La transformada de Laplace

Concepto e interés práctico

Es una **herramienta** que transforma un problema en el dominio del tiempo en un problema en el dominio de la frecuencia
(el fasor convierte una señal sinusoidal en un número complejo).

Aplicaciones:

Análisis del régimen transitorio en circuitos descritos por más de dos ecuaciones diferenciales.

Análisis del régimen transitorio en circuitos sometidos a excitaciones distintas de simples saltos de nivel.

Introducción del concepto de función de transferencia para analizar la respuesta en frecuencia de un circuito sometido a excitación sinusoidal.

Relacionar el comportamiento de un circuito en el dominio del tiempo con su comportamiento en el dominio de la frecuencia.

Definición

Dada una función f(t), que depende de la variable independiente tiempo (t),
su transformada de Laplace se define mediante la expresión

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$[t] = s \Rightarrow [s] = s^{-1}$ (frecuencia) $\Rightarrow$

La transformada de Laplace
convierte un problema en el dominio del tiempo
en un problema equivalente
en el dominio de la frecuencia.

Observaciones

La integral es impropia ya que el límite superior de integración es ∞.
En consecuencia, la integral puede no converger.
Sin embargo, en análisis de circuitos se hace referencia únicamente
a funciones que hacen que la integral converja, con lo que tienen transformada de Laplace.

Se hará referencia únicamente a transformadas dadas por la integral indicada,
que reciben el nombre de transformadas unilaterales.
Las transformadas bilaterales son aquéllas en las que el límite inferior de integración es -∞.

Si f(t) es discontinua en el origen, su valor en t = 0 se evalúa en $t = 0^-$.

Se hará referencia únicamente a señales de interés en circuitos eléctricos y electrónicos
que se comportan como sistemas LTI.

Transformadas funcionales son las que se realizan sobre funciones matemáticas.
Transformadas operacionales son aquellas
que involucran operaciones realizadas sobre funciones.

Transformadas de Laplace funcionales

En todos los casos $f(t) = 0$ para $t < 0^-$.

Función matemática		Transformada de Laplace
Delta de Dirac (impulso unitario)	$\delta(t)$	1
Escalón unitario	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$
Seno	$\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Coseno	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Rampa amortiguada	te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$
Seno amortiguado	$e^{-at}\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
Coseno amortiguado	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

Transformadas de Laplace operacionales

Operación	Transformada de Laplace
$f(t)$	$F(s)$
$Kf(t)$	$KF(s)$
$\sum_i f_i(t)$ (algebraica)	$\sum_i F_i(s)$ (algebraica)
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]_{t=0^-} - \ldots - \left[\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\right]_{t=0^-}$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(t - t_0)u(t - t_0)$, $t_0 > 0$ s	$e^{-st_0}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s + a)$
$f(at)$, $a > 0$ s^{-1}	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$t^nf(t)$	$(-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\tau)d\tau$

Ejemplo 1 de cálculo de transformada de Laplace

Se desea obtener la transformada de Laplace de la función $y(t) = t^2e^{-at}$

Observando las tablas anteriores podemos escribir $y(t) = t^n f(t)$

$$\text{con } n = 2 \text{ y } f(t) = e^{-at} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s + a}$$

$$y(t) = t^n f(t) \Rightarrow Y(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} = \frac{2}{(s + a)^3}$$

Ejemplo 2 de cálculo de transformada de Laplace

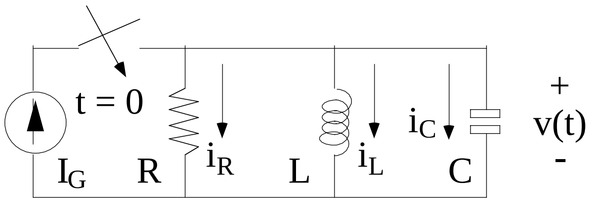
Se desea obtener la transformada de Laplace de la función $y(t) = t\cos(\omega t)$

Observando las tablas anteriores podemos escribir $y(t) = tf(t)$

$$\text{con } f(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = t^n f(t) \Rightarrow Y(s) = -\frac{dF(s)}{ds} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

Ejemplo 1 de aplicación a un circuito



El circuito de la figura,
en el que la fuente es continua y son datos
las características de todos los elementos,
ha permanecido mucho tiempo sin cambios
antes del cambio de posición del interruptor.
Una vez producido éste,
ya no experimenta más cambios.

Se desea obtener v(t) para t > 0.

Para cualquier instante se tiene

Ecuación de nudo
y relaciones
funcionales

$$I_G u(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \qquad (1)$$

esto indica que la fuente sólo se aplica para t > 0

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R},\; i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt},\; v(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$$I_G u(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau + C\frac{dv(t)}{dt} \qquad (3)$$

Aplicando a (3) la transformación de Laplace
de acuerdo con lo indicado en las anteriores, se obtiene

$$\frac{I_G}{s} = \frac{V(s)}{R} + \frac{V(s)}{Ls} + C[sV(s) - v(0^-)] \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta que para t < 0 no había energía almacenada en el circuito (los elementos pasivos estaban desconectados de la excitación), $v(0^-) = 0$ V, con lo que (4) queda en la forma

$$\frac{I_G}{s} = V(s)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC\right) \tag{5}$$

de donde puede deducirse

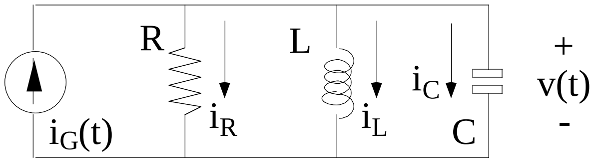
$$V(s) = \frac{I_G/C}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \Rightarrow v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$$

La función temporal buscada es la transformada inversa de Laplace de V(s). Más adelante se indicará cómo obtener transformadas inversas de Laplace.

Comparación de métodos para analizar el régimen transitorio

Análisis integro-diferencial	**Análisis basado en la transformada de Laplace**
Resolución de una o más ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo.	Resolución de una o más ecuaciones algebraicas en el dominio s.

Ejemplo 2 de aplicación a un circuito



Se desea obtener la transformada de Laplace correspondiente a v(t).

$i_G(t) = K\cos(\omega t)$, K = 1.2 A, ω = 1 rad/s
R = 1 Ω, L = 1.6 H, C = 0.625 F

Se sigue un procedimiento idéntico al utilizado en el ejemplo anterior.
La única diferencia es que la transformada de Laplace correspondiente a la fuente es

$$I_G(s) = \frac{Ks}{s^2 + \omega^2}$$

con lo que la ecuación (5) pasa a ser

$$\frac{Ks}{s^2 + \omega^2} = V(s)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC\right)$$

Despejando V(s) y utilizando los valores numéricos se obtiene

$$V(s) = \frac{1.92s^2}{(s^2 + 1)(s^2 + 1.6s + 1)}\ \mathrm{Vs}$$

La utilización de la transformada de Laplace permite tratar de forma unificada problemas de régimen transitorio y problemas de régimen sinusoidal.

La transformada inversa de Laplace

Se trata de obtener la expresión en el dominio del tiempo correspondiente a una expresión dada en el dominio s.

Procedimiento general

En general, la transformada de Laplace
correspondiente a una variable de interés en un circuito
es una función racional (sólo aparecen potencias enteras de s) de la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

donde

a_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ y b_j $(j = 0, 1, \dots, m)$ son constantes reales.
m y n son enteros positivos (números naturales).
Si $m > n$, F(s) se denomina función real propia.
Si $m < n$, F(s) se denomina función real impropia.

1. Se consideran únicamente **funciones reales propias**.

2. Obtención de las **raíces del denominador**.
   El denominador siempre puede escribirse en la forma

   $$D(s) = (s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_k)^p \dots (s + s_m)$$

   donde $s = -s_k$ (y cualquier otro término similar) es una raíz múltiple.

3. Expansión en **fracciones parciales**.

   $$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_{k1}}{s + s_k} + \dots + \frac{K_{kp}}{(s + s_k)^p} + \dots + \frac{K_m}{s + s_m}$$

4. Determinación de los **coeficientes** K_j $(j = 0, 1, \dots, m)$.

5. Utilización de las tablas anteriores para obtener las transformadas inversas correspondientes a las fracciones parciales.

Obtención de coeficientes cuando las raíces son reales y distintas

Sea F(s) una función racional propia
y sean $s = -s_j$ $(j = 1, 2, ..., m)$ las raíces de su denominador.

La función puede escribirse en la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + ... + \frac{K_m}{s + s_m} = \frac{N(s)}{(s + s_1)(s + s_2) ... (s + s_m)}$$

El coeficiente K_j, correspondiente a la fracción en la que figura la raíz $s = -s_j$, está dado por

$$K_j = \{(s + s_j)F(s)\}_{s=-s_j} = \frac{N(-s_j)}{\displaystyle\prod_{p=1,\ p\neq j}^{m} (s + s_p)}$$

Obtenidos los coeficientes, conviene comprobar que el cálculo se ha realizado bien.

Para ello se evalúan F(s) y su expansión en fracciones parciales para cualquier valor de s
(no coincidente con las raíces del denominador)
y los dos resultados han de ser iguales.

Se sugiere utilizar como valor de s uno que haga nulo N(s).

Ejemplo

Se desea obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{6s^2 + 26s + 26}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$F(s) = \frac{6s^2 + 26s + 26}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

$$K_1 = \{F(s)(s+1)\}_{s=-1} = \left\{\frac{6s^2 + 26s + 26}{(s+2)(s+3)}\right\}_{s=-1} = 3$$

$$K_2 = \{F(s)(s+2)\}_{s=-2} = \left\{\frac{6s^2 + 26s + 26}{(s+1)(s+3)}\right\}_{s=-2} = 2$$

$$K_3 = \{F(s)(s+3)\}_{s=-3} = \left\{\frac{6s^2 + 26s + 26}{(s+1)(s+2)}\right\}_{s=-3} = 1$$

$$F(s) = \frac{6s^2 + 26s + 26}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

Para comprobar que la expansión en fracciones parciales ha sido bien hecha
se evalúan los dos miembros de la última ecuación para $s = -2.77$
(una de las raíces del numerador de la función)
y se obtiene que ambos son nulos.

Utilizando los contenidos de las tablas de transformadas se llega a

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+1}\right\} + \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\right\} + \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} =$$

$$= (3e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

La presencia del escalón unitario en la última expresión es para asegurar que f(t) sólo es nula para valores positivos de t, lo cual se requiere para que sean válidas las expresiones que figuran en las tablas.

Obtención de coeficientes cuando hay raíces reales y complejas (todas ellas distintas entre sí)

Sea F(s) una función racional propia
y sean $s = -s_j$ (j = 1, 2, ..., m) las raíces de su denominador.

Se aplica el procedimiento detallado en el apartado anterior, resultando que

Los coeficientes correspondientes a raíces reales son reales.

Los coeficientes correspondientes a raíces complejas son complejos.

Las raíces complejas se presentan en pares conjugados,
con lo que los coeficientes correspondientes también son pares conjugados
(sólo es necesario calcular la mitad de tales coeficientes).

Es decir, en el desarrollo de F(s) aparecen términos de la forma

$$G(s) = \frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta}, \text{ siendo } K = |K|e^{j\theta}$$

con lo que la transformada inversa correspondiente a estos términos es
(de acuerdo con las tablas de transformadas)

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)u(t)$$

Obtenidos los coeficientes, conviene comprobar que el cálculo se ha realizado bien,
procediendo de forma similar a la indicada en el apartado anterior.

Ejemplo

Se desea obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{10(s^2 + 119)}{(s + 5)(s^2 + 10s + 169)}$$

Manipulando el denominador puede observarse que tiene dos raíces complejas, con lo que

$$F(s) = \frac{K_1}{s + 5} + \frac{K}{s + 5 - j12} + \frac{K^*}{s + 5 + j12} \Rightarrow \alpha = 5,\ \beta = 12$$

$$K_1 = \{F(s)(s + 5)\}_{s = -5} = 10$$

$$K = |K|e^{j\theta} = \{F(s)(s + 5 - j12)\}_{s = -5 + j12} = j4.16 \Rightarrow |K| = 4.16,\ \theta = 90\ ^{o}$$

Utilizando los contenidos de las tablas de transformadas se llega a

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s + 5}\right\} + 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)\right]u(t) =$$

$$= [10e^{-5t} + 8.33e^{-5t}\cos(12t + 90\ ^{o})]u(t)$$

Obtención de coeficientes cuando las raíces son reales y algunas están repetidas

Sea F(s) una función racional propia;
sean $s = -s_j$ (j = 1, 2, ..., m) las raíces reales de su denominador distintas entre sí,
y sea $s = -s_p$ la raíz real repetida r veces (p y r son números naturales).

La función puede escribirse en la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s + s_1) \ldots (s + s_m)(s + s_p)^r} = \frac{K_1}{s + s_1} + \ldots + \frac{K_m}{s + s_m} + \frac{K_{p1}}{s + s_p} + \ldots + \frac{K_{pr}}{(s + s_p)^r}$$

Los coeficientes correspondientes a raíces distintas se obtienen como se indicó antes.

Los coeficientes correspondientes a la raíz repetida se obtienen mediante los algoritmos

$$K_{pr} = [F(s)(s + s_p)^r]_{s = -s_p},\ K_{pr-v}(v = 0, 1, \ldots , r-1) = \left\{\frac{d^v}{ds^v}[F(s)(s + s_p)^r]\right\}_{s = -s_p}$$

Obtenidos los coeficientes, conviene comprobar que el cálculo se ha realizado bien, utilizando un procedimiento similar a los indicados en apartados anteriores.

Ejemplo

Se desea obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{4s^2 + 7s + 1}{s(s+1)^2}$$

$$F(s) = \frac{4s^2 + 7s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{s+1} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2}$$

$$K_1 = \{F(s)s\}_{s = 0} = 1$$

$$K_{22} = \{F(s)(s+1)^2\}_{s = -1} = 2$$

$$K_{21} = \left\{\frac{d}{ds}[F(s)(s+1)^2]\right\}_{s = -1} = \left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{4s^2 + 7s + 1}{s}\right]\right\}_{s = -1} = 3$$

Utilizando los contenidos de las tablas de transformadas se llega a

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2}\right\} = (1 + 3e^{-t} + 2te^{-t})u(t)$$

Obtención de coeficientes cuando hay raíces complejas y algunas están repetidas

El procedimiento es idéntico al indicado para el caso de raíces reales múltiples.

Caso general de raíces múltiples

$$s = -a \text{ (raíz real de multiplicidad r)} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+a)^r}\right\} = \frac{Kt^{r-1}e^{-at}}{(r-1)!}u(t)$$

$$s = -\alpha + j\beta \text{ (raíz compleja de multiplicidad r)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r}\right\} = \left[\frac{2|K|t^{r-1}e^{-\alpha t}}{(r-1)!}\cos(\beta t+\theta)\right]u(t)$$

En muchos problemas de análisis de circuitos $r \leq 2$.
En esa situación la tabla siguiente es de utilidad para obtener transformadas inversas por simple inspección.

K	Raíces	F(s)	f(t)
Real	Real simple	$\frac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}u(t)$
Real	Real múltiple	$\frac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
$\|K\|e^{j\theta}$	Compleja simple	$\frac{K}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\|K\|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$
$\|K\|e^{j\theta}$	Compleja múltiple	$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\|K\|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$

Ejemplo

Se desea obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{40}{(s^2 + 4s + 5)^2}$$

$$F(s) = \frac{40}{(s^2 + 4s + 5)^2} = \frac{40}{(s + 2 - j)^2(s + 2 + j)^2} =$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s + 2 - j} + \frac{K_1^*}{s + 2 + j} + \frac{K_2}{(s + 2 - j)^2} + \frac{K_2^*}{(s + 2 + j)^2} \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 1$$

$$K_2 = |K_2|e^{j\theta_2} = \{F(s)(s + 2 - j)^2\}_{s = -2 + j} = -10 \Rightarrow |K_2| = 10,\ \theta = 180\ º$$

$$K_1 = \left\{\frac{d}{ds}[F(s)(s + 2 + j)^2]\right\}_{s = -2 - j} = \left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{40}{(s + 2 - j)^2}\right]\right\}_{s = -2 - j} = -j10 \Rightarrow |K_1| = 10,\ \theta_1 = -90\ º$$

Utilizando los contenidos de la última tabla se llega a

$$f(t) = [20e^{-2t}\cos(t - 90\ º) + 20te^{-2t}\cos(t + 180\ º)]u(t)$$

Transformada inversa de una función racional impropia

Una función racional impropia puede ser escrita en la forma

$$F(s) = \frac{N'(s)}{D(s)} = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \frac{N(s)}{D(s)}$$

Es decir, puede escribirse como un polinomio más una función racional propia.

La transformada inversa de Laplace de la función racional propia
se obtiene como se indicó en apartados anteriores.

Los términos del polinomio dan lugar a transformadas inversas de la forma

$$\mathcal{L}^{-1}[a] = a\delta(t),\ \mathcal{L}^{-1}[a_p s^p] = a_p \frac{d^p\delta(t)}{dt^p}$$

Ejemplo

Se desea obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{2s^3 + 8s^2 + 2s - 4}{s^2 + 5s + 4}$$

$$F(s) = \frac{2s^3 + 8s^2 + 2s - 4}{s^2 + 5s + 4} = 2s - 2 + F'(s)$$

$$F'(s) = \frac{4s + 4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{4s + 4}{(s + 1)(s + 4)} = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 4}$$

$$K_1 = \{F'(s)(s + 1)\}_{s = -1} = 0,\ K_2 = \{F'(s)(s + 4)\}_{s = -4} = 4$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2\frac{d\delta(t)}{dt} - 2\delta(t) - 4e^{-4t}u(t)$$

Polos y ceros de funciones racionales propias

Una función racional puede ser escrita en la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} =$$

$$= \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}, \; K = \frac{a_n}{b_m}$$

Esta operación (factorización de un polinomio) se realiza, salvo casos sencillos, utilizando herramientas informáticas.

Las raíces del denominador ($-p_j$, j = 1, 2, ... , m) se llaman polos, ya que, para s igual a cualquiera de ellas, F(s) se hace infinita.

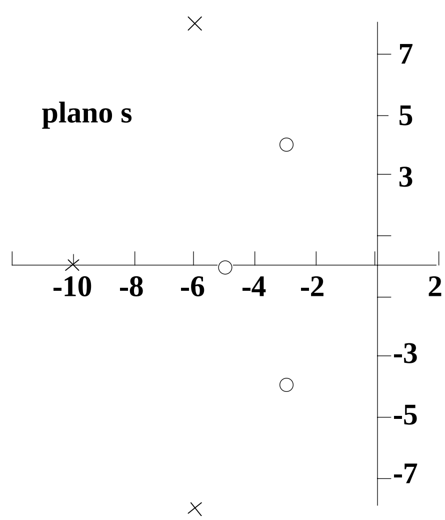
Las raíces del numerador ($-z_i$, i = 1, 2, ... , m) se llaman ceros, ya que, para s igual a cualquiera de ellas, F(s) se hace nula.

Los ceros y polos se representan en un plano (plano *s*) complejo (O: cero; X: polo).
Puede haber ceros y polos en el infinito,
pero sólo se considerarán los representables en el plano *s* finito
(valores reales en abscisas; imaginarios en ordenadas).

Ejemplo

$$F(s) = \frac{10(s + 5)(s + 3 - j4)(s + 3 + j4)}{s(s + 10)(s + 6 - j8)(s + 6 + j8)}$$

Además de los indicados,
la función tiene un cero en s = - ∞



Teoremas de los valores inicial y final

Siendo F(s) = L{f(t)}, se cumple

Teorema del valor inicial.

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} [sF(s)]$$

f(t) no contiene funciones impulso.

Teorema del valor final.

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [sF(s)]$$

Los polos de F(s) están en el semiplano s izquierdo
(puede haber un polo de primer orden
-no múltiple- en el origen).

Estos teoremas son útiles para comprobar si se ha calculado correctamente F(s) antes de obtener su transformada inversa.

El comportamiento predicho por los teoremas debe coincidir con el que muestra el circuito.

Ejemplo

Se desea obtener los valores de f(t) en $t = 0^+$ y $t = \infty$ sabiendo que

$$F(s) = \frac{7s^2 + 63s + 134}{(s + 3)(s + 4)(s + 5)}$$

$$\text{lím}(t \to 0^+)\ f(t) = \text{lím}(s \to \infty)\ [sF(s)] = 7$$

$$\text{lím}(t \to \infty)\ f(t) = \text{lím}(s \to 0)\ [sF(s)] = 0$$