



LOGICA MATEMATICA

1.1. Generalidades

• 1.1.1. Introducción

La lógica matemática es aquella que opera utilizando un **lenguaje simbólico artificial** y realizando una abstracción de los contenidos. Lógica matemática. Es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado. El uso más temprano de matemáticas y de geometría en relación con la lógica y la filosofía se remonta a los griegos antiguos tales como Euclides, Platón, y Aristóteles. Muchos otros filósofos antiguos y medievales aplicaron ideas y métodos matemáticos a sus afirmaciones filosóficas.

La lógica matemática no es la «lógica de las matemáticas» sino la «matemática de la lógica». Incluye aquellas partes de la lógica que pueden ser modeladas y estudiadas matemáticamente.

La lógica matemática comprende dos áreas de investigación distintas:

La primera es la aplicación de las técnicas de la lógica formal a las matemáticas y el razonamiento matemático

y la segunda, en la otra dirección, la aplicación de técnicas matemáticas a la representación y el análisis de la lógica formal.

¿Para qué sirve?

La **lógica** es muy importante en las **matemáticas**, porque **sirve para** poder demostrar con exactitud si un(s) argumentos son realmente lógicos o válidos, la podemos aplicarla en **matemáticas**, es decir **para** poder demostrar cosas coherentes que tengan razón concreta, es decir resultados que sean específicos.

• 1.1.2. Proposición

Una proposición **matemática** es una expresión algebraica que puede acarrear dos valores: ser verdadera o ser falsa, aunque nunca ambas a la vez. Denominadas a través de letras minúsculas, las **proposiciones matemáticas** tienen un valor de verdad (que será la veracidad o la falsedad de su enunciado).

Una proposición es una oración con valor referencial o informativo, de la cual se puede predicar su veracidad o falsedad, es decir, que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. La proposición es la expresión lingüística del



razonamiento, que se caracteriza por ser verdadera o falsa empíricamente, sin ambigüedades.

•TIPOS DE PROPOSICIONES

- **Proposiciones Simples:**

Son aquellas que no tienen oraciones componentes afectadas por negaciones (“no”) o términos de enlace como conjunciones (“y”), disyunciones (“o”) o implicaciones (“si . . . entonces”). Pueden aparecer términos de enlace en el sujeto o en el predicado, pero no entre oraciones.

EJEMPLOS:

Simples:

- La ballena es roja.
- La raíz cuadrada de 16 es 4.
- Gustavo es alto.
- Teresa va a la escuela.

- **Proposiciones Compuestas:**

Una proposición será compuesta si no es simple. Es decir, si está afectada por negaciones o términos de enlace entre oraciones componentes.

Compuestas:

- La ballena **no** es roja.
- Gustavo **no** es alto.
- Teresa va a la escuela **o** María es inteligente.
- 4 es menor que 8 **o** 6 es mayor que 10.
- El 1 es el primer número primo **y** es mayor que cero.
- El 7 es mayor que 5 **y** 7 es menor que 10.
- Si** Yolanda es estudiosa **entonces** pasará el examen.
- Si** corro rápido **entonces** llegaré temprano.
- Terminaré rápido **si y sólo si** me doy prisa.
- Aprenderé Matemáticas **si y sólo si** estudio mucho.

Enunciados y proposiciones según la cantidad de conectores lógicos que la conforman

Los enunciados y las proposiciones se clasifican en simples o atómicas y compuestas o moleculares.



Enunciado y Proposición Simple o Atómica. Se denomina enunciado o proposición simple o atómica a aquel enunciado o proposición que no tiene conectores lógicos.

Ejemplo: Enunciados y proposiciones simples

Enunciado Simple	Proposición Simple
Este mes voy a trabajar	El trabajo es un derecho humano
Este mes me muero de hambre	El alimento mitiga el hambre
Viva en Lima	El caballo tiene piel oscura
No vaya a Lima	Lima no es capital de Perú
Viva en Madrid	Madrid es capital de España
Estudie matemáticas	Euler estudió matemáticas
Podrá enseñar matemáticas	Euler enseñó matemáticas
Hacía frío en la tarde	$3+5=35$
¿mañana lloverá en el valle de Aburrá?	Euler estudió medicina en universidad de Oxford
Las vacas negras de Pedro Luis el dueño de la casa en el aire	$x+3=2$

¡Huy qué frío!	El sol se esconde después de las 6 pm
El número es grande	El único número par primo es el 2
El rombo está coloreado	El rombo es un equilátero
El rectángulo está dividido	El rectángulo es un equiángulo
La suma está apareada	La suma de dos números impares es par

Enunciado y Proposición Compuesta o Molecular. Es un enunciado o proposición que está formada por dos o más enunciado o proposiciones simples; por consiguiente, están separadas por diferentes conectores lógicos.

Ejemplo: Enunciados y proposiciones compuestos



Enunciado Compuesto	Proposición Compuesta
Si este mes voy a trabajar entonces esté mes me muero de hambre	Si el trabajo es un derecho entonces el aliment mitiga el hambre
Vaya a Lima y viva en Madrid	El caballo tiene piel oscura y Madrid es capital de España
Estudie matemáticas o podrá enseñarla	Euler estudió matemáticas o pudo enseñarla
Podrá enseñar matemáticas si y solo si estudie matemáticas	Euler pudo enseñar matemáticas si y solo si estudio matemáticas
Estudie matemáticas pero no podrá enseñarla	Euler no estudio matemáticas pero pudo enseñarla
Estudié matemáticas o si este mes voy a trabajar entonces esté mes me moriré de hambre	En los países caribeños, el sol se esconde después de las 6 pm o si $x+3=2$ entonces Euler pudo enseñar matemáticas
Estudié matemáticas, pero si este mes voy a trabajar entonces esté mes me moriré de hambre	En los países caribeños, el sol se esconde después de las 6 pm, pero si $x+3=2$ entonces Euler pudo enseñar matemáticas

• 1.1.3. Notación

La **notación matemática** es el lenguaje simbólico formal que sigue convenciones propias. Los **símbolos** permiten representar conceptos, operaciones y todo tipo de entidades matemáticas. La **matemática** se apoya en un lenguaje simbólico **formal**, la **notación matemática**, que sigue una serie de convenciones propias. Los símbolos representan un concepto, una **relación**, una **operación**, o una **fórmula matemática** según ciertas reglas. Estos símbolos no deben considerarse abreviaturas, sino entidades con valor propio y autónomo.

Las declaraciones hechas por medio de proposiciones suelen ser largas, por lo que resulta tedioso escribirlas siempre como se ha visto hasta ahora. Por ello, se hace uso de un lenguaje simbólico. Las proposiciones se suelen representar por letras mayúsculas como P, Q, R, S , etc.

Para denotar proposiciones se utilizan letras minúsculas tales como p, q, r, s, t, u , etc., seguidas de dos puntos (:); el enunciado se escribe entre comillas dobles (" ").

Ejemplo: denote las siguientes proposiciones

. p : "La ciudad de Medellín es la capital del departamento de Antioquia"



. q: " $4+2x=3$ con $x=-0.5$ "

r: "El número 3 es primo"

. s: "El sol es un astro"

. t: "las estrellas son planetas"

. u: "Barranquilla es capital de Quindío"

Y los conectivos simbólicos de la siguiente manera:

- $\neg$ para la negación
- $\vee$ para la disyunción
- $\wedge$ para la conjunción
- $\rightarrow$ para el condicional
- $\leftrightarrow$ para el bicondicional

.1.1.4. Valor de verdad

Proposiciones según su valor de verdad

Estas proposiciones se clasifican así: tautologías, contradicciones e inciertos (o contingencias).

Tautologías. Son aquellas proposiciones que siempre son verdaderas. Las tautologías se utilizan para verificar y demostrar la consistencia de las argumentaciones.

Ejemplo: " $2+3=5$ "

"si $x^2=4$ para $x=2$ o para $x=-2$ entonces $2y-5=0$ para $y=5/2$ "

"el número entero es par o impar"



Contradicciones. Son aquellas proposiciones que siempre son falsas. Las contradicciones se utilizan para verificar y demostrar la inconsistencia de las argumentaciones.

Ejemplo: “ $2+3=6$ ”

“un número entero puede ser par e impar”.

“El cuadrado de un número entero impar es par”

Contingencias o inciertos. Son aquellas proposiciones que ni son verdaderas ni son falsas. Tecnológicamente, las contingencias o inciertos se utilizan para construir circuitos de control y automatismo.

Ejemplo: “los animales carnívoros son cuadrúpedos”

“todo cuadrilátero equilátero es un polígono regular”

• 1.1.5. Tabla de Verdad

Una tabla de verdad corresponde a un arreglo rectangular conformado por una o más proposiciones y todas las posibles combinaciones de verdad que se pueden definir de la proposición dada. Esto es, un conjunto de combinaciones de valores de verdad correspondientes a una proposición.

El resultado definitivo de una proposición compuesta corresponde al valor del conectivo lógico principal de la proposición y se obtiene a partir de los valores parciales de las proposiciones que la conforman. Se utilizan para comprobar la verdad o falsedad de las proposiciones.

La cantidad de combinaciones de verdad de una proposición depende del número de proposiciones simples que la componen y se calcula mediante la expresión 2^n con n =número de proposiciones simples.

En efecto, si n es 1, se tienen dos posibles valores de verdad; si se tienen 2 proposiciones se producen 4 posibles valores de verdad; si se tienen 3 proposiciones, entonces serían 8 las posibles combinaciones de verdad si se tienen 4 proposiciones, entonces serían 16 las posibles combinaciones de verdad y así sucesivamente.

Otro concepto importante en lógica es el de tablas de verdad. Los valores de verdad de una proposición son las dos posibilidades que se tiene para una proposición: verdadera (que se denotará por V y se dirá que su valor de verdad es V) o falsa (que se denotará por F y se dirá que su valor de verdad es F).



El valor de verdad de una proposición compuesta depende exclusivamente de los valores de verdad de las proposiciones simples que aparecen en ella.

Para trabajar de manera más general, no se considerarán proposiciones específicas, sino variables proposicionales p , q , r , s , etc., que representarán proposiciones cualesquiera.

Con estas variables y los conectivos lógicos se forman las conocidas fórmulas proposicionales al igual que se construyen las proposiciones compuestas.

Si cada una de las variables que aparecen en una fórmula proposicional se sustituye por una proposición, se obtiene una proposición compuesta.

A continuación, se presentan las tablas de verdad para los conectivos lógicos:

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Hay fórmulas proposicionales que reciben solo el valor V en su tabla de verdad, es decir, la última columna de su tabla de verdad solo posee el valor V. A este tipo de fórmulas se le conoce como tautologías. Por ejemplo:

$p \rightarrow p$ es una tautología.

p	$p \rightarrow p$
V	V
F	V

La siguiente es la tabla de verdad de la fórmula

$$(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q).$$



p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$
F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V
V	V	V	V	F	V

Se dice que una fórmula α implica lógicamente a otra fórmula β , si α es verdadera cada vez que β lo sea. Es decir, en la tabla de verdad de α y de β , las filas donde α tiene una V, β también tiene una V. Solo interesa las filas en las que α tenga el valor V. La notación para la implicación lógica es la siguiente:

$$\alpha \Rightarrow \beta.$$

BIBLIOGRAFIA

- Agazzi, Evandro (1986). *Lógica simbólica*. Herder. [ISBN 9788425401305](#).
- Enderton, Herbert (2001). *A mathematical introduction to logic* (2nd edición). Boston, MA: [Academic Press](#). [ISBN 978-0-12-238452-3](#).
- Hamilton, A.G. (1988), *Logic for Mathematicians* (2nd edición), Cambridge: [Cambridge University Press](#), [ISBN 978-0-521-36865-0](#).
- Ebbinghaus, H.-D.; Flum, J.; Thomas, W. (1994), *Mathematical Logic* (2nd edición), Nueva York: [Springer](#), [ISBN 0-387-94258-0](#)