

Razonamiento; Demostración

ING. JOSÉ ALFONSO ALVARADO C.



Unach
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
Libros por la Ciencia y el Saber

RAZONAMIENTO

El razonamiento proposicional es un tipo de pensamiento deductivo que va de lo general a lo particular.

Es proposicional porque se realiza sobre situaciones en las que se maneja el cálculo proposicional, que se efectúa mediante las relaciones entre proposiciones y partículas de unión.

Este tipo de cálculo proposicional se utiliza para representar el conocimiento y las operaciones de transformación que se produzcan.

RAZONAMIENTO

Ejemplos:

1. Todos los perros son mamíferos; Fido es un perro por lo tanto Fido es mamífero → A las primeras dos sentencias es posible asignarles un valor de verdad, y a partir de estas dos proposiciones llegamos a una conclusión.

2. Todas las aves vuelan, los pingüinos son aves por lo tanto los pingüinos vuelan → El razonamiento anterior es válido; el cálculo proposicional no analiza si la conclusión es verdadera o falsa, tan solo que la construcción sea válida y la anterior lo es, aunque la conclusión sea falsa.

DEMOSTRACIÓN

Todo enunciado puede ser planteado en términos de teoremas. Un teorema por lo general es resultado de un planteamiento de un problema, que normalmente presenta el siguiente formato:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

Como se establece $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ son hipótesis (o premisas) derivadas del mismo problema y que se consideran válidas. Pero además deberán conectarse con el operador \wedge , lo cual implica que p_1 es cierta y $(\wedge) p_2$ es verdad y $(\wedge) \dots$ y p_n también es cierta entonces (\rightarrow) la conclusión (q) es cierta.

Para realizar la demostración formal del teorema se deberá partir de las hipótesis, y después obtener una serie de pasos que también deben ser válidos, ya que son producto de reglas de inferencia.

Sin embargo no solamente las hipótesis y reglas de inferencia pueden aparecer en una demostración formal, sino también tautologías conocidas.

DEMOSTRACIÓN

En el teorema anterior cada uno de los pasos $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ son escalones que deberán alcanzarse hasta llegar a la solución.

Lo mismo ocurre con todo tipo de problemas que se nos presentan en la vida, antes de llegar a la solución debemos alcanzar ciertas metas ($p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$) hasta llegar al objetivo o conclusión (q).

Pero una vez que se logra el objetivo se deben plantear nuevos objetivos que permitan la superación.

DEMOSTRACIÓN

Método Directo:

El método de demostración directa parte de la proposición p , que se supone verdadera, y deducir de ella una nueva proposición q que se pueda ver que es verdadera como resultado de que p lo es.

Es importante resaltar que las proposiciones deducidas de p no deben ser hechas de cualquier modo, deben estar enfocadas hacia la última proposición obtenida.

El camino que se debe seguir para llevar a cabo una demostración formal usando el método directo significa que si se sabe que p_1 es verdadera, p_2 es verdadera,..., y p_n también es verdadera, entonces se sabe que q es verdadera

DEMOSTRACIÓN

Método Directo:

Prácticamente todos los teoremas matemáticos están compuestos por implicaciones del tipo: $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ donde las p_i son llamadas hipótesis o premisas, y q es llamada conclusión.

"Demostrar el teorema", es demostrar que la implicación es una tautología.

Nótese que no se trata de demostrar que q (la conclusión) es verdadera, sino solamente que q es verdadera si todas las p_i son verdaderas.

DEMOSTRACIÓN

Método Indirecto:

El método de demostración indirecta consiste en proceder al revés.

Se fija la atención primeramente en q , es decir en la afirmación a la que se quiere llegar.

Ubicada la premisa p , se va tratando de buscar situaciones intermedias $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ de las que q se podría deducir.

Se identifica si alguna de estas podría estar relacionada con la situación p , se podría deducir de ella.

Cuando se encuentra, se verifica que el camino inverso que se ha encontrado, ahora de p a q , es correcto.

DEMOSTRACIÓN

Método Reducción de Absurdo:

En el método de demostración de reducción al absurdo, se debe empezar suponiendo que p es verdadera, al igual que se hacía en el método de demostración directa. Ahora, sin embargo, para llegar a la conclusión buscada, a saber, que q es verdadera se puede proceder haciendo una pregunta muy simple: “¿Por qué no puede q ser falsa?”.

Después de todo, si q tiene que ser verdadera, debe haber alguna razón por la que no pueda ser falsa.

El objetivo del método de demostración por reducción al absurdo es, precisamente, descubrir esa razón. La idea es suponer que p es verdadera y q falsa y ver que no puede ocurrir esto. En la práctica la demostración por reducción al absurdo inicia considerando como hipótesis q' y finaliza cuando el proceso de demostración obtiene dos proposiciones que se contradicen una a la otra.

DEMOSTRACIÓN

Método Reducción de Absurdo:

Ejemplo. Demostrar por reducción al absurdo que la raíz cuadrada de un número natural es natural o irracional.

Solución. Sean los números naturales A y B primos entre sí con $B \neq 1$

Suponiendo un número racional de la forma $\sqrt{n} = \frac{A}{B}$

Si se eleva al cuadrado: $n = \frac{A^2}{B^2}$

Resulta un absurdo puesto que el miembro izquierdo es natural y el miembro derecho es racional e irreducible. Por lo tanto la raíz cuadrada de un número natural no es racional.

DEMOSTRACIÓN

Método por Contraposición:

El método de la demostración por contraposición tiene la ventaja de que se va a dirigir hacia una contradicción concreta.

En la demostración por contraposición, al igual que la demostración por reducción al absurdo, se supone que tanto p como q' son verdaderas.

En el método por contraposición, sin embargo, no se parte de p y q' , sino que se empieza a trabajar solamente con q' y el objetivo es llegar a que p es falsa, con lo que ya se ha llegado a una contradicción ¿qué mejor contradicción? ¿cómo puede ser p a la vez verdadera y falsa?