1. Sucesiones numéricas

1.1. Introducción

Una sucesión de números reales es una colección ordenada de números reales. Al considerar una sucesión se conoce cuál es el lugar que ocupa cada uno. Hay un primer elemento, al que podríamos llamar a_1, un segundo a_2, un elemento n-ésimo o general, a_n, etc.

Notaremos a las sucesiones por

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} ,$$

donde si bien utilizamos llaves, hacemos hincapié en que consideramos el orden en el que los elementos son presentados.

Nota 1.1.1. *En ocasiones los valores de los índices que indican el dominio de la sucesión pueden comenzar desde $n = 0$, sin que esto afecte a las definiciones que a éstas involucren.*

2.1 SUCESIONES LINEALES:

Son aquellos cuya fórmula general es un polinomio lineal en **n** es decir tiene la fórmula:

$$t_n = an + b$$

Por ejemplo, si $t_n = 3n + 2$, su respectiva sucesión es:
5 ; 8 ; 11 ; 14 ; . . .

2.2 SUCESIONES CUADRÁTICAS

Son aquellas sucesiones cuya fórmula general es un polinomio de segundo grado, es decir tiene la forma:

$$t_n = an^2 + bn + c$$

Donde $n \in Z^+$; a, b, y c son constantes.
Por ejemplo si $t_n = n^2 + 2n - 1$, su respectiva sucesión es: 2 ; 7 ; 14 ; 23 ; 34 .

En forma práctica se puede obtener el término enésimo con la siguiente fórmula:

$$\boxed{t_n = t_1 + \frac{M_1(n-1)}{1!} + \frac{P_1(n-1)(n-2)}{2!} + \ldots + \frac{R(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!}}$$

Ejemplo 1.1.1.

1. $\{a_n\}_n = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} = \{n\}_n$, *donde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n$.

2. $\{b_n\}_n = \{-2, -4, -6, ... - 2n, ...\}$, *tal que* $b_n = -2n$.

3. $\{a_n\}_n = \{1, \frac{1}{2}, , \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\} = \{\frac{1}{n}\}_n$, *donde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n}$.

4. $\{b_n\}_n = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ...\}$, *tal que* $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

5. *Sucesión de Fibonacci:* $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

Observemos en los ejemplos que a cada número natural (posición en la sucesión) le corresponde un elemento de la sucesión, y sólo uno, y que los elementos son, por definición, números reales.

Ejercicios.

Sucesiones.

(1) Sugiera el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

(a) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

(b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

(c) $1, 8, 27, 64, \ldots$

(d) $\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{-4}{5}, \ldots$

Consideramos una sucesión de números reales

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

A partir de ella formamos una nueva sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k
\end{aligned}$$

La nueva sucesión es de la forma $(S_1, S_2, S_3, S_4, ..., S_n, ...)$ y se la denomina **serie numérica**. Se la simboliza $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$

A los números $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ se los denomina **términos de la serie**, y a $S_1, S_2, S_3, S_4, ..., S_n$ **sumas parciales de la serie**.

Notas: Algunas observaciones a tener en cuenta:

- El índice de sumación n es una variable muda, y puede sustituirse por cualquier otra letra.
- No es necesario que una serie empiece a sumar desde $n = 1$. Puede empezar desde $n = 0$ o $n = p$ $(p > 1)$; pero siempre se puede reescribir para que empiece en $n = 1$ mediante un cambio de variable (ver el Ejemplo 3.25).
- S_n siempre representa la suma de los n primeros términos de la sucesión a_n y entonces se deberá tener cuidado al calcularla cuando la serie no empiece por $n = 1$.

Ejemplo

(1) Sumar el número 1, n veces:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

(2) La suma de los n primeros números naturales es:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \cdots + n.$$

(3) La suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

2. Convergencia y divergencia de series.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge o es una *serie convergente* cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ tiene límite finito.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge o es una *serie divergente* cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ no converge (ya sea porque el límite da $+\infty$, da $-\infty$ ó no existe).

Sea $s \in \mathbb{R}$, si la sucesión $\{s_n\}$ converge a s se suele escribir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

En otras palabras, la expresión anterior quiere decir:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = s.$$

En esto último debe quedar claro que s no se obtiene simplemente por adición, s es el límite de una sucesión de sumas.

Ejercicios.

Series.

(1) Verifique que las siguientes series son divergentes

(a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5} + \dots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+3}$

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sabiendo que $S_n = \frac{4n+1}{n+3} - \frac{1}{3}$, se pide:

a) Analizar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

b) Hallar el término a_{20}

Estudia si 129 es un término de la sucesión cuyo término general es $a_n = n^2 + 3n - 1$ y en caso afirmativo, indica cuál.

Halla los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = (-1)^n \cdot (2n + 5)$

b) $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

Desarrollar las siguientes sumas y dar el resultado:

$$a)\sum_{k=1}^{7}(2k-4)$$

$$b)\sum_{t=4}^{10}(3^{t}+t^{2})$$

$$c)\sum_{h=5}^{14}(2-\frac{4}{h})$$

Escribir las siguientes sumas utilizando la notación sigma:

a) $1 + 4 + 9 + 25 + \ldots + 81$

b) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$

c) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots. + 46$

d) $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \ldots. + 34$

Dar el resultado de las siguientes sumas:

$a) \sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5$

$b) \sum_{j=3}^{6} \frac{(j-1)}{(j-2)}$

$c) \sum_{k=3}^{8} k(k-1)$

$d) \sum_{t=5}^{9} 1 + (-1)^t$

$e) \sum_{i=1}^{200} 10$

$f) \sum_{j=8}^{70} 20$

Añade los tres términos siguientes en cada una de estas sucesiones:

a) 10, 15, 20, 25, 30, …

b) 80, 70, 60, 50, 40, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

d) 1, 3, 4, 6, 7, …

e) 2, 5, 7, 12, 19, …

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, …

a) 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45

b) 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384

d) 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12

e) 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, 9, 8, 10