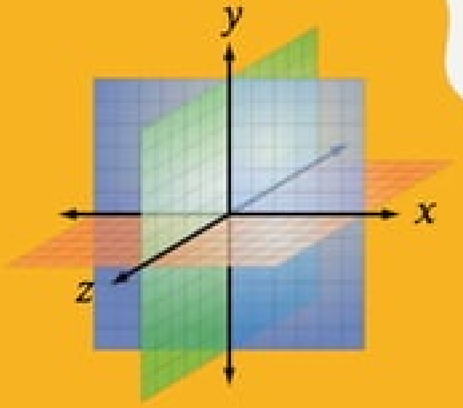
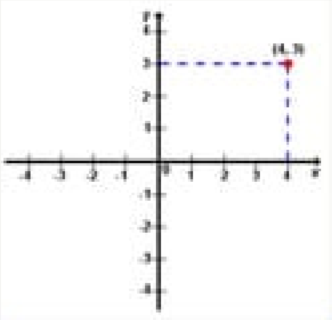
SISTEMA DE COORDENADAS





Desde tiempos remotos, la humanidad tiene la necesidad de orientarse de alguna manera para ubicar lugares y protegerse del clima, con la finalidad de localizar espacios en donde conseguir alimentación para subsistir, guiándose por árboles, rocas, ríos o plantas, etc. Posteriormente, se utilizaron las estrellas para dirigirse a lugares conocidos, todo ello es parte de los conocimientos básicos que posteriormente utilizaron los estudiosos en diferentes campos del conocimiento. En particular, en el siglo XVII René Descartes introdujo el Sistema de Coordenadas Cartesianas o Sistema de Coordenadas Rectangulares en dos dimensiones y tres dimensiones, éste sistema tiene la ventaja de localizar puntos en el plano o el espacio, por ejemplo en dos dimensiones se representar segmentos conocidas las coordenadas de sus extremos, polígonos conocidas las coordenadas de los vértices, además en este sistema de coordenadas identificamos líneas rectas o curvas que son la representación grafica de ecuaciones o relaciones o funciones.

Sistema de coordenadas polares. El sistema se fundamente en los estudios realizados por el astrónomo Hiparco (190 ac - 20 ac) y el matemático Arquímedes , siendo sistematizado por Isaac Newton en el siglo XVII (método de fluxiones), aunque el término coordenadas polares se atribuye a Gregorio Fontana y utilizado en el siglo XVIII por los matemáticos italianos. En coordenadas polares, usando la ecuación polar y graficando encontraremos graficas de espirales, cardioides, rosas, lemmiscatas..etc.

Coordenadas Geográficas

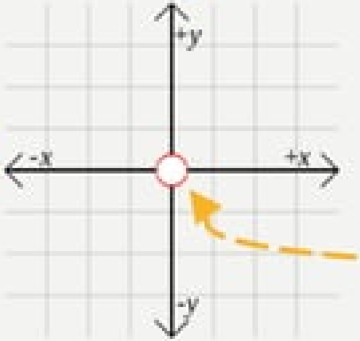
En Geografía es común utilizar el sistema de coordenadas geográficas que se establecen a partir del Ecuador Terrestre y el meridano de Greenwich y cuyas medidas latitud y longitud se miden en grados minutos y segundos.

SISTEMA DE COORDENADAS

Un sistema de coordenadas es un conjunto de valores y puntos que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto en un tipo de espacio geométrico o más generalmente variedad diferenciable.
A este sistema también se le conoce como ejes de coordenadas o ejes cartesianos.

El eje vertical se llama eje Y o eje de ordenadas.

El eje horizontal se llama eje X o eje de abscisas.



El punto 0, donde se cortan los dos ejes, es el origen de coordenadas.

TIPOS DE SISTEMA DE COORDENADAS

Sistema de coordenadas cartesianas

Sistema de coordenadas polares

Sistema de coordenadas esféricas

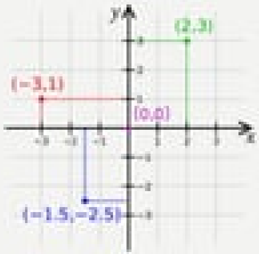
Sistema de coordenadas cilíndricas

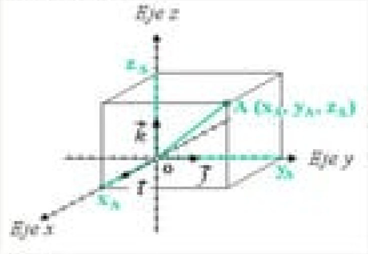
Sistema de coordenadas geográficas

Sistema de coordenadas cartesianas

Las coordenadas cartesianas son las más utilizadas, este tipo de coordenadas se ubican en un plano cartesiano al que están asociados los ejes 'x', 'y' y 'z'.

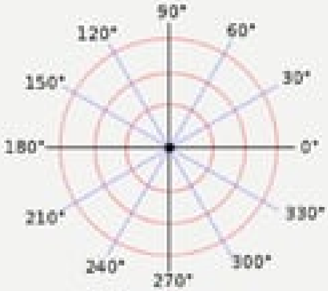
Todos los ejes coordenados deben estar escalados bajo el mismo criterio y ser perpendiculares entre sí, estos ejes pueden conformar un sistema bidimensional o tridimensional dependiendo de si está formado por dos o tres ejes.

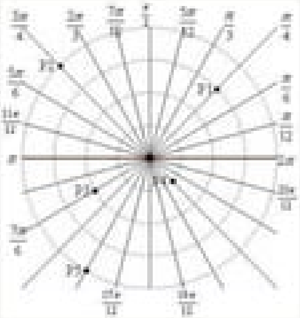




Sistema de coordenadas polares

Las coordenadas polares son un sistema de coordenadas bidimensionales, en este sistema la ubicación de un punto en el espacio está determinada por un ángulo y una distancia (magnitud)



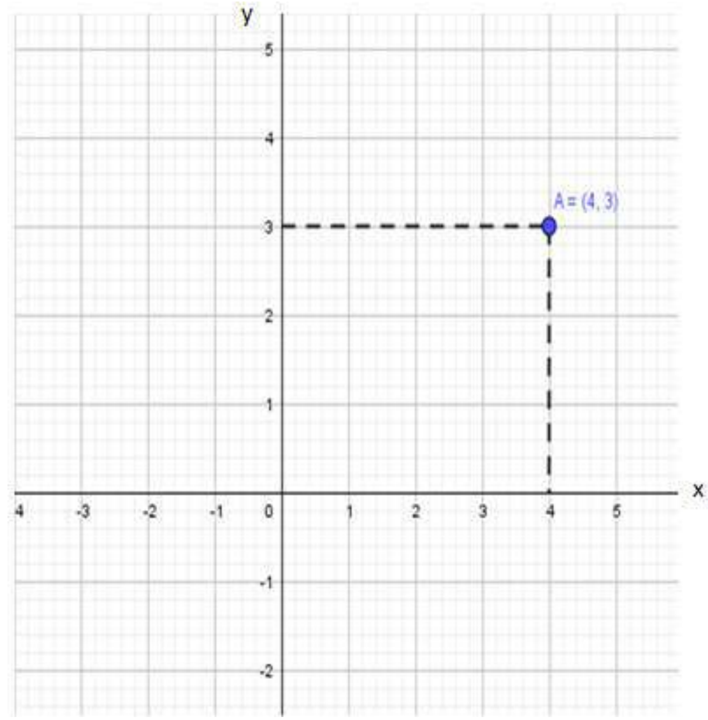


Coordenadas Rectangulares

- Un sistema de coordenadas rectangulares también se denomina cartesiano en honor a René Descartes.
- Consta de dos rectas llamadas ejes que se cortan perpendicularmente en un punto llamado origen formando cuatro cuadrantes.
- La recta horizontal se llama eje de las abscisas o de las x.
- La recta vertical se llama eje de las ordenadas o de las y.
- Un punto localizado en el plano cartesiano esta formado por un par ordenado (x,y) abscisa, ordenada.
- La abscisa es la distancia dirigida medida desde el eje “y” hasta el punto definido.
- La ordenada es la distancia dirigida medida desde el eje “x” hasta el punto definido.

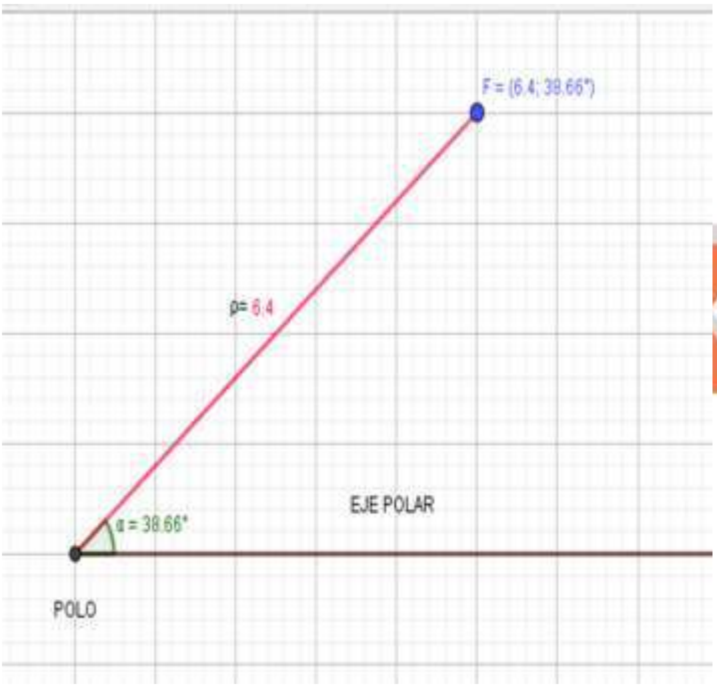
Coordenadas Rectangulares

- Esto es, por ejemplo: el punto A(3,3)
- En el plano cartesiano, en primer lugar se localiza la abscisa x , posteriormente la ordenada y.



Coordenadas polares.

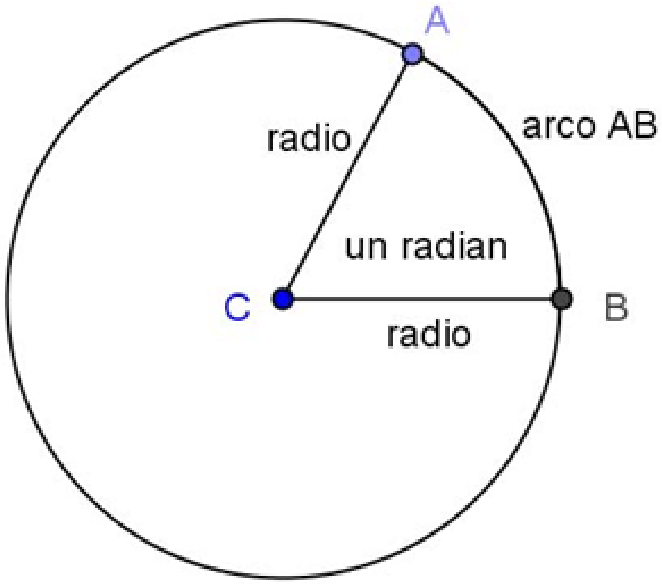
- Una coordenada polar está compuesta por un par ordenado (ρ, α) radio vector, ángulo vectorial. La cual se grafica con base en un eje horizontal llamado “eje polar”, que tiene un punto inicial llamado “polo”. Por ejemplo el punto F(6.4, 38.66°).



RADIAN.

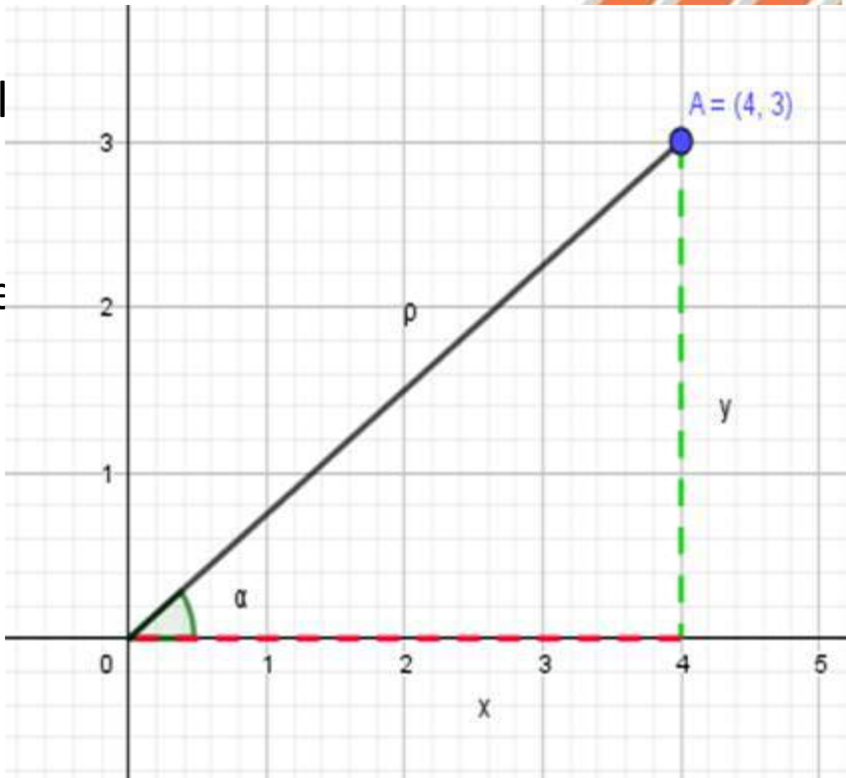
Otra manera de localizar puntos en el Plano Polar es cuando el "ángulo "es el equivalente a radianes".

Definición de radian. Cuando se tiene el ángulo central en un círculo y la longitud del arco de circunferencia es igual a la longitud del radio de define un radián.



Conversión de coordenadas rectangulares y polares.

- Para graficar una coordenada polar en primer lugar, se mide el ángulo vectorial α, y posteriormente se mide desde el polo y hasta la abertura del ángulo la magnitud del radio vector ρ.
- Si se parte de que al localizar una coordenada rectangular se tiene la siguiente figura: conociendo a x=4, y=3



Se forma un triángulo rectángulo del cual se pretende conocer la hipotenusa (radio vector), y se conocen los catetos (x,y). Entonces, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Y el ángulo vectorial se determina:

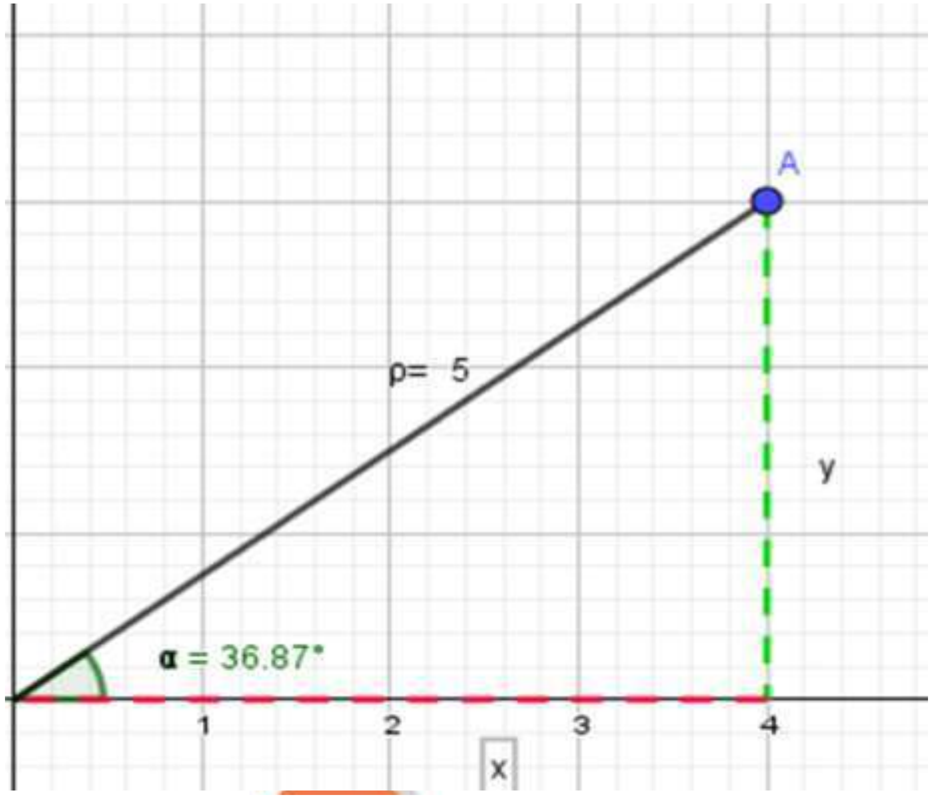
$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Y con los datos anteriores:

$$\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.8698°$$

Para convertir coordenadas polares a rectangulares la figura formada es un triángulo rectángulo pero ahora la hipotenusa y el ángulo de elevación es el conocido, y lo que se pretende conocer serán los catetos:



$$sen\alpha = \frac{y}{\rho}\ ;\ \ y = \rho sen\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\rho}\ ;\ \ x = \rho cos\alpha$$

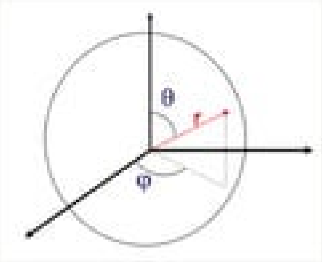
Y con los datos de la figura:

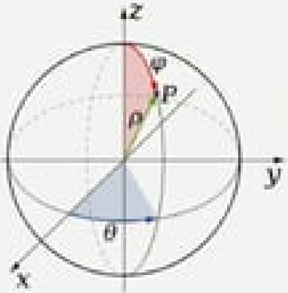
x=5 sen(36.87°)=4

y=5 cos(36.87°)=3

Sistema de coordenadas esféricas

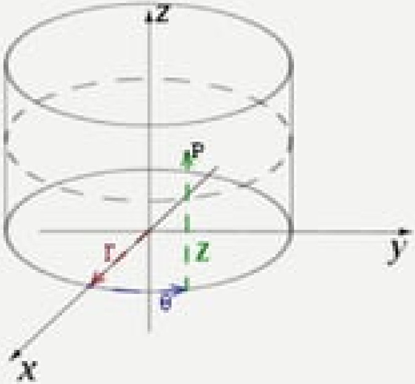
El sistema de referencia está compuesto por tres ejes perpendiculares entre sí y un punto "O", denominado origen, que corresponde al punto de intersección de los tres ejes. De esta forma un punto "P" queda representado por el trio ordenado (ρ, φ, z)





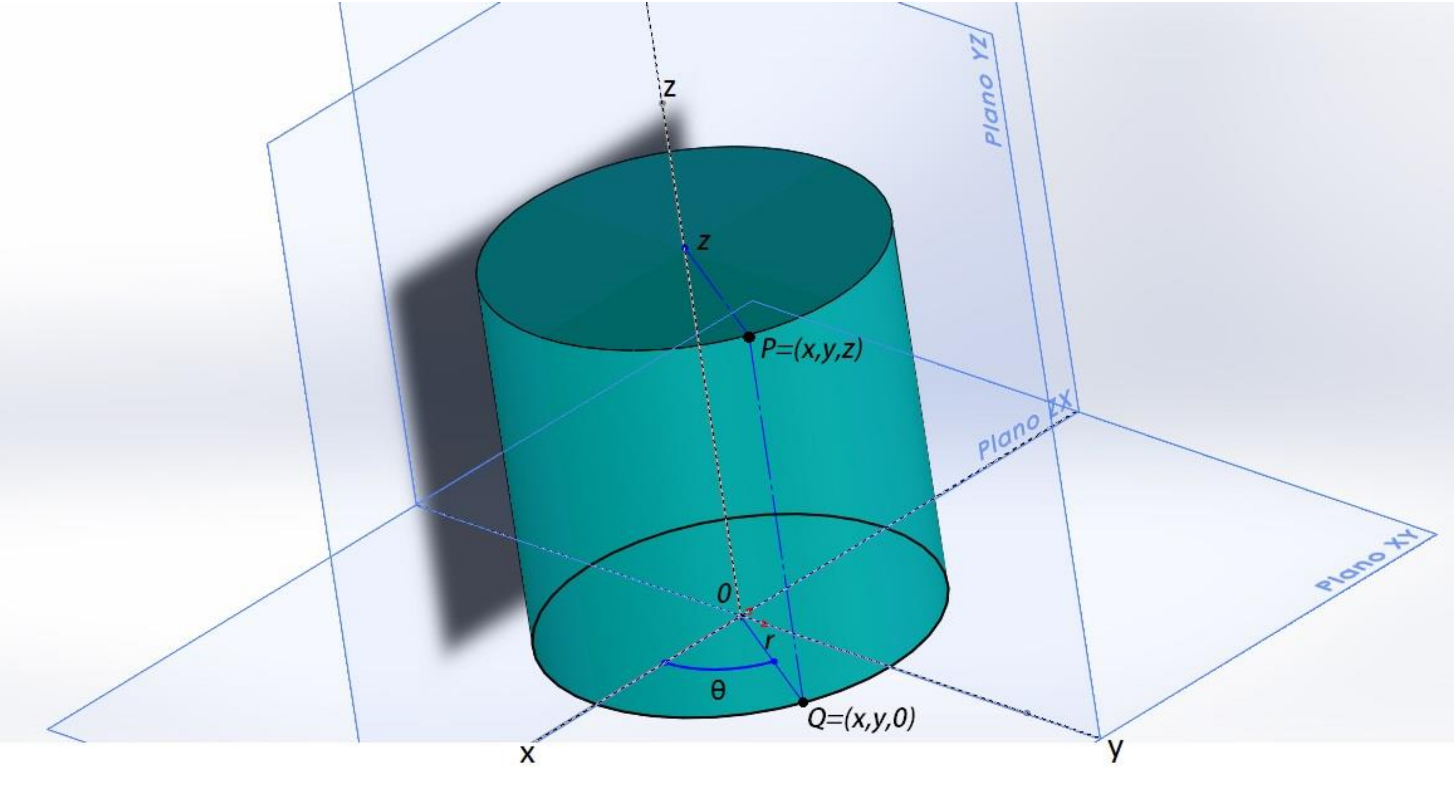
Sistema de coordenadas cilíndricas

El sistema de coordenadas cilíndricas se usa para representar los puntos de un espacio euclídeo tridimensional. Resulta especialmente útil en problemas con simetría axial.



COORDENADAS CILÍNDRICAS:

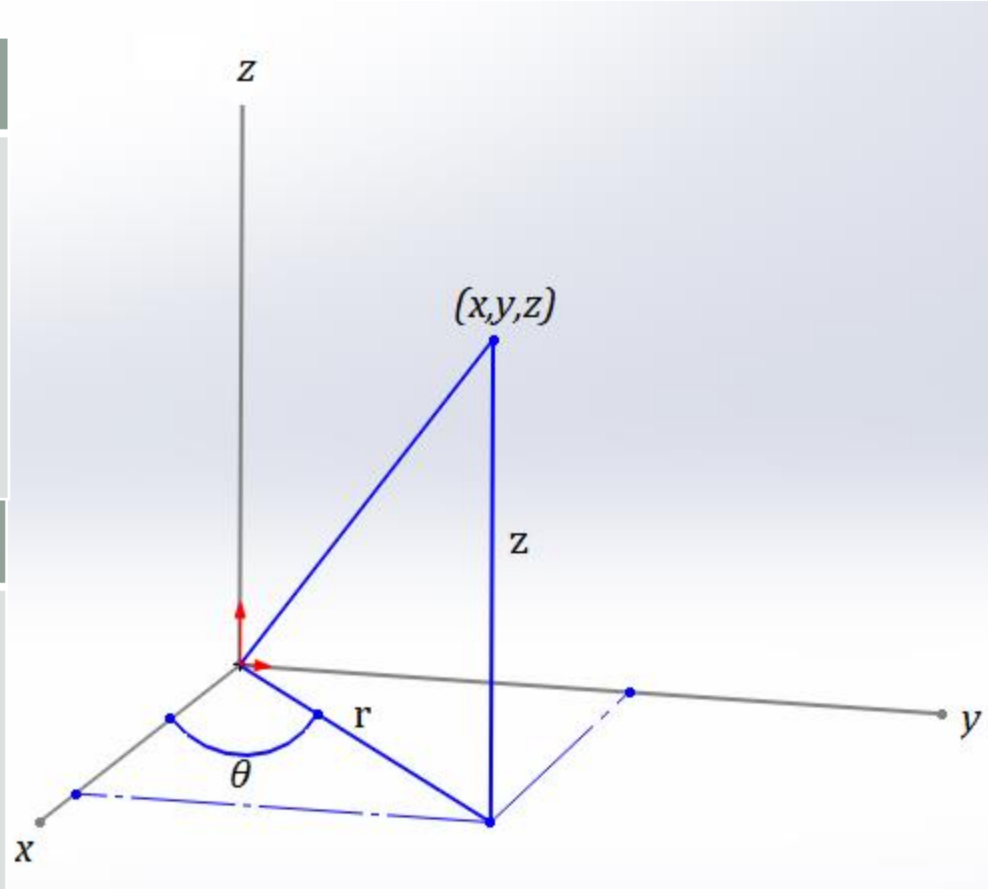
Las coordenadas cilíndricas de un punto P=(x, y, z) están definidas por las coordenadas (r, θ, z) .



COORDENADAS CILÍNDRICAS:

Cilíndricas a Rectangulares
$x = r\ cos\theta$
$y = r\ sen\theta$
$z = z$

Rectangulares a Cilíndricas
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$tan\theta = \dfrac{y}{x}$
$z = z$



Conversión de coordenadas rectangulares a cilíndricas

EJEMPLO 1. Dadas las coordenadas rectangulares:

$$(x, y, z) = (-3\sqrt{3}, -3{,}5).$$

Solución:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = 6$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \ \theta = 30° = \frac{\pi}{6}$$

$$z = 5$$

Conversión de coordenadas rectangulares a cilíndricas

EJEMPLO 2. Dadas las coordenadas rectangulares:

$$(x, y, z) = (\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, 2).$$

Solución:

$$r = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$tan\theta = \frac{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)} \rightarrow \theta = tan^{-1}(1) = 45° = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 2$$

Conversión de coordenadas cilíndricas a rectangulares

EJEMPLO 1. Dadas las coordenadas cilíndricas:

$$(r, \theta, z) = (2, \frac{3\pi}{4}, 5).$$

Solución:

$$x = r\cos\theta = 2cos\frac{3\pi}{4} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$y = r\ sen\theta = 2sen\frac{3\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$z = 5$$

Conversión de coordenadas cilíndricas a rectangulares

EJEMPLO 2. Dadas las coordenadas cilíndricas:

$$(r, \theta, z) = \left(2, \frac{\pi}{3}, -8\right)$$

Solución:

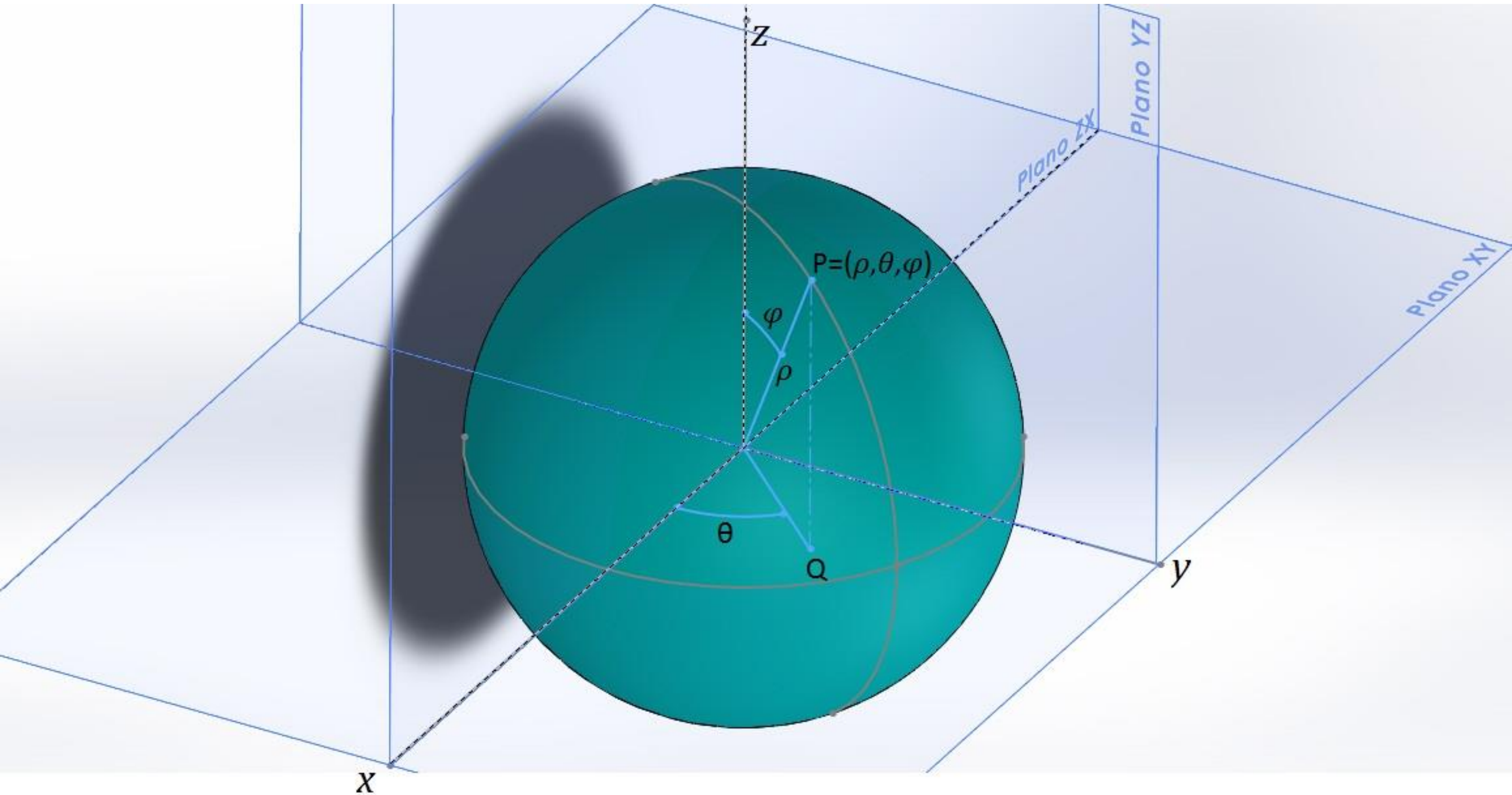
$$x = 2cos\frac{\pi}{3}; x = 2\left(\frac{1}{2}\right); \;\; x = 1$$

$$y = 2sen\frac{\pi}{3}; y = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right); y = \sqrt{3} = 1.73$$

$$z = -8$$

COORDENADAS ESFÉRICAS:

Las coordenadas esféricas de (x, y, z) se definen como (ρ, θ, φ) .



COORDENADAS ESFÉRICAS

Esféricas a Rectangulares

$$x = \rho\ cos\theta sen\varphi$$

$$y = \rho\ sen\theta sen\varphi$$

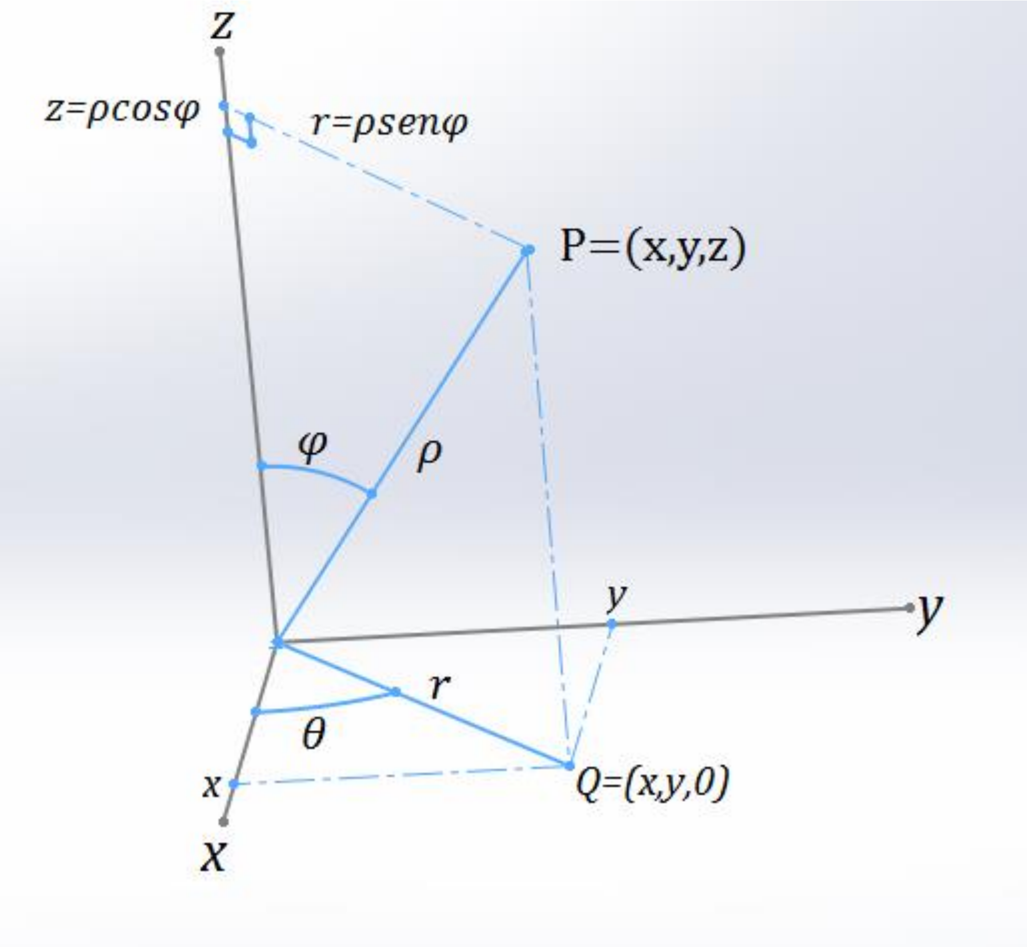
$$z = \rho cos\varphi$$

Rectangulares a Esféricas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$cos\varphi = \frac{z}{\rho}$$



Conversión coordenadas rectangulares a esféricas

EJEMPLO 1: Dadas las coordenadas rectangulares:

$$(x, y, z) = (2, -2\sqrt{3}, 3).$$

Solución:

$$\rho = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \rightarrow \ \theta = -60°$$

$$cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{3}{5} \rightarrow \ \varphi = cos^{-1}\frac{3}{5} = 53.13°$$

Conversión coordenadas rectangulares a esféricas

EJEMPLO 2: Dadas las coordenadas rectangulares:

$$(x, y, z) = (\sqrt{3}, 0{,}1).$$

Solución:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} = tan\theta = \frac{0}{\sqrt{3}};\ \theta = tan^{-1}0; \quad \theta = 0$$

$$cos\varphi = \frac{z}{\rho} = cos\frac{1}{2}; \varphi = cos^{-1}\varphi\left(\frac{1}{2}\right);\ \varphi = 60°$$

Conversión coordenadas esféricas a rectangulares

EJEMPLO 1: Dadas las coordenadas esféricas:

$$(\rho, \theta, \varphi) = (3, \tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{4}).$$

Solución:

$$x = \rho\ cos\theta\ sen\varphi = 3cos\frac{\pi}{3}sen\frac{\pi}{4} = 3\ \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$y = \rho sen\theta sen\varphi = 3sen\frac{\pi}{3}sen\frac{\pi}{4} = 3\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$z = \rho cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Conversión coordenadas esféricas a rectangulares

EJEMPLO 2: Dadas las coordenadas esféricas:

$$(\rho, \theta, \varphi) = \left(6, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

Solución:

$$x = 6\left(cos\frac{\pi}{6} sen\frac{5\pi}{6}\right) = 2.5$$

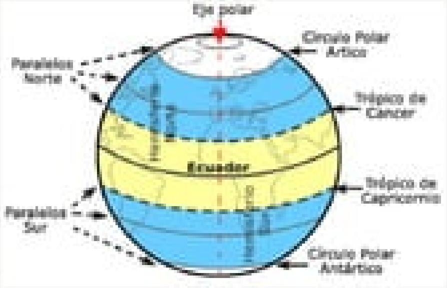
$$y = 6\left(sen\frac{\pi}{6} sen\frac{5\pi}{6}\right) = 1.5$$

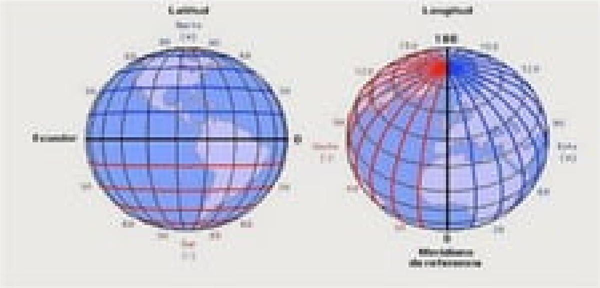
$$z = 6\left(cos\frac{5\pi}{6}\right) = -5.2$$

Sistema de coordenadas geográficas

Las coordenadas geográficas, por su parte, constituyen un subtipo de las denominadas coordenadas esféricas ya que permiten definir puntos sobre la Tierra. Pese a que existen distintas clases de coordenadas, el sistema más frecuente es aquel que emplea la latitud y la longitud.

La latitud (norte o sur) y la longitud (este u oeste) permiten conocer los ángulos laterales de la superficie de la Tierra.





Las coordenadas geográficas son aquellas que indican la posición de un punto en la superficie terrestre tomando como referencias la latitud y la longitud.

La Tierra, como ya sabemos, gira alrededor de un eje denominado Eje de la Tierra o Línea de los Polos. A los extremos de este eje se les llama Polo Norte y Polo Sur, y el círculo máximo perpendicular a este eje, Ecuador. El Ecuador divide a la Tierra en dos hemisferios, Hemisferio Norte y Hemisferio Sur, y los círculos menores paralelos al Ecuador son los llamados Paralelos; hay infinitos paralelos pero hay algunos de mayor importancia como son Trópico de Cáncer, Trópico de Capricornio, Círculo Polar Ártico y Círculo Polar Antártico.

Los círculos máximos que pasan por los polos se denominan Meridianos. Tienen especial interés el meridiano de lugar, que es el meridiano que pasa por el punto donde se encuentra el observador, y el meridiano de Greenwich o primer meridiano que se toma como origen para medir las longitudes.