

Funciones Cuadráticas, Dominio y Rango de Funciones Cuadráticas

ING. JOSÉ ALFONSO ALVARADO. C.



Unach
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
Libres por la Ciencia y el Saber

FUNCION CUADRÁTICA

Las funciones cuadráticas son funciones polinómicas de segundo grado, representada con una gráfica de parábola y la siguiente ecuación

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

La gráfica es una parábola.

La orientación de la parábola depende del signo de a:

$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \text{ ramas hacia arriba} \rightarrow \text{función cóncava} \\ a < 0 \text{ ramas hacia abajo} \rightarrow \text{función convexa} \end{array} \right.$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PARÁBOLA DE LA FUNCION CUADRÁTICA

Para construir una gráfica de parábola se requiere conocer los siguientes elementos:

El **Eje de simetría** viene dado por la recta $x = \frac{-b}{2a}$

El **Vértice de la parábola** tiene por abscisa $x_0 = \frac{-b}{2a}$

La **ordenada** (y) la determinaremos sustituyendo este valor de x_0 en la función.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PARÁBOLA DE LA FUNCION CUADRÁTICA

Los puntos de corte con el eje de abscisas vienen dados por las dos soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Son: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

El punto de corte con el eje de ordenadas viene dado por el punto $(0, c)$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PARÁBOLA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ejemplo:

Sea la función : $y = x^2 - 6x + 5$

1° Paso: Identifico que la parábola será con las ramas hacia arriba porque $a = 1 > 0$

2° Paso: Se calcula el eje de simetría: $x = \frac{-b}{2a}$

$$x = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3$$

3° Paso: Asumo el valor del eje de simetría para el vértice que tendrá por abscisa:

$$x_0 = 3$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PARÁBOLA DE LA FUNCION CUADRÁTICA

Ejemplo:

Sea la función : $y = x^2 - 6x + 5$

4° Paso: Sustituimos este valor de x_0 en la función $y = 3^2 - 6(3) + 5 = 0$

$$y = 9 - 18 + 5$$

$$y = -4$$

5° Paso: Obtengo el vértice con las coordenadas **(3, -4)**

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PARÁBOLA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ejemplo:

Sea la función : $y = x^2 - 6x + 5$

5° Paso: Calculo los puntos de corte con el eje de abscisas hacemos: $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{-6^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{-6^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PARÁBOLA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ejemplo:

Sea la función : $y = x^2 - 6x + 5$

5° Paso: Calculo los puntos de corte con el eje de abscisas hacemos: $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{2}$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2}$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} = \frac{10}{2} = \mathbf{5}$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PARÁBOLA DE LA FUNCION CUADRÁTICA

Ejemplo:

Sea la función : $y = x^2 - 6x + 5$

Entonces los puntos de corte son: $(5, 0)$ y $(1, 0)$

El punto de corte con el eje de ordenadas es $(0, 5)$

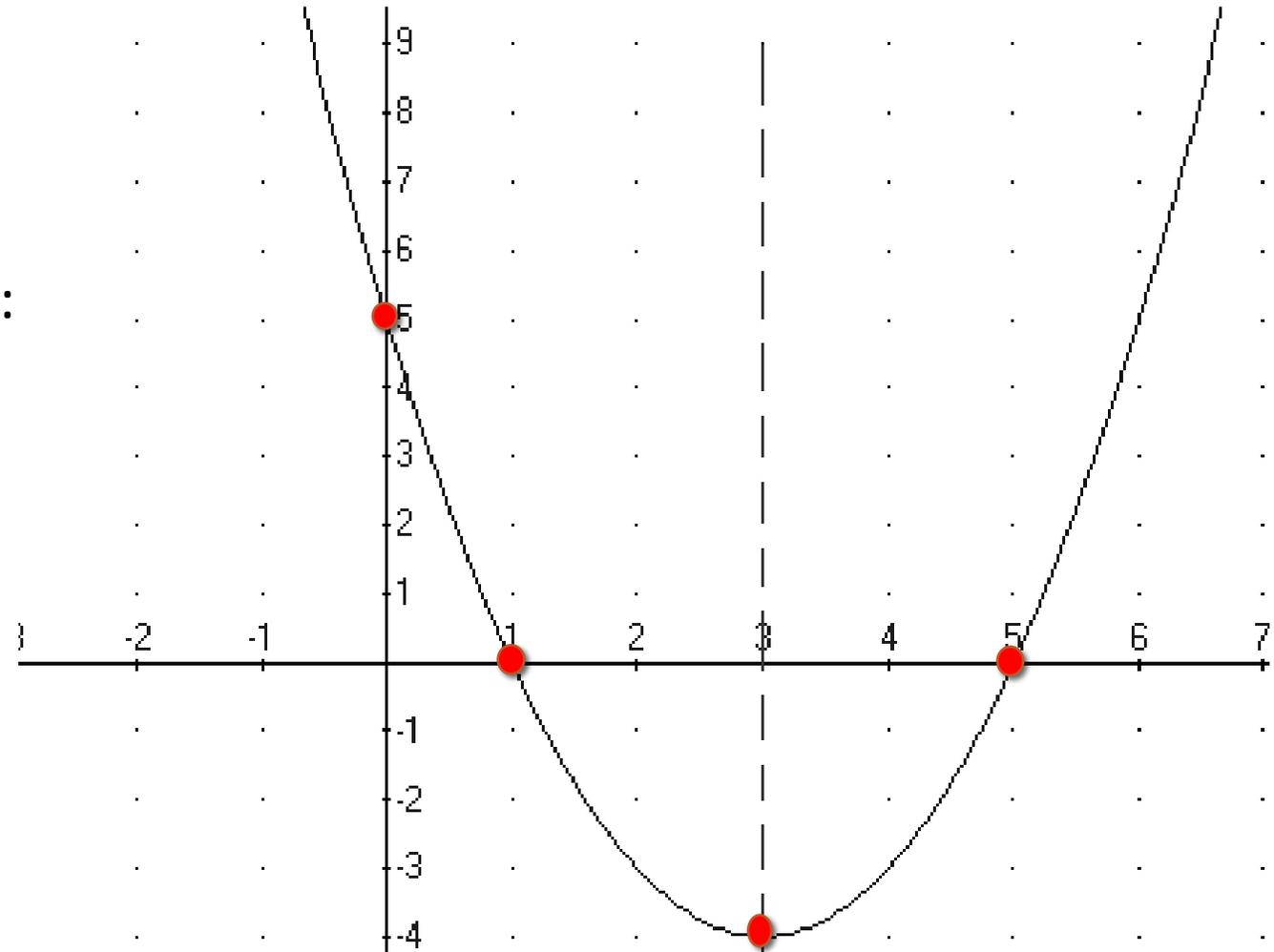
Y el vértice con las coordenadas $(3, -4)$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PARÁBOLA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ejemplo:

Sea la función : $y = x^2 - 6x + 5$

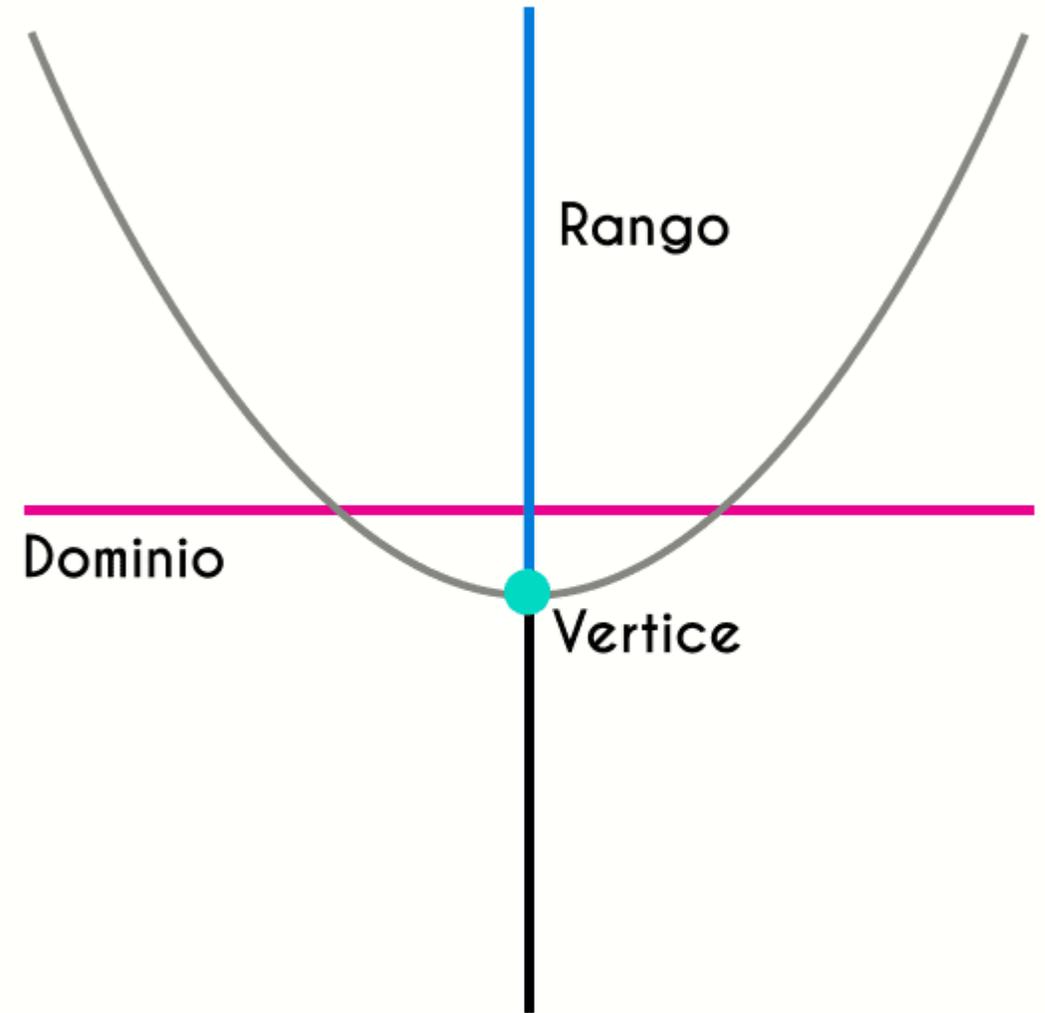
6° Paso: Grafico las coordenadas obtenidas:



DOMINIO Y RANGO DE LA FUNCION CUADRÁTICA

El **dominio** de una función cuadrática siempre van a ser los números reales, es decir, todos los números que van desde menos infinito hasta más infinito.

Ahora bien, lo que si requiere más análisis para determinar es el **rango** de la función, porque hay que determinar la dirección de la apertura de la parábola y la posición de su vértice porque de estos 2 puntos depende el rango en este tipo de funciones



DOMINIO Y RANGO DE LA FUNCION CUADRÁTICA

Saber la dirección de la parábola: La dirección de una parábola se puede identificar observando el signo que tiene el coeficiente de x^2 , si este es positivo, entonces función se abrirá hacia arriba, en cambio si el signo es negativo, la función abrirá hacia abajo, por ejemplo en la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ la parábola abre hacia arriba, porque la x^2 es positiva (hay que recordar que si el primer término de una ecuación no tiene un signo se sabe que este es positivo).

Encontrar el vértice de una función cuadrática: Como ya se sabe, una parábola tiene el siguiente orden: $ax^2 + bx + c$. donde "a" siempre será el número que acompaña a x^2 , b es el que acompaña a "x" y c es el número que está solo, entonces para encontrar las coordenadas (x,y) del vértice de la parábola las fórmulas que se usan son las siguientes:

DOMINIO Y RANGO DE LA FUNCION CUADRÁTICA

Coordenada "x" del vértice:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(1)} = 3$$

Coordenada "y" vértice (se evalúa la función en el valor de "x" del vértice):

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y = 3^2 - 6(3) + 5 = 0$$

$$y = 9 - 18 + 5$$

$$y = -4$$

Las coordenadas del vértice son **(3, -4)**

DOMINIO Y RANGO DE LA FUNCION CUADRÁTICA

Entonces, ya conociendo como encontrar estos dos puntos, lo único que falta es analizar los resultados y determinar el rango, por ejemplo si una función abre hacia arriba y su vértice está en $(3, -4)$ entonces el rango será desde menos infinito hasta -4 , que es la coordenada “y” del vértice $[-4, \infty)$, atención a esto, **cuando se encuentra el rango lo que se ocupa es solamente la coordenada “y” del vértice**, se encuentra la coordenada “x” pero es solamente para encontrar la coordenada “y”.

EJERCICIO EN CLASE FUNCION CUADRÁTICA

Ejercicio:

Resuelva, grafique y exprese el dominio y rango de la función:

$$y = x^2 - 5x + 6$$