CALCULO PROPOSICIONAL

El cálculo proposicional es el estudio de las relaciones lógicas entre objetos llamados *proposiciones*, que frecuentemente pueden interpretarse como afirmaciones que tienen algún significado en contextos de la vida real.

PROPOSICIONES

Las Proposiciones son enunciados u oraciones declarativas que afirman o niegan algo, por lo tanto sus valores de verdad son "Verdadero" o "Falso".

Una proposición es cualquier frase que tenga un valor de verdad bien definido, es decir, que sea verdadera o falsa.

Es un juicio declarativo del cual tiene sentido decir que es **verdadero (V)** o que es **falso (F),** pero no ambas cosas simultáneamente.

Las proposiciones se identifican con letras minúsculas: p, q, r, s, t... También se les llama ***Variables Proposicionales***. Ahora bien, sus **valores lógicos** se representan con "**1**" ó "**0**". Sólo asumen un único valor.

Valor Lógico

Se llama Valor Lógico de una proposición, el cual se le denomina **VL**, al **valor 1** si la proposición es **Verdadera** y **0** si es **Falsa**.

Son Proposiciones
✓ Venezuela está en Asia
✓ 2 por 2 es igual a 4
✓ Está lloviendo
✓ El color de la casa es verde

No son Proposiciones
✓ ¿Cómo te llamas?
✓ Inserte el CD
✓ ¡No Fumar!
✓ Ir directamente a la casa

OPERACIONES VERITATIVAS

Las Operaciones Veritativas son aquellas que se forman uniendo varias proposiciones mediante el uso de operadores o conectivos lógicos.

Son aquellas operaciones que se llevan a cabo con cada uno de los conectivos para formar nuevas proposiciones.

Son términos conectivos: **y ; o ; o ... o; si, ... entonces; si y solo sí; no**;

Ejemplos:

- Martes es un planeta **y** el sol es una estrella
- Martes es un planeta **o** el sol es una estrella
- **O** Martes es un planeta **o** el sol es una estrella
- **Si** Martes es un planeta **entonces** el sol es una estrella
- Martes **no** es un planeta

- ***Proposiciones Atómicas o Simples***: Son las proposiciones que no contienen conectivos lógicos.

  Ejemplo:

1. Martes es un planeta
2. El cielo es azul
3. El sol es una estrella
4. La nieve es fría
5. 12 x 12 = 144

- ***Proposiciones Moleculares o Compuestas*****:** Cuando tiene más de una proposición y están unidas por conectivos u operadores lógicos.

  Ejemplo:

  O Martes es un planeta **o** el sol es una estrella

CONECTIVOS LÓGICOS

Son símbolos que nos permiten realizar la unión de dos o más proposiciones a partir de preposiciones dadas o conocidas, los cuales se describen a continuación.

NOMBRE	SIMBOLO	SE LEE
NEGACIÓN	$\sim$	no, no es cierto que
CONJUNCIÓN	$\wedge$	y
DISYUNCIÓN (INCLUSIVA)	$\vee$	o
DISYUNCIÓN EXCLUSIVA	$\veebar$	o …o
CONDICIONAL	$\rightarrow$	si… entonces
BICONDICIONAL	$\leftrightarrow$	si y solo si

La Negación (~)

Es un conectivo que niega el valor de una proposición o en su defecto, devuelve el valor contrario de la misma.

p	~ p
1	0
0	1

~ p, que se lee "no p", "no es cierto que p", "es falso que p"

La tabla anterior quiere decir que: ~ p es falsa cuando p es verdadera y que ~ p es verdadera cuando p es falsa.

Ejemplo:

p: Mérida es un estado andino

es la preposición

~ p: Mérida no es un estado andino

En este ejemplo, como p es verdadero, ~ p es falsa.

La Conjunción (∧)

Este conectivo (∧) se lee "y", el cual une dos proposiciones y entrega un valor verdadero sólo en el caso que ambas tengan valor verdadero.

p ∧ q se lee "p y q"

p	q	p ∧ q
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**0**

Cuando se conjugan dos declaraciones, tiene el sentido de afirmar que son simultáneamente verdaderas.

Por ejemplo, al decir que "Barquisimeto es la capital del Estado Lara y Margarita es una isla". El conector funciona indicando que las dos proposiciones conjuntadas son verdaderas, de modo que si p es la proposición "Barquisimeto es la capital de Inglaterra" y q es la proposición "Margarita es una isla"

La Disyunción Inclusiva (∨)

La disyunción tiene la función de enlazar o unir dos proposiciones, indicando que al menos una de ellas es verdadera.

La Disyunción p y q es la proposición $p \vee q$ y se lee "p y q". Su resultado es verdadero si al menos una de ellas tiene un valor verdadero.

p	q	p∨ q
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Esta tabla indica que $p \vee q$ es verdadera si p es verdadera, q es verdadera o ambas son verdaderas; y $p \vee q$ es falsa si ambas, p y q son falsas.

Ejemplo: Si

p: Madrid está en España

q: Miami está en Canadá

r: Roma está es Francia

entonces:

a. Madrid está en España o Miami está en Canadá

b. Miami está en Canadá o Roma está es Francia

La Disyunción Exclusiva ($\veebar$)

La Disyunción Exclusiva p y q ($p \veebar q$) Significa "o una u otra", une dos proposiciones y resulta en un valor verdadero cuando los valores de las mismas son diferentes entre sí. En otras palabras, la disyunción exclusiva es falsa sólo cuando los valores de p y q son iguales.

$p \veebar q$ se lee "**o p o q**", cuyo valor está dado por la siguiente tabla:

p	q	$p \veebar q$
1	1	**0**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Ejemplo: Si

p: 7 es un número primo
q: 7 es un número par
r: 7 es mayor que 2.

Entonces

a. $p \veebar q$: **ó** 7 es un número primo **ó** 7 es un número par
   $VL(p \veebar q) = 1$, ya que $VL(p) = 1$ y $VL(q) = 0$

b. $p \veebar r$: **ó** 7 es un número primo **ó** 7 es mayor que 2
   $VL(p \veebar r) = 0$, ya que $VL(p) = 1$ y $VL(r) = 1$

El Condicional (→)

Al relacionarse dos proposiciones con este conector → es muy importante distinguir la que queda a la izquierda (a la que se le llama ***antecedente***), de la que queda a la derecha (que se llama ***consecuente***). El sentido de este conector es señalar, que si la proposición **antecedente** es **verdadera**, también lo es la proposición **consecuente**; es decir, basta o es suficiente que el antecedente sea verdadero, para que el consecuente también sea verdadero. De aquí que una proposición compuesta en la que el conector es condicional, será falsa si siendo verdadero el antecedente, es falso el consecuente. La proposición será verdadera en los demás casos, en los que no ocurre que el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Este conectivo se lee "**si ..., entonces** ..." y une dos proposiciones, cuyo resultado sólo es falso cuando p es verdadero y q es falso.

p → q se lee "si p, entonces q".

En el condicional p es antecedente y q consecuente. El antecedente es la condición suficiente y el consecuente la condición necesaria.

p	q	p→q
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

Ejemplo:

Supongamos que tu mamá te hace la siguiente promesa:

"Si apruebas el curso de Estructuras te llevo a Margarita"

En cualquiera de los tres casos no se rompe la promesa:

1. Aprobaste Estructuras y te llevaron a Margarita
2. No aprobaste Estructuras y te llevaron a Margarita
3. No aprobaste Estructuras y no te llevaron a Margarita

En cambio, no se puede decir lo mismo en el siguiente caso:

4. Aprobaste Estructuras y no te llevaron a Margarita

Condición Necesaria y Condición Suficiente

Un condicional puede ser expresado también con las llamadas condiciones necesarias y suficientes. El antecedente es la condición suficiente y el consecuente la condición necesaria.

Cambiaremos las variables p y q por s y n. Así el condicional s →n puede ser leído de las siguientes maneras:

1. Si **s** entonces **n**
2. **n** es condición necesaria para **s**
3. Una condición necesaria para **s** es **n**
4. **s** es condición suficiente para **n**
5. Una condición suficiente para **n** es **s**

Existen tres maneras más:

6. **n** si **s**
7. **s** solo si **n**
8. **s** solamente si **n**

Ejemplo: Sean las proposiciones:

t: La figura es un rectángulo

c: La figura es un cuadrado

r: La figura es un rombo

Expresar simbólicamente las siguientes proposiciones:

1. La figura es un cuadrado sólo si la figura es un rectángulo

Respuesta: $c \rightarrow t$

2. Una condición suficiente para que la figura sea un rombo es que la figura sea un cuadrado.

   Respuesta: $c \rightarrow r$

3. Que la figura sea un cuadrado es condición necesaria para que la figura sea un rombo y un rectángulo

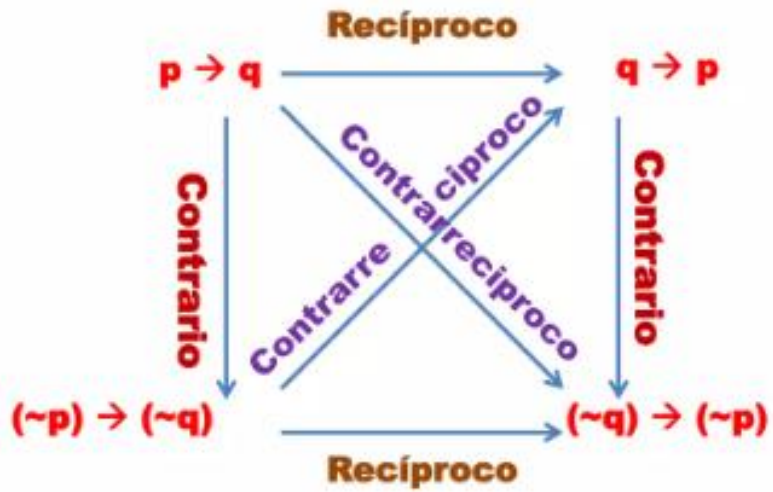
   Respuesta: $(r \wedge t) \rightarrow c$

Condicionales Asociados

A cada condicional **p →q** se le asocian otros tres que se obtienen permutando el antecedente con el consecuente o sus negaciones.

Pueden ser:

1. Directo: **p → q**
2. Recíproco: **q → p**
3. Contrario: **(~ p) → (~ q)**
4. Contrarrecíproco: **(~ q) → (~ p)**



Cualquiera de las cuatro proposiciones se puede tomar como directa, y a partir de

ella construir las otras tres asociadas.

Ejemplo:

Enunciar el reciproco, contrario y contrarreciproco del siguiente condicional:

Si el triángulo es equilátero, entonces el triángulo es isósceles

Solución:

- **Reciproco:** Si el triángulo es isósceles, entonces el triángulo es equilátero
- **Contrario:** Si el triángulo no es equilátero, entonces el triángulo no es isósceles.
- **Contrarreciproco:** Si el triángulo no es isósceles, entonces el triángulo es equilátero.

El Bicondicional (↔)

Sean p y q dos proposiciones, se llama **Bicondicional de p y q** a la proposición

p↔q

La proposición **p ↔ q**, se lee **"p si sólo si q"**, o **"p es condición necesaria y suficiente para q"**, y su valor lógico es dado por la siguiente tabla:

p	q	p↔q
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**1**

La tabla nos dice que p ↔ q es verdadera cuando VL(p) = VL(q), y es falsa cuando VL(p) ≠ VL(q).

Esta conectiva origina una proposición molecular que es verdadera cuando sus dos componentes tienen el mismo valor de verdad, y falsa si uno de sus componentes es verdadero y el otro falso.

Ejemplo: Si,

a: $2 + 1 = 3$ si y sólo si $2 < 3$

b: $2 + 1 = 3$ si y sólo si $2 > 3$

c: $2 + 1 = 4$ si y sólo si $2 > 3$

d: $2 + 1 = 4$ es condición necesaria y suficiente para que $2 > 3$

entonces,

$VL(a) = 1$, $VL(b) = 0$, $VL(c) = 1$, $VL(d) = 0$

Ejemplo:

Iré a la fiesta si y solo si tengo ropa nueva

$\underbrace{\text{Iré a la fiesta}}_{p}$ $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\text{si tengo ropa nueva}}_{q}$

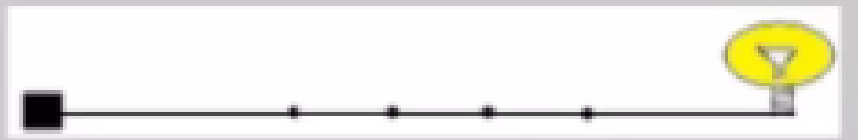
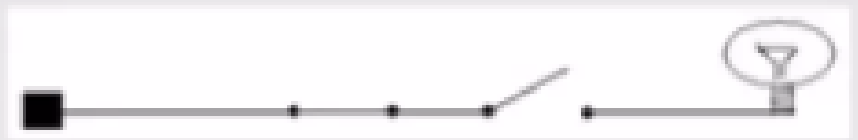
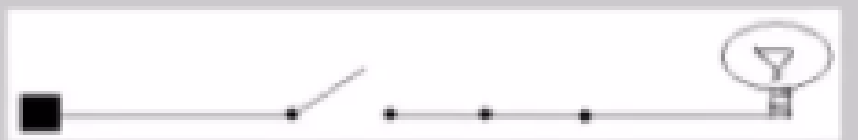
Circuitos Combinatorios o Circuitos Lógico

También se llaman redes de conmutación y es una representación esquemática que tiene una o más entradas y exactamente una salida. Se pueden identificar con una forma proposicional, de manera que a una forma proposicional se le pueda asociar un circuito; o de manera contraria, dado un circuito se le puede asociar la forma proposicional correspondiente.

Un circuito lógico es un dispositivo que tienen una o más entradas y exactamente una salida. En cada instante cada entrada tiene un valor, 0 o 1; estos datos son procesados por el circuito para dar un valor en su salida, 0 o 1.

Los valores 0 y 1 pueden representar ciertas situaciones físicas como, por ejemplo, un voltaje nulo y no nulo en un conductor.

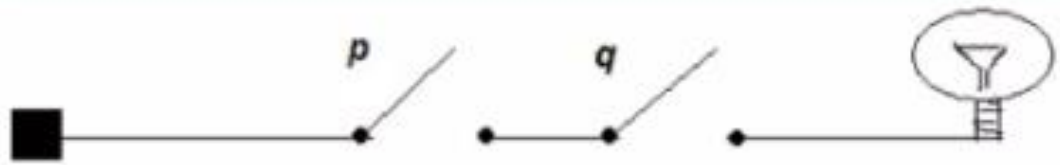
Se identifica la verdad de la proposición con el paso de corriente y la falsedad de la proposición con la interrupción de la corriente, es decir, el interruptor se cierra si **p** es **V** y se abre si **p** es **F**.

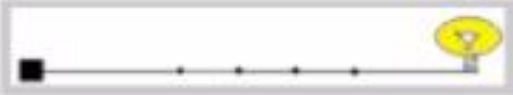
p	q	p∧q	Circuito Lógico
1	1	1	
1	0	0	
0	1	0	
0	0	0	

Tipos de Circuitos Lógicos

- **Circuito en Serie**: Es aquel que está constituido por interruptores dispuestos uno detrás de otro. Se le representa mediante una conjunción. BASTA QUE UNO DE LOS INTERRUPTORES ESTÉ ABIERTO PARA QUE EL FOCO NO PRENDA.

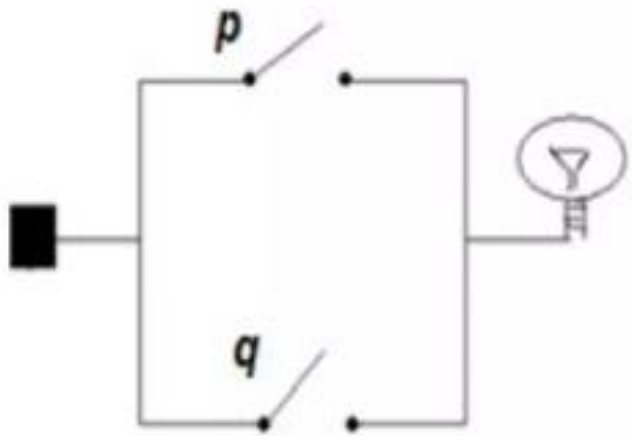
Se representa como $p \wedge q$

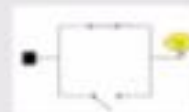
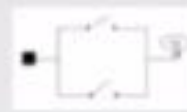


p	q	p∧q	Circuito Lógico
1	1	1	
1	0	0	
0	1	0	
0	0	0	

❖ **Circuito en Paralelo**: Es aquel que está constituido por interruptores dispuestos uno a lado del otro. Se le representa mediante una disyunción. BASTA QUE UNO DE LOS INTERRUPTORES ESTÉ CERRADO PARA QUE EL FOCO PRENDA

Se representa como $p \vee q$



p	q	p∨q	Circuito Lógico
1	1	1	
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	

Formas Proposicionales

Se llama así a las nuevas expresiones que resultan de unir las variables proposicionales a través de los conectivos lógicos: se puede decir que las variables proposicionales también son formas proposicionales.

Es una combinación de proposiciones y conectivos lógicos que simboliza a una proposición compuesta o molecular.

A las nuevas expresiones que se obtienen al aplicar los conectivos lógicos a las variables proposicionales p, q, r, s, t, entre otros., se les llaman ***Formas Proposicionales***. Por ejemplo: $t \rightarrow (q \wedge \sim r) \sim [(p \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q)]$ son formas proposicionales y podemos decir, para ser más preciso que las variables proposicionales también son formas proposicionales.

Tablas de Verdad de las Formas Proposicionales

Determinan el valor de verdad de una proposición compuesta, analizando sus proposiciones simples relacionadas con los conectivos lógicos. La combinación de valores de verdad depende del número de proposiciones dadas

Las posibilidades de combinar valores de verdad dependen del número de proposiciones dadas.

Para una proposición (n = 1), tenemos $2^1 = 2$ combinaciones

Para dos proposiciones (n = 2), tenemos $2^2 = 4$ combinaciones.

Para tres proposiciones (n = 3), tenemos $2^3 = 8$ combinaciones.

Para n proposiciones tenemos 2n combinaciones

Pasos para construir la tabla:

$(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg r)$

1. Determinamos sus valores de verdad $2^3 = 8$ combinaciones
2. Determinamos las combinaciones:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

3. Adjuntamos a éste cuadro el esquema molecular y colocamos debajo de cada una de la variables sus valores de verdad :

p	q	r	(¬ p	∧	q)	⇔	(p	⇒	¬ r)
V	V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F	F	V	F
				(4)		(6)		(5)	

Existen dos Métodos: Método Acumulativo y Método Abreviado

Método Acumulativo

Se asigna una columna para cada variable proposicional y una columna para cada columna operación indicada, conservando el orden en que estas se llevaran a cabo.

Ejemplo: construir la tabla de la proposición **$(p \wedge \sim q) \leftrightarrow q$**

En este caso, la primera operación que llevo a cabo fue la negación, siguiendo la disyunción y luego el Bicondicional.

p	q	~q	p∧~q	(p∧~q)↔q
1	1	0	**0**	**1**
1	0	1	**1**	**0**
0	1	0	**0**	**0**
0	0	1	**1**	**0**

Método Abreviado

Es el método más utilizado, como primer paso se escribe la forma proposicional asignando inmediatamente valores lógicos a las variables proposicionales (nivel 1) y a las negaciones de éstas (nivel 2). Luego se asignan los valores a las conectivas conservando el orden en que éstas se usaron para construir la forma proposicional. Así:

p	**q**	**(p ∨ ~q)↔q**
1	1	1 0 **1**
1	0	1 1 **0**
0	1	0 0 **0**
0	0	1 1 **0**
1	1	3 2 4

Tautologías y Contradicciones

Tautología: Es una forma proposicional que es verdadera para cualquier valor lógico que se le asigne a sus variables proposicionales. En otras palabras, una forma proposicional es una tautología si en su tabla de verdad, la columna bajo su conectiva principal está formada sólo por "unos (1)".

Contradicción: Es una forma proposicional que es falsa para cualquier valor lógico que se le asigne a sus variables proposicionales, es decir, si la columna bajo su conectiva principal está formada solo por "ceros (0)".

Está claro que la negación de una tautología es una contradicción y que la negación de una contradicción es una tautología. Estos es, A es una tautología sí y solo sí ~A es una contradicción, y A es una contradicción sí y solo sí ~A es una tautología.

Ejemplo:

a. $(p \wedge q) \rightarrow p$ es una tautología. En efecto

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow q$
1	1	1 **1**
1	0	0 **1**
0	1	0 **1**
0	0	0 **1**
1	1	2 3

b. $p \vee \sim p$ es una tautología y $p \wedge \sim p$ es una contradicción

p	~p	p∨~p
1	0	**1**
0	1	**1**

p	~p	p ∧ ~p
1	0	**0**
0	1	**0**

Equivalencia Lógica y Algebra de Proposiciones

Equivalencia Lógica

Sean A y B dos formas proposicionales. **A es Lógicamente Equivalente a B**, o simplemente **A es equivalente a B** y se escribe:

$$A \leftrightarrow B \text{ ó } A \equiv B$$

si y sólo si la forma **bicondicional** $A \leftrightarrow B$ **es una tautología**.

Ejemplo:

Probar que p → q es lógicamente equivalente **a ~p ∨ ≡ ~ p ∨ q;** esto es:

$$\mathbf{p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q}$$

se debe probar que **(p → q) ↔ (~ p ∨ q) es una tautología.** En efecto:

(p → q)			↔	(~ p ∨ q)		
1	1	1	**1**	0	1	1
1	0	0	**1**	0	0	0
0	1	1	**1**	1	1	1
0	1	0	**1**	1	1	0

Algebra de Proposiciones

Las leyes de la algebra de proposiciones son equivalencias lógicas que se pueden demostrar con el desarrollo de las tablas de verdad del bicondicional.

Las leyes del algebra de proposiciones son las siguientes:

Leyes del Algebra de Proposiciones

- **Leyes Idempotentes**
  - a. $p \vee p \equiv p$
  - b. $p \wedge p \equiv p$
- **Leyes Asociativas**
  - a. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
  - b. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

- **Leyes Conmutativas**
  a. $p \vee q \equiv q \vee p$ b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- **Leyes Distributivas**
  a. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  b. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- **Leyes de Identidad o de Elemento Neutro**
  a. $p \vee \mathbf{0} \equiv p$ b. $p \wedge \mathbf{1} \equiv p$
- **Leyes de Dominación**
  a. $p \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$ b. $p \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$

- **Leyes de Complementación**

  a. **Tercio Excluido**

  $p \vee \sim p \equiv \mathbf{1}$

  b. **Contradicción**

  $p \wedge \sim p \equiv \mathbf{0}$

  c. **Doble Negación**

  c.1. $\sim\sim p \equiv p$

  c.2. $\sim \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$, . $\sim \mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$

- **Leyes de Morgan**

  a. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

  b. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Otras Equivalencias Notables

Ley del Condicional	$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
Ley del Bicondicional	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
Ley de Disyunción Exclusiva	$p \veebar q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
Ley del Contrarreciproco	$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
Ley de Reducción al Absurdo	$(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q \rightarrow 0)$
Ley de demostración por casos	$[(p \vee q) \rightarrow r)] \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
Leyes de la Absorción	a. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ b. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$