Potenciación

CONTENIDOS

1. ¿Qué es la potenciación?

La potenciación es la operación que consiste en multiplicar un número por sí mismo varias veces.

Y se escribe:

$$2^2 = 2 \times 2$$

Esta expresión se lee «dos al **cuadrado**»

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

Esta expresión se lee «dos al **cubo**»

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

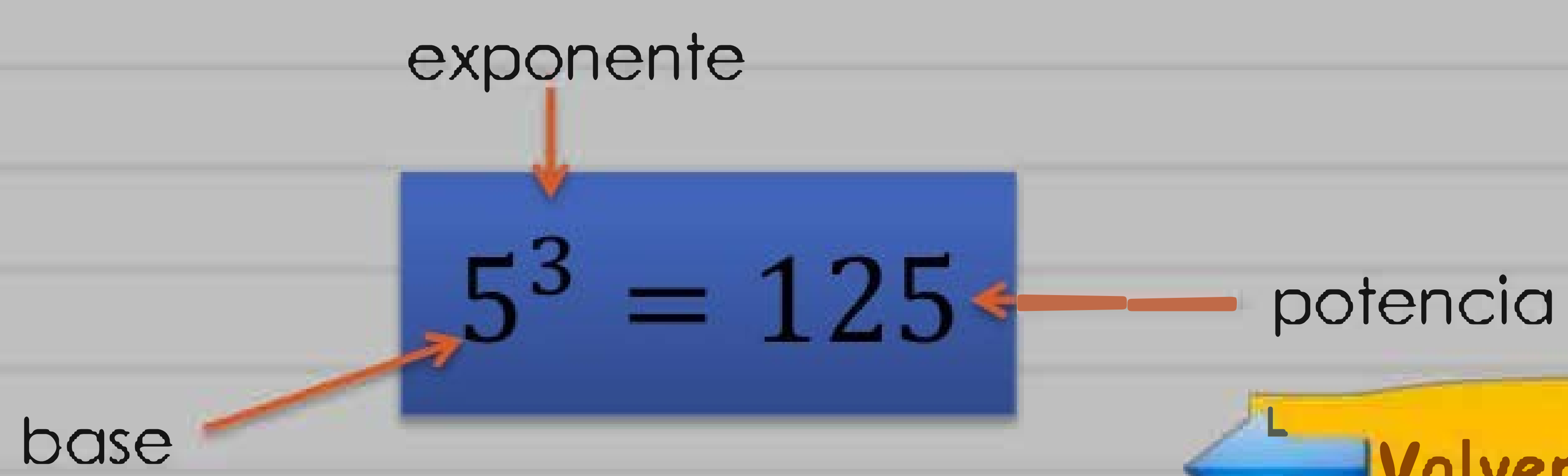
Esta expresión se lee «dos al **cuarta potencia**»

Volver al menú

2. Notación exponencial

La notación exponencial sirve para abreviar un producto y consta de dos elementos: la **base** y el **exponente**.

- La base es el número que se multiplica varias veces por sí mismo.
- El exponente es un número pequeño colocado a la derecha, poco arriba con respecto a la base, e indica las veces que ésta aparece como factor.



Volver al menú

En general...

La potencia de base a y exponente n es el producto de n factores iguales al número a:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ \dots \times a}_{n \text{ factores}}$$

A la operación a^n se le llama **potenciación**.

Volver al menú

3. Propiedades de la potenciación

Las propiedades de la potenciación son las que permiten resolver por diferentes métodos una potencia. Estas son:

Volver al menú

a) Potencia de exponente cero

Para cualquier número a elevado a la potencia 0 es igual a la unidad. Observa:

$$a^0 = 1$$

Por ejemplo:

$3^0 = 1$ $\quad$ $(-2)^0 = 1$ $\quad$ $x^0 = 1$

Volver al menú

b) Potencia de exponente uno

Cualquier número a elevado a la potencia uno es igual a la base. Observa:

$$a^1 = a$$

Por ejemplo:

$7^1 = 7$ $\qquad$ $(-5)^1 = -5$ $\qquad$ $y^1 = y$

Volver al menú

c) Producto de potencias de igual base

Cuando dos potencias tienen la misma base, su producto es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes. Observa:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

donde a es un número cualquiera, y m y n son números enteros positivos.

Por ejemplo:

$3^2 \cdot 3^4 = 3^6$ $\quad x^7 \cdot x^5 = x^{12}$ $\quad 8 \cdot 8^3 = 8^4$

Volver al menú

d) Cociente de potencias de igual base

Para dividir potencias de la misma base a, de exponentes m y n, con $m > n$, restamos los exponentes. Observa:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

donde a es un número cualquiera diferente de 0, y m y n son números enteros positivos.

Por ejemplo:

$$\frac{5^8}{5^2} = 5^{8-2} = 5^6 \qquad \frac{y^7}{y^3} = y^{7-3} = y^4$$

Volver al menú

e) Potencia de una potencia

Para cualquier número a y cualesquiera números enteros positivos m y n:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \ \ldots \times a^m}_{n \text{ veces}} = a^{mn}$$

Es decir, la potencia de una potencia se halla multiplicando los exponentes.

Por ejemplo:

$$(5^3)^2 = 5^6 \qquad (x^5)^4 = x^{20}$$

Volver al menú

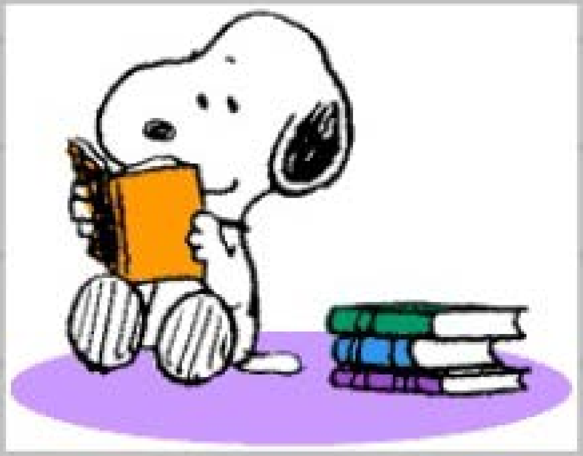
f) Propiedad distributiva

Si dos o más factores se elevan a un exponente, este afecta por igual a cada factor. Observa:

$$(x \cdot y)^n = (x^n)(y^n)$$

Por ejemplo:

$$[(3)(9)]^3 = (3)^3(9)^3$$



¿Qué es una raíz?

- Una raíz corresponde a un número que, al multiplicarse por sí mismo la cantidad de veces que indique el índice, se obtiene la cantidad subradical.
- Sea c un número real y n un número natural mayor que 1. Si $x^n = c$, decimos que **x es la raíz enésima de c,** que se escribe $\sqrt[n]{c}$, es decir, X es el único número real cuya potencia n-ésima es c.

$$X = \sqrt[n]{c} \Leftrightarrow X^n = c \qquad , n \neq 0$$

X : es la raíz enésima de c , donde:

n : índice.

c : cantidad subradical.

Ejemplos:

$4 = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow 4^3 = 64$

$5 = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow 5^3 = 125$

$2 = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow 2^4 = 16$

¿Qué relación podemos establecer entra las potencias y raíces enésimas?

Relación raíz enésima y potencia

- Existe una estrecha relación entre las potencias y las raíces. En efecto, toda raíz puede ser expresada como una potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[p]{a^{q}} = a^{\frac{q}{p}} \quad , p \neq 0$$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{3^{3}} \cdot \sqrt{3} = 3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{4}}$$

$$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$$

Aplica el contenido con la siguiente actividad: guia numeros 3.docx

Propiedades de raíces

- **Multiplicación de raíces de igual índice:** Se conserva el índice y se multiplican los subradicales.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad , n \neq 0$$

- **División de raíces de igual índice:** Se conserva el índice y se dividen los subradicales.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

o bien

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

- **Composición o descomposición de raíces.**

a- Composición: Un factor puede ingresar a una raíz si lo elevo al índice de ella (ingresa como factor del subradical)

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \quad , n \neq 0$$

b- Descomposición: Un factor puede “salir” de una raíz si dicho factor tiene raíz exacta.

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\sqrt[n]{b} \quad , n \neq 0$$

Raíz de una raíz: Se deben multiplicar los índices.

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a} \quad , p \wedge q \neq 0$$

- **Suma y resta de raíces:** Para **sumar o restar** dos radicales, éstos deben ser semejantes.

Radicales semejantes son aquellos que **tienen el mismo índice y el mismo radicando**. Pueden diferir únicamente en el coeficiente que los multiplica.

Para comprobar si dos radicales son semejantes o no, se simplifican si se puede y se extraen todos los factores que sea posible.

La suma o resta de radicales semejantes es otro radical semejante a los datos, cuyo coeficiente es igual a la suma o resta de los coeficientes de los radicales.

Ejemplos:

$$-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} =$$

$$(-1 + 3 - 4 + 8) \cdot \sqrt{2} =$$

$$6\sqrt{2}$$

$$7\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$$

Agrupamos términos semejantes

$$(7 + 8) \cdot \sqrt{5} + (-6 - 3 - 4) \cdot \sqrt{3}$$

$$15\sqrt{5} - 13\sqrt{3}$$

Resolver los ejercicios:

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} =$

b) $5\sqrt{5} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{45} =$

c) $2\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{16} =$

d) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{12} =$

Resolver la siguiente actividad apoyándote en estos apuntes: guia numeros 4.docx

Descomposición de raíces: ejemplo.

A continuación se muestra cómo descomponer raíces cuadradas de números naturales:

Número natural: 12

PASO 1 $\sqrt{12}$

PASO 2 $\sqrt{4 \cdot 3}$

PASO 3 $\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$

PASO 4 $2 \cdot \sqrt{3}$

Sigan la estructura presentada en el esquema para descomponer las siguientes raíces cuadradas:

a. $\sqrt{72}$

b. $\sqrt{250}$

c. $\sqrt{100\ 000}$

d. $\sqrt{\frac{75}{16}}$

e. $\sqrt{\frac{48}{50}}$

f. $\sqrt{\frac{162}{45}}$

g. $\sqrt{0{,}27}$

h. $\sqrt{4{,}50}$

i. $\sqrt{0{,}0012}$

j. $\sqrt{0{,}64}$

Racionalizar raíces cuadradas

- Dada una expresión fraccionaria que contiene una o mas raíces cuadradas no exactas en su denominador, racionalizar la expresión es transformarla de modo que no posea raíces en el denominador, sin cambiar su valor. Para esto, se amplifica por una expresión tal que se elimine la o las raíces del denominador
- Por ejemplo:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{b-c} \qquad \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b}+a\sqrt{c}}{b-c}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $b, c \in \mathbb{R}^{+}$ y $b \neq c$

Actividad:

Racionaliza las siguientes expresiones.

a. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

b. $\frac{6}{\sqrt{13}}$

c. $\frac{8}{\sqrt{5}}$

d. $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

e. $\frac{9}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}$

f. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

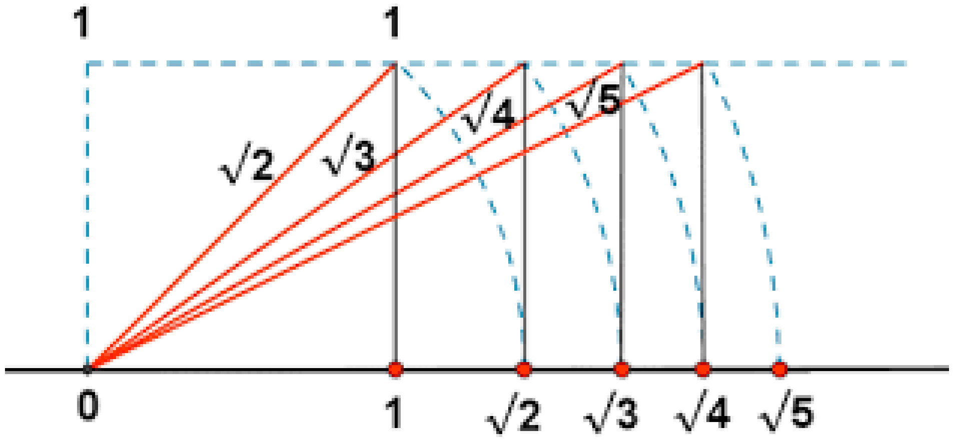
g. $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$

h. $\frac{7}{\sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{3}}}$

Raíces cuadradas y raíces cúbicas

- Los números reales se pueden ubicar en la recta numérica, sin embargo, el proceso para situar un número irracional es distinto al de situar números racionales. Por ejemplo, para ubicar las $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, se puede aplicar el procedimiento usado por Teodoro de Cirene, maestro de Platón.

Actividad: Investigar el procedimiento usado por Cirene y ubicar $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ en la recta numérica utilizando instrumentos geométricos



Materiales necesarios para esta actividad:
- Papel milimetrado
- Regla
- Compás

Observa la siguiente demostración de que $\sqrt{2}$ es un número irracional

Se demostrará que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

1. Supón que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces, se podría escribir de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ y la fracción es irreductible. Esto es: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$
2. De la igualdad se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \quad /()^2 \\ 2 = \dfrac{a^2}{b^2} \end{array}\right] \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

3. De **2** se puede concluir que $\mathbf{a^2}$ es par.
4. De **3** se puede concluir que **a** es par.
5. Como **a** es par, se tiene que $a = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Luego, reemplazando en **2** se tiene $b^2 = 2k^2$.
6. De **5** se concluye que **b** también es par.
7. Como **a** y **b** son pares, tienen factor común 2. Lo concluido en **7** es falso porque **a** y **b** forman una fracción irreductible, por lo que no pueden tener múltiplos comunes.

Actividad: Guíate por este ejemplo y demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional

Operatoria combinada en IR

- Procedimiento que combina todas las operaciones

  1° Pasar a fracción los números mixtos o decimales.
  2° efectuar las operaciones que se encuentran dentro de los paréntesis, llaves, o corchetes; de adentro hacia afuera.
  3° calcular las potencias y raíces.
  4° Efectuar los productos y cocientes.
  5° Realizar las sumas y resta

Lo que conocemos como PAPOMUDAS

Ejemplo: Analiza el siguiente procedimiento

$$M = \sqrt[3]{\left[\frac{\left(4+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{20}+\frac{2}{5}}\right] \cdot \frac{81}{20 \cdot 16}} = \sqrt[3]{\left[\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{\frac{9}{20}}\right] \cdot \frac{81}{20 \cdot 16}} = \sqrt[3]{\left[\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{\frac{9}{20}}\right] \cdot \frac{81}{20 \cdot 16}}$$

$$= \sqrt[3]{\left[\frac{\frac{9^2}{2^2}}{\frac{9}{20}}\right] \cdot \frac{81}{20 \cdot 16}} = \sqrt[3]{\left[\frac{9^2 \cdot 20}{2^2 \cdot 9}\right] \cdot \frac{81}{20 \cdot 16}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 81}{4 \cdot 16}} = \sqrt[3]{\frac{729}{64}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9^3}{2^6}} = \frac{9^{\frac{3}{3}}}{2^{\frac{6}{3}}} = \frac{9^1}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Actividad: Resolver los ejercicios

- $\sqrt[3]{-\frac{1728}{27}}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^{6}}}}$
- $\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$
- $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{7}{12}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{15}} \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{3^{2}}}$
- $\left(\dfrac{\frac{8}{7}-\frac{1}{4}-\frac{7}{9}-\frac{1}{6}}{\frac{4}{7}-\frac{5}{12}}\right)^{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$

Raíces enésimas

Como sabes, $\sqrt{25}=5$ ya que $5^2 = 25$. Por otra parte, $5=5^{\frac{2}{2}}=\left(5^2\right)^{\frac{1}{2}}=25^{\frac{1}{2}}$. Luego, se puede afirmar que $\sqrt{25}=25^{\frac{1}{2}}$. Lo anterior se cumple para otras raíces cuadradas, por ejemplo: $\sqrt{36}=6=6^{\frac{2}{2}}=\left(6^2\right)^{\frac{1}{2}}=36^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{49}=7=7^{\frac{2}{2}}=\left(7^2\right)^{\frac{1}{2}}=49^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{144}=12=12^{\frac{2}{2}}=\left(12^2\right)^{\frac{1}{2}}=144^{\frac{1}{2}}$; etc.

Al generalizar esta relación entre raíces cuadradas y potencias de exponente racional, se tiene que $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$. Sin embargo, esta relación también se cumple para otros índices de raíces. Por ejemplo: $\sqrt[3]{27}=3=3^{\frac{3}{3}}=\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}=27^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{625}=5=5^{\frac{4}{4}}=\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}}=625^{\frac{1}{4}}$; etc.

En una raíz enésima $\sqrt[n]{a}$, su índice n es un numero natural y su cantidad subradical a es un numero racional si n es impar y mayor o igual que cero si n es par

En la relación $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m=a^{\frac{m}{n}}, a^m si\ n\ es\ par\ y\ a^m \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}\ si\ n\ es\ par.$ Además se debe considerar que $a^m \neq 0^0$ y $m \in \mathbb{Z}$

Algunas propiedades

$$\sqrt[n]{1}=1$$
$$\sqrt[n]{0}=0$$
$$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a^{\frac{n}{n}}=a\,;a\geq 0$$
$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

Algunas propiedades utilizadas en el cálculo de raíces son:

Multiplicación de raíces con igual índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

División de raíces con igual índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Potencia de una potencia

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo: aplicación de propiedades

$$\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{-4}}}{\sqrt[10]{x^7}:\sqrt[5]{x^2}}=\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{7}{10}}:x^{\frac{2}{5}}}=\frac{x^{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}}}{x^{\frac{7}{10}-\frac{2}{5}}}=\frac{x^{\frac{7}{10}}}{x^{\frac{3}{10}}}=\frac{\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[10]{x^3}}$$

$$=\sqrt[10]{\frac{x^7}{x^3}}=\sqrt[10]{x^4}=\sqrt[5]{x^2}$$

Observa muy bien cada paso del ejercicio para luego aplicarlo en la siguiente actividad: guia numeros 7.docx

Logaritmos

- En las calculadoras científicas puedes encontrar la tecla log que representa el logaritmo en base 10 de un número. Utilizándola podrás comprobar que:

$$\log 2 = 0{,}30102 \ldots$$
$$\log 5 = 0{,}69897 \ldots$$
$$\log 500 = 2{,}698987 \ldots$$

- ¿Qué opinas de la afirmación: Todo numero real positivo r se puede escribir como una potencia de base 10 y exponente x, es decir $10^x = r$?
- ¿Cómo escribirías el número 1000 en base 10?¿y en base 5?

Relación POTENCIA-RAIZ-LOGARITMO

$$a = b^n \leftrightarrow b = \sqrt[n]{a} \leftrightarrow n = \log_b a$$

POTENCIA | RAÍZ | LOGARITMO

El logaritmo también es una operación inversa de las potencias, consiste en calcular el exponente cuando se conocen la base y la potencia

Definición

- $Si\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{+}, con\ a \neq 1\ y\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que

$$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$$

Donde:

- a es la base del logaritmo
- b el argumento

Y se lee “*Logaritmo de b en base a es igual a n*”

Ejemplos:

$$\log_2 16 = 4, ya\ que\ 2^4 = 16$$
$$\log_4 16 = 2, ya\ que\ 4^2 = 16$$
$$\log_{10} \frac{1}{10} = -1, ya\ que\ 10^{-1} = \frac{1}{10}$$
$$\log_{\frac{5}{2}} 1 = 0\ ya\ que\ \left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$$

Actividad: Interpreta cada uno de los enunciados y completa con la potencia correspondiente

a. $\log_5 25 = 2$, ya que __________ .

b. $\log \dfrac{1}{100} = -2$, ya que __________ .

c. $\log_{\frac{3}{2}} \dfrac{9}{4} = 2$, ya que __________ .

d. $\log_{\frac{1}{1.000}} \dfrac{1}{1.000} = 1$, ya que __________ .

e. $\log_{0,1} 0,1 = 1$, ya que __________ .

f. $\log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$, ya que __________ .

g. $\log_7 \sqrt[3]{7} = \dfrac{1}{3}$, ya que __________ .

h. $\log_{\frac{2}{5}} \dfrac{25}{4} = -2$, ya que __________ .

Propiedades de los logaritmos

- $Si\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ \in \mathbb{R}^{+}, con\ a \neq 1$, se cumplen las siguientes propiedades

1. $a^{\log_a b} = b$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a = 1$
4. $\log_a a^n = n$
5. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
6. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
7. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
8. $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}, n \in \mathbb{N}$
9. $\log_a b = \log_a b \Rightarrow b = c$

Actividad: Verificar cada una de las propiedades de logaritmos mediante un ejemplo en tu cuaderno

Actividad 1: Calcular por la definición de logaritmo el valor de y.

1. $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}25 = y$

2. $\log_{\sqrt{5}} 125 = y$

3. $log\, 0{,}001 = y$

4. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$

Actividad 2: Calcula el valor de x aplicando la definición de logaritmo.

1. $\log_2 32 = x$
2. $\log_9 \frac{1}{3} = x$
3. $\log_9 \sqrt[4]{3} = x$
4. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = x$
5. $\log_x 81 = -4$
6. $\log_2 x^3 = 6$

Actividad 3: Resolver

- 1. El logaritmo de un cierto número en base 3 es 1/2. Hallar dicho número.
- 2. El logaritmo de una cierta base del número 81 es -4. Calcula la base.
- 3. Si se multiplica el número n por 36, su logaritmo en cierta base aumenta en dos unidades. ¿Cuál es la base? ¿Y si el logaritmo disminuyese en dos unidades?
- 4. Encuentra la base del sistema de logaritmos en la que el logaritmo de 48 excede al logaritmo de 6 en 3 unidades.
- 5. El logaritmo de base 10 de cierto número es 1. Hallar dicho número.