Lógica Matemática

Ing. José Alfonso Alvarado C.

Introducción

La lógica estudia la forma del razonamiento, es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un argumento es válido.

La lógica es ampliamente aplicada en la filosofía, matemáticas, computación, física.

En la filosofía para determinar si un razonamiento es válido o no, ya que una frase puede tener diferentes interpretaciones, sin embargo la lógica permite saber el significado correcto.

En las matemáticos para demostrar teoremas e inferir resultados matemáticas que puedan ser aplicados en investigaciones.

En general la lógica se aplica en la tarea diaria, ya que cualquier trabajo que se realiza tiene un procedimiento lógico, por el ejemplo; Si una persona desea pintar una pared, este trabajo tiene un procedimiento lógico, ya que no puede pintar si antes no prepara la pintura, o no debe pintar la parte baja de la pared si antes no pintó la parte alta porque se mancharía lo que ya tiene pintado, también dependiendo si es zurdo o derecho, él puede pintar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda según el caso, todo esto es la aplicación de la lógica

Proposición

Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez.
Toda proposición consta de tres partes: un sujeto, un verbo y un complemento referido al verbo.
La proposición es un elemento fundamental de la Lógica Matemática.
A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica el porqué algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha.

Ejemplos.
p: Ecuador se encuentra en Europa.
q: $16-6 = 10$
r: $2x - 3 > 7$
s: Los precios de los autos bajarán a fin de año.
t: Hola ¿cómo te llamas?
w: ¡Has tu tarea!

Proposición

Los enunciados p y q pueden tomar un valor de falso o verdadero, por lo tanto, son proposiciones validas.

El inciso r también es una proposición valida, aunque el valor de falso o verdadero depende del valor asignado a la variable x en determinado momento.

La proposición del inciso s también esta perfectamente expresada aunque para decir si es falsa o verdadera se tendría que esperar a que terminara el año.

Sin embargo, los enunciados t y w no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es un saludo y el otro es una orden

Notación

Para denotar proposiciones se utilizan letras minúsculas tales como p, q, r, s, t, u, etc., seguidas de dos puntos (:); el enunciado se escribe entre comillas dobles (“ ”).

Ejemplo : denote las siguientes proposiciones
p: “La ciudad de Medellín es la capital del departamento de Antioquia”
q: “4+2x=3 con x=- 0.5”
r: ”El número 3 es primo”
s: “El sol es un astro”
t: “las estrellas son planetas”
u: “Barranquilla es capital de Quindío”

Proposiciones Simples

Son aquellas que no tienen oraciones compuestas afectadas por negaciones ("no") o términos de enlace como conjunciones ("y"), disyunciones ("o") o implicaciones ("si . . . entonces").

Pueden aparecer términos de enlace en el sujeto o en el predicado, pero no entre oraciones compuestas.

Ejemplos:

p: “Quito es la capital de Ecuador”

q: “Albert Einstein es el creador de la teoría de la relatividad”

r: “Napoleón fue rey de Francia”

s: “2+2=5”

t: “3<5”

Proposiciones Compuestas

Son aquellas que tienen oraciones compuestas afectadas por negaciones ("no") o términos de enlace como conjunciones ("y"), disyunciones ("o") o implicaciones ("si . . . entonces").

Ejemplos:
p: “Verónica es venezolana”
q: “Verónica nació en Caracas”
r: “Verónica es mayor de edad”
s: “Hoy llueve”
t: “Hoy hace sol”
u: “Hoy llevo paraguas”

Verónica es Venezolana **y** nación en Caracas **y** es mayor de edad $(p \wedge q \wedge r)$
Hoy llueve **o** hace sol $(s \vee t)$
Hoy llueve **y** llevo paraguas **o** hace sol **y no** llevo paraguas $((s \wedge u) \vee (t \wedge \neg u))$

Valor de Verdad

Al hacer referencia al posible valor de verdad o falsedad que pueda tener una fórmula estamos admitiendo un principio, el **principio de bivalencia**: todo enunciado es o verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez.

Si una proposición es verdadera, se dirá que tiene valor de verdad positivo; si es falsa, negativo.
El criterio que se adopta para atribuir valor de verdad o falsedad a una proposición simple, no es, según Wittgenstein, un problema de análisis lógico, sino un problema de experiencia.
Si lo enunciado en una proposición está conforme con los hechos, la proposición es verdadera, de lo contrario es falsa.
Un segundo principio de la lógica bivalente es, aquel que mantiene que el valor de verdad de las proposiciones compuestas depende del valor de verdad de las proposiciones simples que la forman.
En este sentido podemos decir que las fórmulas compuestas son también funciones de verdad o funciones veritativas, ya que los valores que adoptan son valores de verdad.

Para determinar el valor de verdad de una proposición molecular, independientemente de los valores de sus componentes, existe un procedimiento mecánico: **las tablas de verdad**

Tablas de Verdad

Para construir las tablas de verdad hemos de tener en cuenta el número de filas con valor de verdad V= 1 y de falsedad F= 0, de los que ha de constar la tabla; el número de filas se rige por la siguiente formula 2n,

donde n = al número de variables proposicionales de la fórmula dada.

Así, para una sola variable p, la tabla sería $2^1 = 2$ filas, es decir:

P
1
0

Tablas de Verdad

Esto que acabamos de decir se refiere al valor de verdad o falsedad de las variables que componen una fórmula.

Pero, en las proposiciones moleculares, estas variables van unidas por conectivas, las cuales al relacionar los valores de las variables producen un resultado o función.

Por ejemplo: la unión de p, q, mediante el conjuntor da lugar a una función veritativa:

p	^	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

Formalización de los enunciados

La formalización es la traducción de proposiciones dadas en lenguaje ordinario a fórmulas lógicas bien formadas

Para Redmon (1) una regla empírica para formalizar desde el lenguaje ordinario al simbolismo lógico es: traduzca el sentido, no las palabras. La finalidad es que la oración-proposición del lenguaje ordinario y la fórmula lógica expresen el mismo sentido, es decir, que la fórmula lógica represente de la manera más fiel posible lo que la oración quiere decir

Formalización de los enunciados simples

Sabemos que toda oración está compuesta por sujeto y predicado.

Por ejemplo, en la oración Napoleón es emperador de Francia, Napoleón es el sujeto y es emperador de Francia es el predicado.

En la oración Andrés es futbolista, el sujeto es Andrés y el predicado es futbolista.

En la oración Juan se enfermó, el sujeto es Juan y se enfermó es el predicado. Todas estas oraciones afirman un sólo hecho, es decir, son proposiciones simples. Este tipo de proposiciones simples pueden formalizarse con la codificación Ps, donde P es el predicado y s el sujeto.

Es decir, Napoleón es emperador de Francia se codifica como En (que se lee emperador Napoleón), Andrés es futbolista se formaliza como Fa (que se lee futbolista Andrés), y Juan se enfermó, se formaliza como Ej (que se lee enfermó Juan).

Formalización de los enunciados compuestos

Aquellas oraciones donde aparece al menos un conectivo lógico implica que se formalizarán como proposiciones compuestas.
En este caso, es común representar cada proposición simple o atómica por una letra minúscula, y relacionarlas entre si por el conectivo adecuado.

Por ejemplo: Napoleón no es emperador de Francia. Sea p = Napoleón es emperador de Francia. Por tanto Napoleón no es emperador de Francia se codifica como ~p.

Otro ejemplo: Andrés es futbolista y Juan se enfermó. En este caso, sea p = Andrés es futbolista y q = Juan se enfermó. La proposición compuesta es: $p \wedge q$.