisible para 2"; es decir, que basta que n sea divisible para 4 para que ese mismo n sea divisible para 2. Esto significa que a es **condición suficiente** para b.

Por otro lado, la condición "n es divisible para 2" es necesaria para que "n sea divisible para 4"; es decir, que se requiere que n sea divisible para 2 para que ese mismo n sea divisible para 4. Esto significa que b es **condición necesaria** para a.

Una misma proposición puede ser condición suficiente para varias proposiciones y viceversa. Una misma proposición puede ser condición necesaria para distintas proposiciones.

Ejemplo 1.16 Condiciones necesarias y suficientes.

Las siguientes proposiciones son verdaderas:

"Si n es divisible para 16, n es divisible para 2".

"Si n es divisible para 8, n es divisible para 2".

"Si n es divisible para 16, n es divisible para 8".

Parafraseando las proposiciones anteriores, se tiene:

"n es divisible para 16" es condición suficiente para que "n sea divisible para 2".

"n es divisible para 2" es condición necesaria para que "n sea divisible para 8".

"n es divisible para 8" es condición necesaria para que "n sea divisible para 16".

Cuando la proposición $a \rightarrow b$ es verdadera, se puede parafrasear de la siguiente manera: "basta a para que b", "se necesita b para a", "para que suceda a, es necesario que suceda b", "b con la condición de que a".

Ejemplo 1.17 Identificación de condiciones necesarias y suficientes.

Si consideramos que la siguiente proposición es verdadera:

"Si estudias, aprobarás el curso".

Podemos afirmar que es **suficiente** estudiar para aprobar el curso. Así mismo, es **necesario** aprobar el curso como consecuencia de haber estudiado.

Ejemplo 1.18 Identificación de condiciones necesarias y suficientes.

Si ahora suponemos que la siguiente proposición es verdadera:
"Aceptaré el trabajo con la condición de que me traten bien".

Podemos afirmar que es **suficiente** que me traten bien para aceptar el trabajo. Por otra parte, es **necesario** aceptar el trabajo como consecuencia de que me traten bien.

Definición 1.9 (Bicondicional)

Sean a y b proposiciones, la bicondicional entre a y b, representada simbólicamente por $a \leftrightarrow b$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

a	b	$a \leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cuadro 1.6: Tabla de Verdad de la Bicondicional.

Este operador lógico también se denomina doble implicación. **La proposición $a \leftrightarrow b$ será verdadera cuando los valores de verdad de ambas proposiciones sean iguales.** También se puede observar que **la proposición $a \leftrightarrow b$ será falsa cuando los valores de verdad de ambas proposiciones sean diferentes**.

En español, la proposición $a \leftrightarrow b$ se puede encontrar con los siguientes términos gramaticales: "a si y sólo si b", "a si y solamente si b", "a implica b y b implica a", "a cuando y sólo cuando b".

Ejemplo 1.19 Bicondicional de proposiciones.

Dadas las proposiciones:
a: Un triángulo es equilátero.
b: Un triángulo es equiángulo.

La bicondicional entre a y b es:
$a \leftrightarrow b$: Un triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo.