TABLA DE VERDAD

Una tabla de verdad corresponde a un arreglo rectangular conformado por una o más proposiciones y todas las posibles combinaciones de verdad que se pueden definir de la proposición dada. Esto es, un conjunto de combinaciones de valores de verdad correspondientes a una proposición.

El resultado definitivo de una proposición compuesta corresponde al valor del conectivo lógico principal de la proposición y se obtiene a partir de los valores parciales de las proposiciones que la conforman. Se utilizan para comprobar la verdad o falsedad de las proposiciones.

El cantidad de combinaciones de verdad de una proposición depende del número de proposiciones simples que la componen y se calcula mediante la expresión $2\boldsymbol{n}$ con n=número de proposiciones simples. En efecto, si n es 1, se tienen dos posibles valores de verdad; si se tienen 2 proposiciones se producen 4 posibles valores de verdad; si se tienen 3 proposiciones, entonces serían 8 las posibles combinaciones de verdad si se tienen 4 proposiciones, entonces serían 16 las posibles combinaciones de verdad y así sucesivamente (vea tabla 1.1)

4.8 Notación de proposiciones

Para denotar proposiciones se utilizan letras minúsculas tales como p, q, r, s, t, u, etc., seguidas de dos puntos (:); el enunciado se escribe entre comillas dobles (“ ”).

Ejemplo 4.8: denote las siguientes proposiciones

. p: “La ciudad de Medellín es la capital del departamento de Antioquia”

. q: “4+2x=3 con x=- 0.5”

r: ”El número 3 es primo”

. s: ”El sol es un astro”

. t: “las estrellas son planetas”

. u: “Barranquilla es capital de Quindío”

4.9 Conectores Lógicos

Los conectores lógicos son símbolos que se utilizan para conectar dos o más proposiciones y formar otras proposiciones más complejas; se clasifican en conectivos lógicos fundamentales, como $\neg$, la negación (no); $\wedge$, la conjunción (y); **v**, la disyunción (o) y conectivos lógicos derivados, tales como: $\rightarrow$, el condicional (si ..., entonces . . .); $\oplus$, disyunción exclusiva (o exclusiva); anti-disyunción y anti-conjunción y $\leftrightarrow$, el bicondicional (. . . si y solo si . . .) también conocida como anti-disyunción exclusiva.

4.9.1 Conectivos lógicos fundamentales

La negación o NO. Sea p una proposición cualquiera; la negación de p (no p) se escribe **¬p** y se lee "no p". Su valor de verdad consiste en cambiar el valor de verdad de p (vea tabla 1.2).

p	¬p
F	V
V	F

Tabla 4.2: valor de verdad de la negación

La conjunción o AND. La tabla de verdad del conectivo lógico de la conjunción fue descubierta por el matemático y logicista inglés nacido en la India, Augustus De Morgan (1806 - 1871).

Sean p, q proposiciones cualesquiera; la conjunción de dos proposiciones (p, q) denotada $\mathbf{p \wedge q}$ se lee "p y q". A veces se puede interpretar como la palabra "**pero**". Por ejemplo, $p \wedge \neg q$ que se puede leer: "p pero no q".

La conjunción es verdadera si todas las proposiciones simples que la conforman son verdaderas y falsa si alguna de ellas es falsa (vea tabla 1.3).

La disyunción u OR. La tabla de verdad de este conectivo lógico fue descubierta por el economista, filósofo y logicista inglés, William Stanley Jevons (1835 - 1882).

Se conoce como disyunción inclusiva que se define así: sean p, q proposiciones cualesquiera; la disyunción de dos proposiciones (p, q) denotada $\mathbf{p \vee q}$ que se lee "p o q"

es verdadera si alguna de las proposiciones simples que la conforman es verdadera y falsa si todas ellas son falsas (vea tabla 1.3)

4.9.2 Conectivos lógicos derivados

A partir de los conectivos lógicos fundamentales se definen otros muy importantes en el argot de la lógica; son ellos: el condicional, el bicondicional, la disyunción exclusiva, antidisyunción, anticonjunción, antidisyunción exclusiva.

El condicional. Sean p, q proposiciones cualesquiera; llámese p antecedente y q consecuente; el condicional de p y q se denota $\mathbf{p \rightarrow q}$ y se lee "si p entonces q". El condicional es falso si p es verdadera y q es falsa; en los demás casos, el condicional es verdadero (véase tabla 1.3). Algunas veces en el lenguaje ordinario[1] el condicional se utiliza con las palabras "como" o "cuando", así:

"como p, entonces q".

"cuando p, entonces q"

Si $\mathbf{p \rightarrow q}$ es verdadero se dice que "**p** implica a **q"** y se denota $\mathbf{p \Rightarrow q}$

El condicional "si p entonces q" puede leerse o interpretarse como:

p es suficiente para q
q es necesario para p
Solo si q, se da p
p, solo si q

Ejemplo 4.9: Un hombre le prometió a su novia: "me casaré contigo solo si consigo trabajo". El hombre consiguió trabajo, pero rehusó a casarse con ella. Ella lo demandó por romper la promesa. ¿La novia pudo ganar lógicamente la demanda? ¿Por qué?.2

Solución: no, porque la promesa del hombre fue la recíproca del condicional. En efecto, veamos su análisis.

Las proposiciones fueron: p: "me casaré contigo" y q: "consigo trabajo"
La promesa fue: $p \rightarrow q$, que se lee lógicamente: "p solo si q". Mas la novia interpretaba: $q \rightarrow p$: si consigo trabajo me casaré contigo.

Las siguientes expresiones son variantes del condicional $p \rightarrow q$

Recíproco: $q \rightarrow p$
Contrario: $\neg p \rightarrow \neg q$
Contra-recíproco: $\neg q \rightarrow \neg p$ [3]

Disyunción exclusiva

Disyunción exclusiva. Fue descubierto por el matemático y filósofo británico, George Boole (1815-1864). Sean p, q proposiciones cualesquiera; la disyunción exclusiva también llamada XOR de p y de q se denota $p \oplus q$ es verdadera si los valores de verdad de las proposiciones son contrarios (véase tabla 1.3). Es lógicamente equivalente a la negación del bicondicional. Este conectivo definido con conectivos fundamentales queda como sigue: $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$. Compruebe esta equivalencia.

Bicondicional. Fue descubierto por matemático, lógico y filósofo alemán, Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 - 1925); fundador de la moderna lógica matemática y la filosofía analítica; considerado el mayor lógico desde Aristóteles.

Sean p, q proposiciones cualesquiera; el bicondicional de las proposiciones p y q denotado $\mathbf{p \leftrightarrow q}$ y se lee "p si y solo si q". El bicondicional es verdadero si las proposiciones que la conforman toman el mismo valor de verdad y falsa si los valores son contrarios (véase tabla 4.3).

El bicondicional es lógicamente equivalente a $(\mathbf{p \rightarrow q}) \wedge (\mathbf{q \rightarrow p})$ y a $(\mathbf{\neg p \vee q}) \wedge (\mathbf{\neg q \vee p})$

Si $p \leftrightarrow q$ es verdadero se dice que p es equivalente a q que se denota $p \Leftrightarrow q$. Así que, una falsedad es equivalente a otra falsedad, una verdad es equivalente a otra verdad.

Este conectivo también se denomina comparador o antidisyunción exclusiva como se verá más adelante (véase la sección 4.8).

p	**q**	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
F	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	V	V	V	F

Tabla 4.3: valor de verdad de proposiciones con conectivos lógicos

Adicional a los conectivos lógicos ya mencionados se han definido otros muy reconocidos y usados en aplicaciones tecnológicas de la lógica matemática4 los cuales se derivan de los conectivos básicos NO, AND y OR; éstos son: la anticonjunción o NAND y la antidisyunción o NOR, que fueron descubiertos por Sheffer y Pierce.

Anti conjunción. Es un conectivo lógico descubierto por el logicista americano Henry Maurice Sheffer (1882-1964). Se define como la negación de la conjunción, es decir, NOT AND $\Leftrightarrow$ NAND (en compuertas lógicas), que en este texto simbolizaremos con $\bar{\wedge}$. De tal manera, la anti conjunción es falsa si las proposiciones son verdaderas; en los demás casos es verdadera (véase la tabla 1.4).

$$p \text{ NAND } q \leftrightarrow \neg(p \wedge q) \leftrightarrow p \,\bar{\wedge}\, q$$

[4] La gran importancia de estos conectivos está en su gran aplicación tecnológica para la construcción de circuitos digitales como consecuencia del álgebra booleana, ya que cualquier expresión booleana se puede escribir utilizando únicamente anticonjunciones o antidisyunciones. Aunque se pueda ver más extensa y compleja la expresión o la cantidad de compuertas en un circuito lógico tiene la ventaja tecnológica de que sólo es necesario fabricar uno de los dispositivos NAND o NOR.

Álgebra de proposiciones

Álgebra de proposiciones es un sistema axiomático consistente, completo e independiente; se utiliza básicamente para construir y simplificar proposiciones complejas, siempre que cumplan determinadas propiedades.

4.10.1 Elementos del álgebra proposicional

Los siguientes elementos se utilizan para escribir expresiones proposicionales. Cada expresión proposicional tiene su respectiva función lógica. Los elementos del álgebra proposicional son:

Símbolos lógicos. Se representan por F y V; corresponden a los posibles valores de una proposición, para señalar respectivamente la falsedad o la verdad de la proposición.

Constantes. Son proposiciones que no cambian su valor (siempre es F o V). **Variables.** Son proposiciones que cambian su valor con el tiempo; están representadas por las letras minúsculas del alfabeto, así: p, q, r, s, t, etc.

Signos de agrupación. Se utilizan los paréntesis izquierdo "(" y paréntesis derecho ")"

Símbolos operacionales. Las únicas operaciones de la lógica proposicional son: OR (v), AND ($\wedge$), la negación ($\neg$), el condicional ($\rightarrow$).

Símbolo relacional. El único símbolo relacional se utiliza para comparar es el conectivo lógico "$\Leftrightarrow$".

4.10.2 Postulados del álgebra de proposiciones

Los postulados son de gran importancia para la justificación de las leyes. Su enunciado se puede ver en la tabla 4.7:

P1: $(V) \wedge (V) \Leftrightarrow (V)$

P2: $(V) \wedge (F) \Leftrightarrow (F)$

P3: $(F) \wedge (F) \Leftrightarrow (F)$

P4: $(V) \vee (V) \Leftrightarrow (V)$

P5: $(V) \vee (F) \Leftrightarrow (V)$

P6: $(F) \vee (F) \Leftrightarrow (F)$

Tabla 4.7: postulados del álgebra proposicional

4.10.3 Leyes del álgebra de proposiciones

Las leyes de las proporciones conforman la parte fundamental para demostrar la equivalencia entre proposiciones o construir y simplificar funciones lógicas (con propiedades determinadas) de manera consistente; más adelante se utilizará para construir circuitos digitales óptimos a partir del álgebra booleana (capítulo 10).

Sean p, q, r proposiciones cualesquiera, entre otras leyes se tienen básicamente las siguientes (véase la tabla 4.8):

NOMBRE DE LA LEY	LOGICA DE PROPOSICIONES
1. Idempotencia	• $p \wedge p \Leftrightarrow p$ • $p \vee p \Leftrightarrow p$
2. Identidad	• $p \wedge (V) \Leftrightarrow p$ • $p \vee (F) \Leftrightarrow p$
3. Dominación	• $p \wedge (F) \Leftrightarrow (F)$ • $p \vee (V) \Leftrightarrow (V)$
4. Conmutativa	• $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ • $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
5. Asociativa	• $p \wedge q \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ • $p \vee q \vee r \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
6. Distributiva	• $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ • $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
7. Complementación: • **Contradicción** • **Tercero excluido**	 • $p \wedge \neg p \Leftrightarrow (F)$ • $p \vee \neg p \Leftrightarrow (V)$
8. Involución	• $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ doble negación • $\neg(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow \neg p$ triple negación
9. D' Morgan	• $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

	• $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
10. Absorción	• $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ • $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
10. Proposicional	• $p \wedge (\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$ • $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$
11. Alternativa del condicional	• $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
12. Contra recíproco[5]	• $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Tabla 4.8: leyes del álgebra proposicional

Para verificar la verdad de la equivalencia de estas leyes, basta con utilizar las tablas de verdad, con las cuales deberá llegar a una tautología.

Ejemplo 4.12: simplifique las siguientes proposiciones hasta la mínima expresión, justificando cada paso realizado.

a) $\neg((\neg p \wedge q) \vee q) \vee \neg((s \vee \neg q) \wedge s)$

b) $(((p \vee r) \wedge q) \vee (p \vee r)) \wedge (\neg p \vee r)$

c) $(q \vee r) \vee (p \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$

Solución:

a) $\neg((\neg p \wedge q) \vee q) \vee \neg((s \vee \neg q) \wedge s) \Leftrightarrow \neg q \vee \neg s$ — Ley de absorción

$\Leftrightarrow \neg(q \wedge s)$ — Ley de D'Morgan

b) $(((p \vee r) \wedge q) \vee (p \vee r)) \wedge (\neg p \vee r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg p \vee r)$ — Ley de absorción

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee r$ — Ley distributiva

$\Leftrightarrow (F) \vee r$ — Ley de contradicción

$\Leftrightarrow r$ — Ley de dominación

c) $(q \vee r) \vee (p \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg q \wedge p) \Leftrightarrow (q \vee r) \vee (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$ — Leyes conmutativa, asociativa y de absorción

$\Leftrightarrow (q \vee r) \vee (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$ — leyes asociativa y conmutativa

$\Leftrightarrow (q \vee r) \vee (\neg(q \vee r) \wedge p)$ — Ley de D'Morgan

$\Leftrightarrow q \vee r \vee p$ — Ley proposicional

4.11 Trascripción de enunciados en lenguaje corriente al lenguaje simbólico

La trascripción de un enunciado dado en lenguaje corriente al lenguaje simbólico consiste en extraer las proposiciones simples y luego, utilizando los conectivos lógicos escribe el enunciado dado. Para transcribir dichos enunciados de lenguaje corriente a lenguaje lógico puede proceder así:

1. Analice cuales son las proposiciones simples que conforman el enunciado dado.

2. Escriba el enunciado de manera simbólica, teniendo en cuenta los signos de puntuación. Esto le ayudará a esclarecer cual es el conectivo lógico principal. Tenga en cuenta el orden de prioridad de estos signos según la tabla 4.9; adicionalmente, considere que si en la proposición hay paréntesis, podría comenzar evaluando la proposición simbólica por los paréntesis más internos.

Conectivo	Prioridad
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3

Tabla 4.9: orden de prioridad de los conectivos lógicos

3. Cambie los conectivos derivados que aparezcan en la expresión por conectivos fundamentales; por ejemplo, si es condicional $p \rightarrow q$ por su equivalente $\neg p v q$.

4. Si el objetivo del problema es simplificar el enunciado, aplique las leyes de las proposiciones para lograrlo.

. Extraiga y escriba en lenguaje lógico las proposiciones simples del enunciado p: “el caballo es cuadrúpedo” q: “el perro es mamífero” r: “la gallina es invertebrado”

. Escriba la proposición utilizando la trascripción lógica $(p \wedge q) \rightarrow r$

. Determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones simples que conforman la proposición dada. p: V, q: V, r: F

- Determine el valor de verdad de la proposición compuesta

  $(V \wedge V) \rightarrow F \Leftrightarrow V \rightarrow F \Leftrightarrow F$. Por lo tanto, el enunciado es **falso**

Ejemplo 4.14: simplifique cada uno de estos enunciados hasta lograr el mínimo.

1. Como Juan es condenado, debe ser el asesino. Entonces, Juan es el asesino y debe ser condenado.

2. Como al trabajar debo casarme, entonces, no es el hecho de que si no me caso deba trabajar.

3. No es cierto: que el agua no está contaminada o que produzca amebiasis o que si el agua no produce amebiasis, entonces el agua no esté contaminada.

Solución 1: El enunciado tiene dos enunciados simples; estas son:

p: “Juan es condenado”

q: “Juan es el asesino”

La trascripción lógica queda como sigue: $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge p)$ Ahora, apliquemos los pasos para simplificar la proposición

$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge p)$	$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (q \wedge p)$	Ley alternativa del condicional
	$\Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$	Ley de D’Morgan
	$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$	Ley de doble negación
	$\Leftrightarrow (p \wedge (\neg q \vee q)$	Ley distributiva
	$\Leftrightarrow p$	Ley de tercero excluido y dominación

El enunciado obtenido es “Juan es condenado”

La trascripción al lenguaje simbólico es: $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p)$

Solución 2: Los enunciados simples son:

p: “debo trabajar”

q: “debo casarme”

La trascripción al lenguaje simbólico es: $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p)$

$(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow p)$	$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg\neg q \vee p)$	Ley alternativa del condicional
	$\Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg\neg q \wedge \neg p)$	Ley de D’Morgan
	$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$	Ley de doble y triple negación
	$\Leftrightarrow \neg q \wedge (p \vee \neg p)$	Ley distributiva
	$\Leftrightarrow \neg q \wedge (V)$	Ley de tercero excluido
	$\Leftrightarrow \neg q$	Ley de dominación

Por consiguiente, la conclusión del enunciado es “no debo casarme”

Solución 3: Los enunciados simples que conforman este enunciado son:

p: “el agua está contaminada”

q:” el agua produce amebiasis”

La trascripción al lenguaje simbólico es: $\neg(p \vee q \vee (q \rightarrow \neg p))$

$\neg(\neg p \vee q \vee (\neg q \rightarrow \neg p)) \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \vee (\neg\neg q \vee \neg p))$ Ley alternativa del condicional

$\Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg\neg\neg q \wedge \neg\neg p)$ Ley de D'Morgan

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)$ Ley de involución y conmutativa

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ Ley de idempotencia

El enunciado se reduce a: “el agua está contaminada y no produce amebiasis”