MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

¿Cómo mutiplico un vector por un escalar?

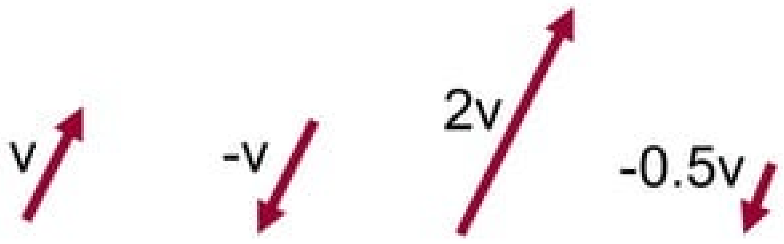
- Para multiplicar un vector por un escalar (un número real) mutiplique cada componente por el escalar.

Si u = $\langle a, b \rangle$ y k es un escalar, entonces

$$k\vec{u} = k\langle a, b \rangle = \langle ka, kb \rangle$$

Multiplicación escalar geométricamente interpretada

- Geométricamente, si un vector **v** se multiplica por un:
  - escalar k positivo
    - kv tiene la misma dirección que **v**
  - escalar k negativo
    - kv tiene la dirección opuesta que **v**



PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Para todos los vectores **u**, **v** y todos los escalares m y n

Propiedad Asociativa $m(n\mathbf{u}) = (mn)\mathbf{u}$

Propiedad Distributiva $m(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = m\mathbf{u} + m\mathbf{v}$

Identidad Multiplicativa $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

EJEMPLOS

Realiza las operaciones indicadas

Sea $u = \langle 4,-3 \rangle$, $v = \langle 2,3 \rangle$ y $w = \langle 0,-5 \rangle$

encuentre:

a) 3u = $3\langle 4,-3 \rangle = \langle 3 \cdot 4, 3 \cdot -3 \rangle = \langle 12,-9 \rangle$

b) -2u = $-2\langle 4,-3 \rangle = \langle -2 \cdot 4, -2 \cdot -3 \rangle = \langle -8,6 \rangle$

c) -v = $-\langle 2,3 \rangle = \langle -2,-3 \rangle$

d) 2v + -w = $2\langle 2,3 \rangle + -\langle 0,-5 \rangle$

$$= \langle 4,6 \rangle + \langle 0,5 \rangle = \langle 4,11 \rangle$$

Realiza las operaciones indicadas

Sea $u = \langle 4,-3 \rangle$, $v = \langle 2,3 \rangle$ y $w = \langle 0,-5 \rangle$ encuentre:

e) 3(2u) = $(3 \cdot 2)\langle 4,-3 \rangle = 6\langle 4,-3 \rangle = \langle 24,-18 \rangle$

f) -2(u + v) = $-2u + -2v = \langle -8,6 \rangle + \langle -4,-6 \rangle$

$$= \langle -12,0 \rangle$$

g) 1w = $\langle 0,-5 \rangle$


GEOMETRÍA ANALÍTICA
PRODUCTO ESCALAR DE DOS
VECTORES

Expresión analítica del producto escalar

Es el número que resulta de la suma del producto de sus componentes.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2$$

Ejemplo

$$\vec{u} = (3,0) \quad \vec{v} = (5,5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 = 15$$

El módulo de un vector

Es la longitud del segmento que separa el punto inicial del extremo final del vector , y que cuantificaría la intensidad de la magnitud vecorial que representase.

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1\cdot u_1 + u_2\cdot u_2} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$$

Ejemplo

$$\vec{u} = (3,0) \quad \vec{v} = (5,5)$$

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{3\cdot 3 + 0.0} = 3$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{5\cdot 5 + 5.5} = 5\sqrt{2}$$

Un vector unitario, tiene por módulo la unidad.

Definición de producto escalar

El producto escalar de dos vectores es un número real que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\alpha$$

Ejemplo

$$\vec{u} = (3,0) \quad \vec{v} = (5,5) \quad \acute{a}ngulo\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 45^{o}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2} \cdot \cos 45^{o} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15$$

Expresión analítica del ángulo de dos vectores

Despejando el coseno del ángulo de la definición de producto escalar,

$$\cos\alpha = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} \cdot \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}$$

Ejemplo

$$\vec{u} = (3,0) \quad \vec{v} = (5,5)$$

$$\cos\alpha = \frac{3 \cdot 5 + 0.5}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

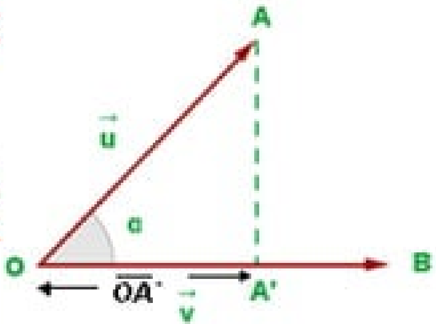
$$arc.\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

Interpretación geométrica del producto escalar

El producto de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. La proyección es la "sombra" que un vector marca en el segmento del otro, cuando ambos parte del mismo punto y se traza una perpendicular desde el extremo de un vector hasta la dirección del otro.

$$\cos\alpha = \frac{OA'}{\left|\vec{u}\right|} \qquad OA' = \left|\vec{u}\right| \cdot \mathrm{co}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{v}\right| \cdot OA' \qquad OA' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$$



Ejemplo

$$\vec{u} = (2,1) \qquad \vec{v} = (-3,4)$$

$$P(\vec{u},\vec{v}) = \frac{2\cdot(-3)+1\cdot 4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = -\frac{2}{5}$$