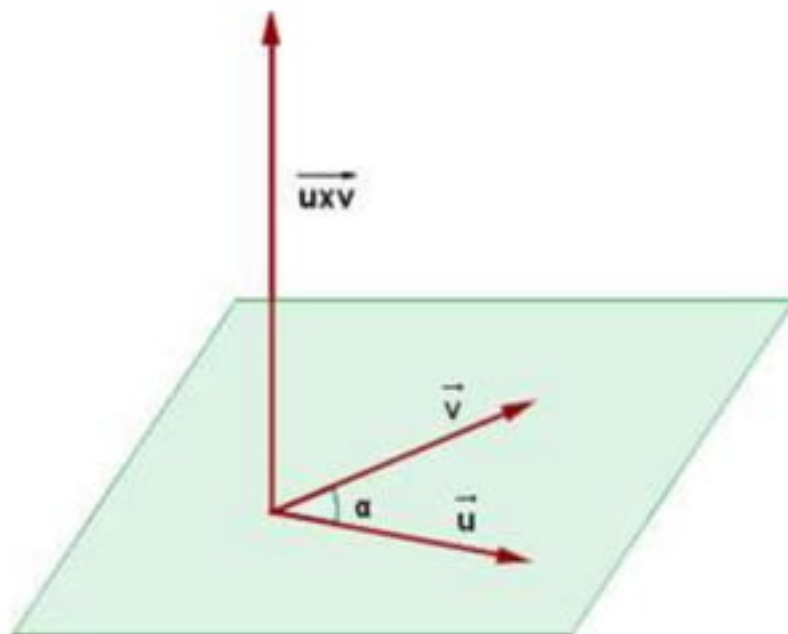


Producto cruz

El **producto cruz** o **producto vectorial** de dos vectores es otro **vector** cuya **dirección** es **perpendicular** a los dos vectores y su **sentido** sería igual al avance de un **sacacorchos** al girar de u a v . Su **módulo** es igual a:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$$



El **producto cruz** se puede expresar mediante un **determinante**:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Ejemplos

Calcular el **producto cruz** de los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, hallar el **producto cruz** de dichos vectores. Comprobar que el vector hallado es **ortogonal** a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \quad (-2, -2, 4) \cdot (3, -1, 1) = -6 + 2 + 4 = 0$$

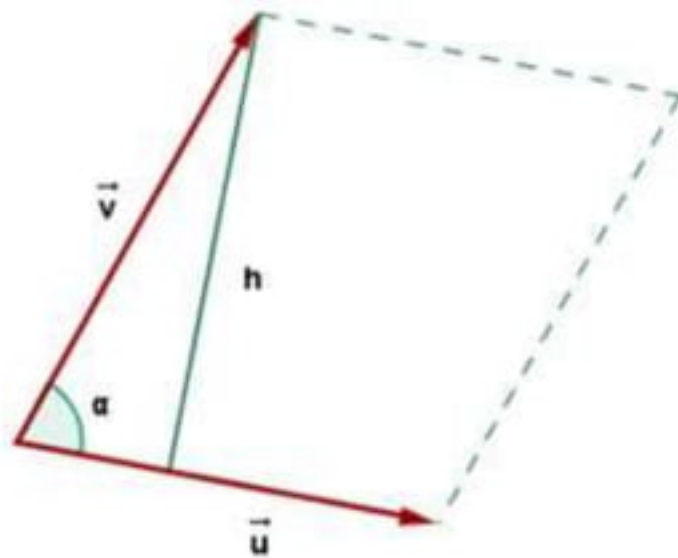
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \quad (-2, -2, 4) \cdot (1, 1, 1) = -2 - 2 + 4 = 0$$

El producto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Área del paralelogramo

Geométricamente, el **módulo del producto cruz** de dos vectores coincide con el **área del paralelogramo** que tiene por lados a esos vectores.

$$A = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



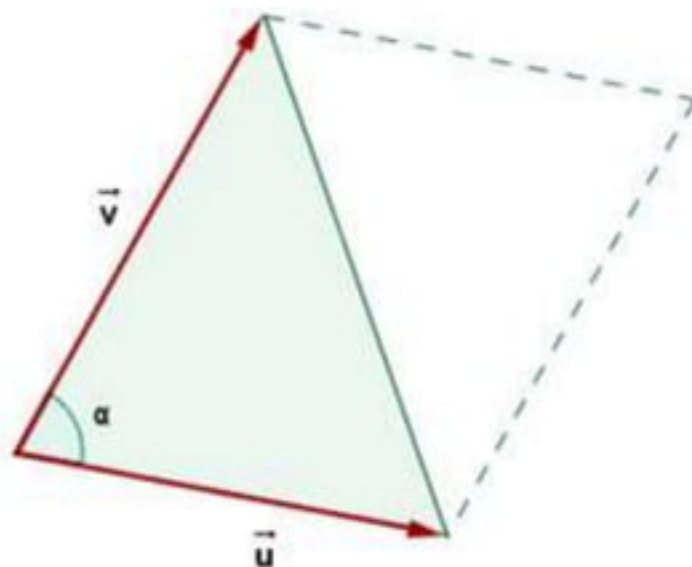
Ejemplo

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)_y$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294} u^2$$

Área de un triángulo



$$A = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$$