MATEMÁTICAS BÁSICAS

LÓGICA MATEMÁTICA

CONCEPTO DE LÓGICA MATEMÁTICA

La Lógica estudia la forma del razonamiento. La Lógica Matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la Lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no valido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en Matemáticas para demostrar teoremas, sin embargo, se usa en forma constante para realizar cualquier actividad en la vida.

DEFINICIÓN Y CLASES DE PROPOSICIONES

Una *proposición* o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. Toda proposición consta de tres partes: un sujeto, un verbo y un complemento referido al verbo. La proposición es un elemento fundamental de la Lógica Matemática.

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica el porqué algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha.

Ejemplos.
p: México se encuentra en Europa.
q: $15-6=9$
r: $2x-3>7$
s: Los precios de los teléfonos celulares bajarán a fin de año.
t: Hola ¿cómo estás?
w: ¡Cómete esa fruta!

Los enunciados **p** y **q** pueden tomar un valor de falso o verdadero, por lo tanto, son proposiciones validas. El inciso **r** también es una proposición valida, aunque el valor de falso o verdadero depende del valor asignado a la variable x en determinado momento. La proposición del inciso **s** también esta perfectamente expresada aunque para decir si es falsa o verdadera se tendría que esperar a que terminara el año. Sin embargo, los enunciados **t** y **w** no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es un saludo y el otro es una orden.
En general, las proposiciones pueden ser:

- *Simples* si sólo tienen un sujeto, un verbo y un complemento. En caso contrario, son proposiciones *Compuestas*.
- *Cerradas* si tienen determinado el sujeto. *Abiertas* si no lo tienen determinado.
- *Afirmativas* o *Negativas*. Según lo afirmen o nieguen.
- *Verdaderas* o *Falsas* según correspondan o no a la realidad.

Ejemplos.

h: "Ana come pizza y bebe refresco", es una proposición compuesta, cerrada y afirmativa.
j: "Ella no nada muy rápido", es una proposición simple, abierta y negativa.
k: "Cuernavaca no está al norte del D.F. y no hace frío", es una proposición compuesta, cerrada, negativa y verdadera.
l: $7+3=10$ es una proposición simple, cerrada, afirmativa y verdadera.
m: $x^2 \neq x-2$ es una proposición simple, abierta y negativa.
n: $a+b=6$ es una proposición compuesta, abierta y afirmativa.

CONECTIVOS LÓGICOS EN PROPOSICIONES COMPUESTAS

Existen conectivos u operadores lógicos que permiten formar proposiciones compuestas, es decir, formadas por varias proposiciones. Los operadores o conectores básicos son:

- *Conjunción* (operador *and*)

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Se le conoce como multiplicación lógica y su símbolo es $\wedge$ (and).

Ejemplo.
Sea el siguiente enunciado: "Voy al cine cuando hay una buena película y cuando tengo dinero "
Sean:
p: Voy al cine.
q: Hay una buena película.
r: Tengo dinero.
De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es como sigue:
p = **q**$\wedge$**r**

Su tabla de verdad es como sigue:

q	**r**	**p$\wedge$r**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Donde.
1 = verdadero
0 = falso

En la tabla anterior el valor de **q**=1 significa que hay una buena película, **r**=1 significa que tengo dinero y **p**=**q**$\wedge$**r**=1 significa que voy ir al cine. Se puede notar que con cualquiera de las dos proposiciones que valga cero implica que no asisto al cine.

- *Disyunción* (operador *or*)

Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera. Se conoce como suma lógica y su símbolo es $\vee$ (or).

Ejemplo.
Sea el siguiente enunciado: "Para ir a Toluca puedo tomar la carretera federal o tomar la autopista de cuota"
Sean:
p: Ir a Toluca.
q: Tomar la carretera federal.
r: Tomar la autopista de cuota.

q	**r**	**p$\vee$r**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

En la tabla anterior el valor de **q**=1 significa tomar la carretera federal, **r**=1 significa tomar la autopista de cuota y **p**=**q**$\vee$**r**=1 significa ir a Toluca. Se puede notar que con cualquiera de las dos proposiciones que valga uno implica que llego a Toluca.

- *Negación* (operador *not*)

Su función es *negar* la proposición. Esto significa que sí alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador not se obtendrá su negación (falso) y viceversa. Este operador se indica por medio del símbolo **'**.

Ejemplo.
Sea el siguiente enunciado: “El león es el rey de la selva”
Sean:
p: El león es el rey de la selva.
p': El león no es el rey de la selva.

Su tabla de verdad es como sigue:

p	p'
1	0
0	1

En la tabla anterior el valor de **p**=1 significa que el león es el rey de la selva, y **p**=0 significa que el león no lo es[1].

Ejemplo.
Sean las proposiciones:
p: Ya es tarde.
q: Tengo que dormirme.
r: Me levantaré temprano.
El enunciado: "Ya es tarde y tengo que dormirme o no me levantaré temprano”. Se puede representar simbólicamente de la siguiente manera: **p**$\wedge$**q**$\vee$**r'**

PROPOSICIONES CONDICIONALES

Una *implicación* o proposición *condicional*, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) p y q. Se indica de la siguiente manera:

p$\rightarrow$**q** (se lee "si **p** entonces **q**")

Ejemplo.
Un profesionista dice "Si ahorro me podré comprar una casa en tres años ". Una declaración como esta se conoce como condicional.
Sean:
p: Ahorro.
q: Podrá comprar una casa en tres años .
De tal manera que el enunciado se puede expresar como: **p**$\rightarrow$**q**
Su tabla de verdad es de la siguiente manera:

[1] Además de los operadores básicos (And, Or y Not) existe el operador Xor, cuyo funcionamiento es semejante al operador Or con la diferencia de que su resultado es verdadero solamente si una de las proposiciones es cierta, y cuando ambas son verdad, el resultado es falso. Por otro lado, con ayuda de los operadores básicos se pueden formar los operadores compuestos Nand (combinación de los operadores Not y And), Nor (combina operadores Not y Or) y Xnor (resultado de Xor y Not).

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:
Analizando si el profesionista mintió con la afirmación del enunciado anterior: Cuando **p**=1 significa que ahorró y **q**=1 que se compró la casa en tres años, por lo tanto **p**→q =1 (el profesionista dijo la verdad). Cuando **p**=1 y **q**=0 significa que **p**→**q** =0, el profesionista mintió, ya que ahorró y no se compró la casa. Cuando **p**=0 y **q**=1 significa que aunque no ahorró se compró la casa (ya tenía los recursos), así que no mintió, de tal forma que **p**→**q** =1. Cuando **p**=0 y **q**=0 se interpreta que aunque no ahorró tampoco se compró la casa, por lo tanto **p**→**q** =1 ya que tampoco mintió.

PROPOSICIÓN BICONDICIONAL

Sean **p** y **q** dos proposiciones. Una *doble implicación* o proposición es *bicondicional* cuando **p** es verdadera si y solo si **q** es también verdadera. O bien **p** es falsa si y sólo si **q** también lo es. Se indica de la siguiente manera:

p↔**q** (se lee "**p** si y sólo si **q**")

Ejemplo.
Sea el siguiente enunciado: "Una persona puede votar, si y sólo si, tiene credencial de elector"
Donde:
p: Una persona puede votar.
q: Tiene credencial de elector.
Su tabla de verdad es.

p	q	p↔q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:
Cuando **p**=1 significa que una persona puede votar y **q**=1 que tiene credencial, al ser esto cierto, **p**→q =1. Cuando **p**=1 y **q**=0 significa que **p**→**q** =0, una persona puede no votar, ya que no posee la credencial. Cuando **p**=0 y **q**=1 significa que una persona no puede votar aunque tenga credencial (por ejemplo los residentes en el extranjero), esto es que **p**→**q** =0. Cuando **p**=0 y **q**=0 se interpreta como que ni puede votar ni tiene credencial, por lo tanto es cierto **p**→**q** =1.

Ejemplo.
Representar simbólicamente el enunciado: "Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y Si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y Si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si y sólo si soy desorganizado"

Solución
p: Pago la luz.
q: Me cortarán la corriente eléctrica.
r: Me quedaré sin dinero.
s: Pediré prestado.
t: Pagar la deuda.
w: Soy desorganizado.

$$(p'\rightarrow q)\wedge[p\rightarrow(r\vee s)]\wedge[(r\wedge s)\rightarrow t']\leftrightarrow w$$

El número de líneas de la tabla de verdad depende del número de variables de la expresión y se puede calcular por medio de la siguiente formula.

No de líneas = 2^n

donde n es el número de variables distintas.

Ejemplo.
Dada la siguiente proposición: [(**p**→**q**)∨(**q**'∧**r**)]↔(**r**→**q**).
elaborar su tabla de verdad.

Solución.

p	**q**	**r**	**q**'	**p→q**	(**q**'∧**r**)	(**p**→**q**)∨ (**q**'∧**r**)	**r→q**	[(**p**→**q**)∨(**q**'∧**r**)]↔(**r**→**q**)
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

TAUTOLOGÍA, EQUIVALENCIA Y CONTRADICCIÓN

Tautología es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es la proposición *contrapositiva* cuya tabla de verdad se indica a continuación.

p	**q**	**p'**	**q**'	**p→q**	**q'→p'**	(**p**→**q**)↔(**q**'→**p**')
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Nótese que en las tautologías para todos los valores de verdad el resultado de la proposición es siempre uno. Las tautologías son muy importantes en Lógica Matemática ya que se consideran leyes en las cuales se puede apoyar para realizar demostraciones.

Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente *equivalentes*. Si coinciden sus resultados para los mismo valores de verdad. Se indican como **p**≡**q**.

En el ejemplo anterior, se puede observar que las columnas de (**p**→**q**) y (**q**'→**p**') son iguales para los mismos valores de verdad, por lo tanto se puede establecer que (**p**→**q**) ≡ (**q**'→**p**')

Contradicción es aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, una de las mas usadas y mas sencilla es **p**∧**p**' . Como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	**p'**	**p∧p**'
0	1	0
1	0	0

Ejemplo.
Si se tiene **p**: "El coche es verde", la proposición $\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}'$ equivale a decir que "El coche es verde y el coche no es verde". Por lo tanto se esta contradiciendo, es decir, es una *falacia***.**

LEYES NOTABLES EN LÓGICA

Las leyes de lógica más notables son las que se enlistan a continuación:

1.- Ley de doble negación

$\mathbf{p}'' \leftrightarrow \mathbf{p}$

2.- Leyes de idempotencia

$(\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \leftrightarrow \mathbf{p}$
$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \leftrightarrow \mathbf{p}$

3.- Leyes asociativas

$[(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r}] \leftrightarrow [\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})]$
$[(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r}] \leftrightarrow [\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})]$

4.- Leyes conmutativas

$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \leftrightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \leftrightarrow (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})$
$(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) \leftrightarrow (\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p})$

5.- Leyes distributivas

$[\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})] \leftrightarrow [(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})]$
$[\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})] \leftrightarrow [(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee (\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})]$

6.- Leyes de De Morgan

$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})' \leftrightarrow (\mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}')$
$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})' \leftrightarrow (\mathbf{p}' \vee \mathbf{q}')$

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Todo enunciado puede ser planteado en términos de teoremas. Un teorema por lo general es resultado de un planteamiento de un problema, que normalmente presenta el siguiente formato:

$$(\mathbf{p_1} \wedge \mathbf{p_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p_n}) \rightarrow \mathbf{q}$$

Como se establece $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}, \cdots \mathbf{p_n}$ son hipótesis (o premisas) derivadas del mismo problema y que se consideran válidas. Pero además deberán conectarse con el operador And ($\wedge$), lo cual implica que $\mathbf{p_1}$ es cierta y ($\wedge$) $\mathbf{p_2}$ es verdad y ($\wedge$)...... y $\mathbf{p_n}$ también es cierta entonces ($\rightarrow$) la conclusión (**q**) es cierta. Para realizar la demostración formal del teorema se deberá partir de las hipótesis, y después obtener una serie de pasos que también deben ser válidos, ya que son producto de reglas de inferencia. Sin embargo no solamente las hipótesis y reglas de inferencia pueden aparecer en una demostración formal, sino también tautologías conocidas. En el teorema anterior cada uno de los pasos $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}, \cdots \mathbf{p_n}$ son escalones que deberán alcanzarse hasta llegar a la solución.

Lo mismo ocurre con todo tipo de problemas que se nos presentan en la vida, antes de llegar a la solución debemos alcanzar ciertas metas ($\mathbf{p_1, p_2, p_3, \cdots p_n}$) hasta llegar al objetivo o conclusión (**q**). Pero una vez que se logra el objetivo se deben plantear nuevos objetivos que permitan la superación.

Los métodos de demostración más conocidos son los siguientes:

- *Demostración por el método directo*

El método de demostración directa parte de la proposición **p**, que se supone verdadera, y deducir de ella una nueva proposición **q** que se pueda ver que es verdadera como resultado de que **p** lo es. Es importante resaltar que las proposiciones deducidas de **p** no deben ser hechas de cualquier modo, deben estar enfocadas hacia la última proposición obtenida.

El camino que se debe seguir para llevar a cabo una demostración formal usando el método directo significa que si se sabe que $\mathbf{p_1}$ es verdadera, $\mathbf{p_2}$ es verdadera,..., y $\mathbf{p_n}$ también es verdadera, entonces se sabe que **q** es verdadera.

Prácticamente todos los teoremas matemáticos están compuestos por implicaciones del tipo:

$$(\mathbf{p_1} \wedge \mathbf{p_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p_n}) \rightarrow \mathbf{q}$$

donde las $\mathbf{p_i}$ son llamadas hipótesis o premisas, y **q** es llamada conclusión. "Demostrar el teorema", es demostrar que la implicación es una tautología. Nótese que no se trata de demostrar que **q** (la conclusión) es verdadera, sino solamente que **q** es verdadera si todas las $\mathbf{p_i}$ son verdaderas.

- *El método de demostración indirecta*

El método de demostración indirecta consiste en proceder al revés. Se fija la atención primeramente en **q**, es decir en la afirmación a la que se quiere llegar.

Ubicada la premisa **p**, se va tratando de buscar situaciones intermedias $\mathbf{p_1, p_2, p_3, \cdots p_n}$ de las que **q** se podría deducir. Se identifica si alguna de estas podría estar relacionada con la situación **p**, se podría deducir de ella. Cuando se encuentra, se verifica que el camino inverso que se ha encontrado, ahora de **p** a **q**, es correcto.

- *Método de demostración por reducción al absurdo*

En el método de demostración de reducción al absurdo, se debe empezar suponiendo que **p** es verdadera, al igual que se hacía en el método de demostración directa. Ahora, sin embargo, para llegar a la conclusión buscada, a saber, que **q** es verdadera se puede proceder haciendo una pregunta muy simple: “¿Por qué no puede **q** ser falsa?”. Después de todo, si **q** tiene que ser verdadera, debe haber alguna razón por la que no pueda ser falsa. El objetivo del método de demostración por reducción al absurdo es, precisamente, descubrir esa razón. La idea es suponer que **p** es verdadera y **q** falsa y ver que no puede ocurrir esto.

En la práctica la demostración por reducción al absurdo inicia considerando como hipótesis **q**’ y finaliza cuando el proceso de demostración obtiene dos proposiciones que se contradicen una a la otra.

Ejemplo.
Demostrar por reducción al absurdo que la raíz cuadrada de un número natural es natural o irracional.

Solución.
Sean los números naturales A y B primos entre sí con $B \neq 1$

Suponiendo un número racional de la forma $\sqrt{n} = \frac{A}{B}$

Si se eleva al cuadrado: $n = \frac{A^2}{B^2}$

Resulta un absurdo puesto que el miembro izquierdo es natural y el miembro derecho es racional e irreducible. Por lo tanto la raíz cuadrada de un número natural no es racional.

- *La demostración por contraposición*

El método de la demostración por contraposición, tiene la ventaja de que se va a dirigir hacia una contradicción concreta. En la demostración por contraposición, al igual que la demostración por reducción al absurdo, se supone que tanto **p** como **q’** son verdaderas. En el método por contraposición, sin embargo, no se parte de **p** y **q’**, sino que se empieza a trabajar solamente con **q’** y el objetivo es llegar a que **p** es falsa, con lo que ya se ha llegado a una contradicción ¿qué mejor contradicción? ¿cómo puede ser **p** a la vez verdadera y falsa?