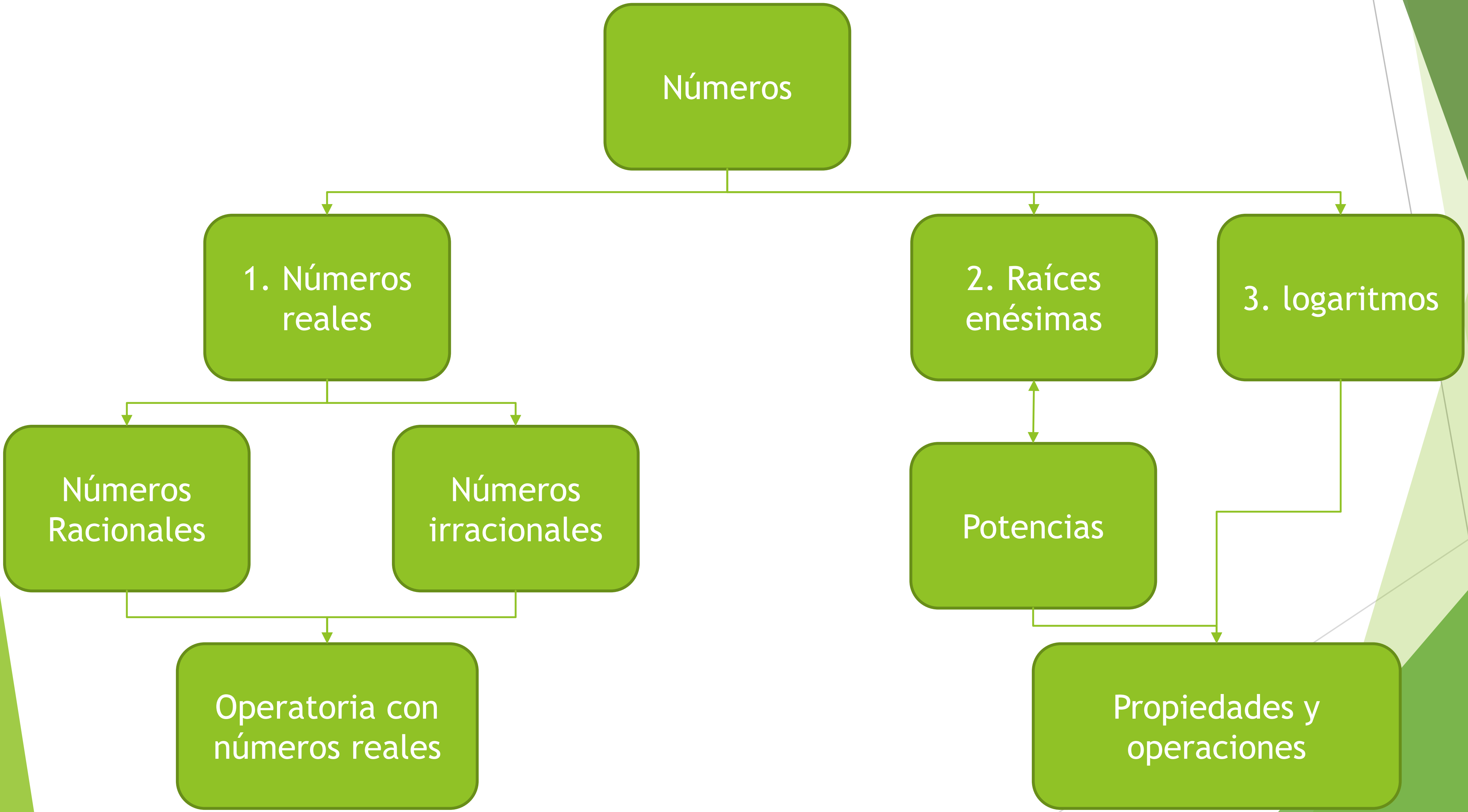
Números Reales y su propiedades

Qué contenidos trabajaremos en esta unidad



Recordemos...

- Los números naturales son los que utilizamos en la vida cotidiana para contar u ordenar.
- Los **números naturales** son **ilimitados**, si a un número natural le sumamos 1, obtenemos otro número natural.

$\mathbb{N}$ Los elementos del conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ se denominan **"Números Naturales"**.

$\mathbb{N}_0$ Los **"Números Cardinales"** corresponden a la unión del conjunto de los números naturales con el cero. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

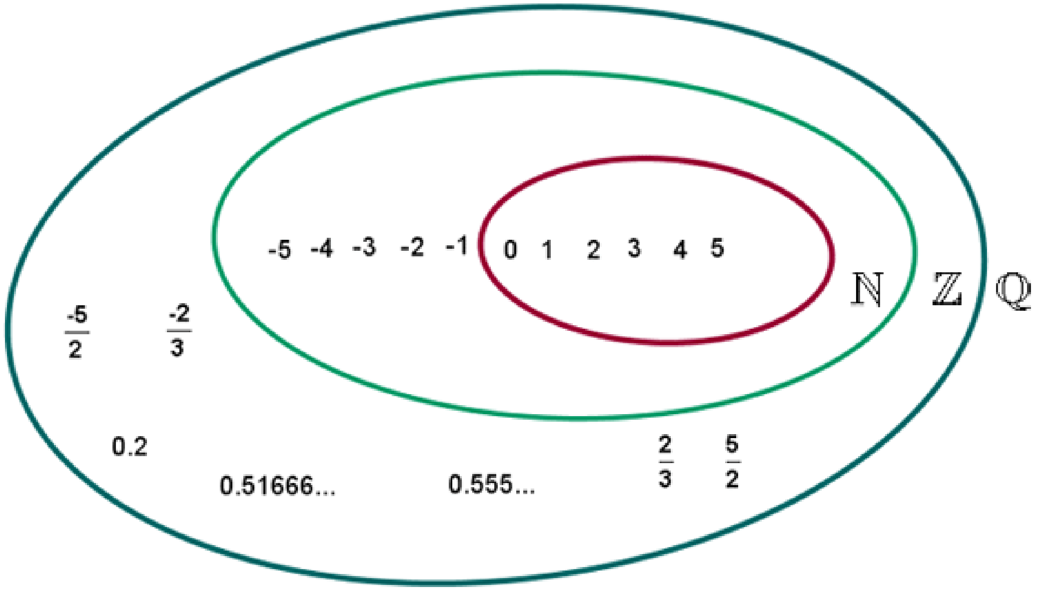
Con los números naturales no era posible realizar diferencias donde el minuendo era menor que el que el sustraendo, pero en la vida nos encontramos con operaciones de este tipo donde a un número menor hay que restarle uno mayor. La necesidad de representar el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, profundidades con respecto al nivel del mar, etc. Las anteriores situaciones nos obligan a ampliar el concepto de números naturales, introduciendo un nuevo conjunto numérico llamado números enteros.

$\mathbb{Z}$ Los elementos del conjunto **$\mathbb{Z}$ = {...,-2,-1, 0, 1, 2,...}** se denominan **"Números Enteros"**.

Los números racionales son todos aquellos números de la forma $\frac{a}{b}$ con **a** y **b** números enteros y **b** distinto de cero. El conjunto de los números racionales se representa por la letra **Q**.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;/\; a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Se considera el conjunto de los números enteros un subconjunto de los números racionales. Así:



Ahora, considerando la definición de número racional ¿Todos los números se podrán escribir como fracción?

- El número $\pi = 3{,}1415926 \ldots$ es un número decimal infinito, el cual no se puede escribir como fracción
- Las raíces cuadradas inexactas son números decimales infinitos por lo tanto tampoco se pueden escribir como fracción
  - $\sqrt{2} = 1{,}4142213 \ldots$
  - $\sqrt{3}$
  - $\sqrt{5}$
  - Etc
- Existen muchos otros números que no se pueden escribir como fracción por lo tanto no pertenecen al conjunto de los números racionales

Actividad

Clasificar los siguientes números en racionales o irracionales según corresponda:

1. $1,0100100010001\ldots$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $-\sqrt{36}$
4. 0
5. $\sqrt{15}$
6. $4,567567567567567\ldots$
7. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
8. $\frac{2\cdot 1,2\overline{34}}{1,\overline{1}}+\frac{37,\overline{6}}{37,\overline{6}}$
9. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt[3]{8}$
10. $\frac{10}{\frac{2}{7}+\frac{4}{3}}+\frac{\sqrt{8}}{17}$
11. $\pi\cdot\pi$
12. $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}$

Puedes ayudarte por la calculadora para agilizar tus cálculos
El objetivo de esta actividad es determinar que número es decimal infinito no periódico

Aplicaciones de los números irracionales

a. Calcular la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm.

b. Medir la masa corporal de una persona en kilogramos.

c. Calcular la medida de un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm y el otro cateto mide 4 cm.

d. Calcular el cociente entre la longitud de una circunferencia y la medida de su diámetro.

e. Calcular el valor de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Puedes usar calculadora.

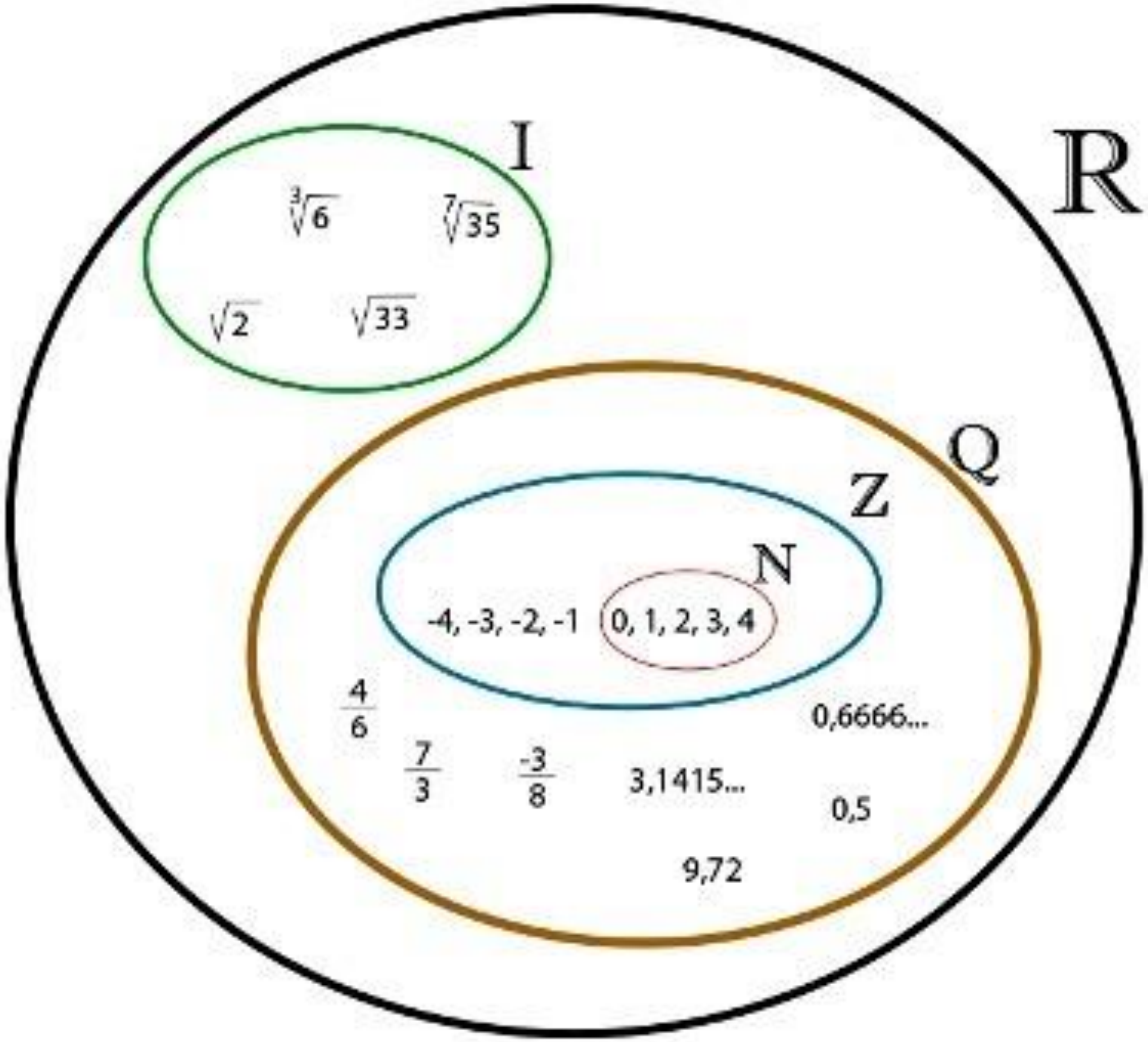
f. Calcular el valor de $\sqrt{65.536}$. Puedes usar calculadora.

Números Reales

El conjunto de los números reales es infinito y ordenado y tiene como elementos tanto los números racionales como los irracionales. De manera matemática se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Al igual que el conjunto de los racionales, los números reales son densos, esto es, entre dos números reales cualesquiera existe otro número real. Finalmente con los números reales la recta numérica está completa, es decir, a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real.



N= números naturales (enteros positivos)
Z= números enteros (positivos y negativos)
Q= números racionales (fracciones y decimales)
I= Irracionales

Resuelve la actividad:
guia numeros 2.docx

Propiedades de los números reales

El conjunto de los números reales tiene estructura algebraica de cuerpo, esto es, que para las operaciones definidas en IR, adición(+) y multiplicación(·) se cumplen las siguientes propiedades:

1. Cerrado

Si tomo dos números reales y los sumo o multiplico, ambos resultados corresponden a un número real.
Por ejemplo:

$$5 + 2 = 7 \in R$$
$$5 \cdot 2 = 10 \in R$$

En general, para todo $x, y \ \in IR$, entonces:

$$x \ + \ y \ \in \ R$$
$$x \ \cdot \ y \ \in \ R$$

2. Asociativo

Si tengo 3 o más números, la operación que realice es independiente de la agrupación que tengan los números.
Por ejemplo:

$$(2 + 3) + 5 = 10 = 2 + (3 + 5)$$
$$(2 \cdot 3)5 = 30 = 2(3 \cdot 5)$$

En general, para todo $x, y, z \in IR$, entonces:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$(x \cdot y)z = x(y \cdot z)$$

3. Conmutativo

La operación es independiente del orden de los números.
Por ejemplo:

$$4 + 2 = 6 = 2 + 4$$
$$4 \cdot 2 = 8 = 2 \cdot 4$$

En general, para todo $x, y \in IR$, entonces:

$$x + y = y + x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$

4. Distributivo

La suma de dos sumandos, multiplicada por un número, es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número.
Por ejemplo:

$$2 \cdot (1 + 5) = 12 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5$$

En general, para todo $x, y, z \in IR$, entonces:

$$x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

5. Neutro

Al operar cualquier elemento del conjunto con el elemento neutro el resultado es el elemento original.
Por ejemplo:

$$2 + 0 = 2$$
$$3 \cdot 1 = 3$$

En general, para todo $x \in IR$, entonces:

$$Existe\ 0 \in IR\ tal\ que\ x + 0 = 0 + x = x$$
$$Existe\ 1 \in IR\ tal\ que\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

6. Inverso

Al operar cualquier elemento del conjunto con el elemento inverso el resultado es el elemento neutro correspondiente a cada operación. Por ejemplo:

$$2 + (-2) = 0$$

$$3 \cdot 3^{-1} = 1$$

En general, para todo x ∈ R, entonces:

$$Existe\ -x \in IR\ tal\ que\ x + (-x) = (-x) + x = 0$$

$$Existe\ x^{-1} = \frac{1}{x} \in IR - \{0\}\ tal\ que\ x \cdot x^{-1} = 1$$

Operaciones en IR

Como mencionamos todo número real se puede clasificar en racional o irracional. Al trabajar con las operaciones básicas en este conjunto obtenemos las siguientes conclusiones:

- $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Por ejemplo: $\frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} + \mathbb{I} = \mathbb{I}$. Por ejemplo: $4 + \sqrt{3} \in \mathbb{I}$
- $\mathbb{I} + \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ ó $\mathbb{I}$. Por ejemplo: $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ ó $\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Por ejemplo: $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1 \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{I} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ ó $\mathbb{I}$. Por ejemplo: $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3 \in \mathbb{Q}$ ó $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{6} \in \mathbb{I}$
- $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I}$, si el número de $\mathbb{Q}$ es distinto de cero. Por ejemplo: $2 \cdot \pi = 2\pi \in \mathbb{I}$

Actividad

Juan realizó el siguiente razonamiento matemático:
Dados a y b dos números cualesquiera. Supongamos que $a = b$, entonces:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= ab \\
a^2 + (a^2 - 2ab) &= ab + (a^2 - 2ab) \\
2a^2 - 2ab &= a^2 - ab \\
2a(a - b) &= a(a - b) \\
2a &= a \\
2 &= 1
\end{aligned}
$$

¿Dónde está el error que cometió Juan?