ECUACIÓN CUADRÁTICA

ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA
ECUACIONES CUADRÁTICAS CON RAÍCES IMAGINARIAS

ING. JOSÉ ALFONSO ALVARADO. C.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Análisis de la Ecuación Cuadrática

De la Fórmula general que utilizamos para resolver cualquier ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión $b^2 - 4ac$ se le conoce como **discriminante** «**Δ**» y es lo que analizaremos a continuación.

Discriminante de la Ecuación Cuadrática

El discriminante de la ecuación de segundo grado tiene el siguiente símbolo matemático: «Δ» y está relacionado directamente con la fórmula general. La fórmula del discriminante se representa así:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Estudiamos el discriminante de la ecuación de segundo grado porque de él dependerá cómo será la naturaleza de los valores de las raíces de una ecuación cuadrática.

Antes, veamos un ejemplo para calcular el discriminante de una ecuación cuadrática:

Discriminante de la Ecuación Cuadrática

Ejemplo:

Hallar el discriminante de la ecuación:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Resolución:

Identificamos los valores de los coeficientes de la ecuación, tenemos:
$a = 2$, $b = -3$, $c = 1$;

Reemplazando en:

Discriminante de la Ecuación Cuadrática

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1)$$

$$\Delta = 9 - 8$$

$$\Delta = 1$$

Análisis del Discriminante

Se analiza el discriminante de la ecuación cuadrática para conocer como serán las raíces de dicha ecuación.

Una ecuación de segundo grado tiene dos raíces.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$$

Sean las raíces de la ecuación: x_1 y x_2 y el $\Delta = b^2 - 4ac$.

Se obtienen los siguientes casos:

Análisis del Discriminante

i) Primer Caso ($\Delta > 0$):

» Las raíces son reales y diferentes.
» Entonces: $x_1 \neq x_2$.

ii) Segundo Caso ($\Delta = 0$):

» Las raíces son reales e iguales.
» Se le conoce como **solución única**
» Se cumple que: $x_1 = x_2 = -b/2a$

Análisis del Discriminante

iii) Tercer Caso ($\Delta < 0$):

» Las raíces x_1 y x_2 no son Reales, son Imaginarias(complejas) y Conjugadas.

» Se sabe que **i** es la unidad imaginaria.

» **Teorema: $i^2 = -1$**; $i = \sqrt{-1}$ (teorema de Euler).

Ecuaciones Cuadráticas con Raíces Imaginarias

Sabemos que la solución de una ecuación cuadrática **$ax^2 + bx + c = 0$**, en donde a, b y c, con $a \neq 0$, es:

$x_1 = [-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$

$x_2 = [-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$

Además, sabemos que si el discriminante "$b^2 - 4ac \geq 0$" la solución está formada por números reales.

Pero cuando "$b^2 - 4ac < 0$", no hay solución en números reales, sino dos soluciones que incluyen **números imaginarios** y que satisfacen la ecuación dada.

Ecuaciones Cuadráticas con Raíces Imaginarias

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación cuadrática $2x^2 – 2x + 5 = 0$.

Los coeficientes son:

$$a = 2;\ b = – 2 \text{ y } c = 5$$

Sustituimos los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$x= [– b \pm \sqrt{(b^2 – 4ac)}] / 2a$$

$$x= \{ – (- 2) \pm \sqrt{[(-2)^2 – 4(2)(5)]} \} / 2(2)$$

Ecuaciones Cuadráticas con Raíces Imaginarias

Resolvemos

$$x = \{ 2 \pm \sqrt{[(-2)^2 - 4(2)(5)]} \} / 2(2)$$

$$x = [2 \pm \sqrt{-36}] / 4$$

Recordando que $i = \sqrt{-1}$, tenemos:

$$x = [2 \pm (\sqrt{36} \cdot \sqrt{-1})] / 4 = (2 \pm 6i) / 4$$

$$x_1 = (2 + 6i) / 4$$

$$x_2 = (2 - 6i) / 4$$

Ecuaciones Cuadráticas con Raíces Imaginarias

$$2x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{2 + 6i}{4} \qquad x_2 = \frac{2 - 6i}{4}$$

Raíces imaginarias

Ecuaciones Cuadráticas con Raíces Imaginarias

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 25 = 0$.

Los coeficientes son:

$$a = 1;\ b = -6 \text{ y } c = 25$$

Sustituimos los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$$

$$x = \{-(-6) \pm \sqrt{[(-6)^2 - 4(1)(25)]}\} / 2(1)$$

Ecuaciones Cuadráticas con Raíces Imaginarias

Resolvemos

$$x = [\, 6 \pm \sqrt{-64}\,] / 2$$

Recordando que $i = \sqrt{-1}$, tenemos:

$$x = [\, 6 \pm (\sqrt{64} \cdot \sqrt{-1})\,] / 2 = (6 \pm 8i) / 2$$

$$x_1 = (6 + 8i) / 2 = 3 + 4i$$

$$x_2 = (6 - 8i) / 2 = 3 - 4i$$