Apuntes de Álgebra Lineal

Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

9 de noviembre de 2009

Deseo agradecer la cuidadosa lectura, las correcciones y las sugerencias para mejorar este documento realizadas por el M.C. César Rincón Orta. Deseo agradecer también al alumno Tomás Rocha Rinza por sus correcciones a la versión inicial del documento.

Índice

1. Introducción **4**

2. Vectores en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$ **5**
- 2.1. Definiciones 5
- 2.2. Representación gráfica 5
- 2.3. Suma de vectores y multiplicación por un escalar 10
- 2.4. Igualdad de vectores 11
- 2.5. Ecuación paramétrica de una recta 12
- 2.6. *Ejercicios* 13

3. Espacios vectoriales **15**
- 3.1. Definición 15
- 3.2. Subespacio 17
- 3.3. Combinación lineal 18
- 3.4. Espacio generado 18
- 3.5. Independencia y dependencia lineal 19
  - 3.5.1. Interpretación geométrica en $\mathbf{R^3}$ 20
- 3.6. Base y dimensión 21
  - 3.6.1. Base 21
  - 3.6.2. Dimensión 22
- 3.7. *Ejercicios* 23

4. Producto interno **25**
- 4.1. Definición 25
- 4.2. Ortogonalidad 26
- 4.3. Norma 26
  - 4.3.1. Base ortonormal 28
- 4.4. Ángulo entre vectores en $\mathbf{R}^n$ 28
- 4.5. Proyección 28
- 4.6. *Ejercicios* 29

5. Producto cruz **31**
- 5.1. Definición 31
- 5.2. Triple producto escalar 32
- 5.3. Más sobre interpretación geométrica de vectores en $\mathbf{R^3}$ 34
  - 5.3.1. Ángulo entre vectores en $\mathbf{R^3}$ 34

5.3.2. Área de un paralelogramo 34
5.3.3. Volumen de un paralelepípedo 34
5.4. Ecuación de un plano 35
5.5. *Ejercicios* 36

6. Transformaciones lineales 38
6.1. Definiciones 38
6.2. Multiplicación de matrices 41
6.3. Matriz asociada a una transformación lineal 42
6.4. Composición de transformaciones 44
6.5. *Ejercicios* 46

1. Introducción

El álgebra lineal es fundamental en el desarrollo de muchas ramas de las Matemáticas, la Física, la Química, la Ingeniería y el Análisis Numérico. En particular, la discusión de conceptos básicos del álgebra lineal tales como los de espacio vectorial y transformación lineal, son relevantes en el formalismo del cálculo vectorial. En este capítulo se discutirán conceptos que tendrán incidencia directa en el curso **Cálculo de Función de Varias Variables**. La comprensión por parte del estudiante del material aquí desarrollado, le permitirá entender mejor los conceptos estudiados en el resto ese curso.

2. Vectores en R^2 y R^3

2.1. Definiciones

Iniciamos el análisis con el estudio de vectores en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$. Estos conjuntos se definen de la siguiente manera.

- $\mathbf{R^2} = \{(u_1, u_2) \,|\, u_1, u_2 \in \mathrm{R}\}$
- $\mathbf{R^3} = \{(u_1, u_2, u_3) \,|\, u_1, u_2, u_3 \in \mathrm{R}\}$

Por ejemplo, $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{R^2}$ denota a un elemento particular de $\mathbf{R^2}$ y a los números u_1 y u_2 se les llama las **componentes** de $\mathbf{u}$.[1] Nótese que los elementos de $\mathbf{R^2}$ son pares ordenados, y los elementos de $\mathbf{R^3}$ son tercias ordenadas. Esto se debe a que el orden en que se colocan las componentes que definen un vector es significativo.

2.2. Representación gráfica

Los vectores en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$ pueden representarse gráficamente como segmentos de recta dirigidos (flechas). Para esto, es necesario definir primero un sistema de coordenadas. Un **sistema de coordenadas** tiene por objeto describir puntos, curvas, superficies u otros objetos matemáticos en el plano o el espacio. Es posible definir una gran cantidad de sistemas de coordenadas y la conveniencia en la elección de uno de ellos en particular depende del problema bajo estudio. El sistema de **coordenadas cartesianas** se define de la siguiente manera. Se elige un punto $\mathcal{O}$ llamado **origen**, y se trazan dos o tres rectas numéricas perpendiculares (es decir, que forman un ángulo de 90^o), según sea el caso de $\mathbf{R^2}$ o $\mathbf{R^3}$, respectivamente, que pasen por el origen. A tales rectas se les llama **ejes de coordenadas**. A cada una de ellas se le asigna una dirección positiva y una escala, no necesariamente la misma, con origen en el punto $\mathcal{O}$. Además, a cada recta numéricas se le asigna un nombre (por ejemplo x, y, z). En la Fig. 1 se muestra un ejemplo para cada uno de los casos en cuestión.

En el caso de $\mathbf{R^3}$, dependiendo de la orientación que se escoja para cada eje de coordenadas (es decir, de la elección de su dirección positiva), se obtiene un sistema de coordenadas orientado a la derecha (sistema derecho) o a la izquierda (sistema izquierdo). El sistema de coordenadas de la Fig. 1(b) es un sistema derecho; al orientar todos los dedos de la mano derecha, excepto el pulgar, a partir de la dirección positiva del eje x y hacia la dirección positiva del eje y, el dedo pulgar apunta hacia

[1] En este documento, a los vectores se les denotará por una letra en negrita

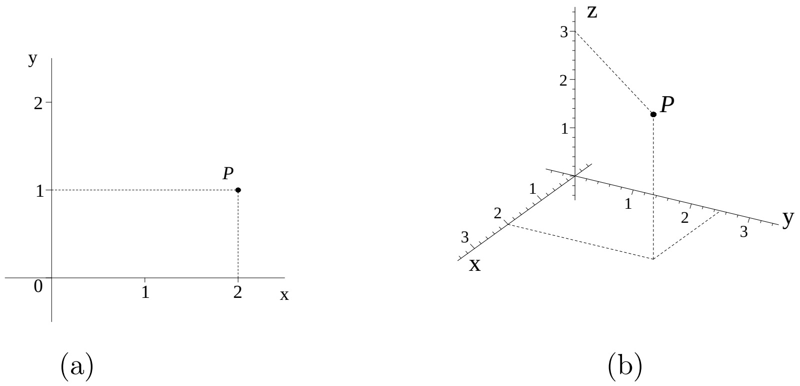


Figura 1: Coordenadas cartesianas en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$.

la dirección positiva del eje z. De manera análoga, un sistema de coordenadas puede quedar orientado según la mano izquierda. En la Fig. 2 se presentan las orientaciones posibles para sistemas derechos e izquierdos. Nótese que partir de un sistema derecho puede obtenerse otro sistema derecho, pero no uno izquierdo, mediante una rotación de ejes. Lo mismo ocurre entre los sistemas izquierdos.

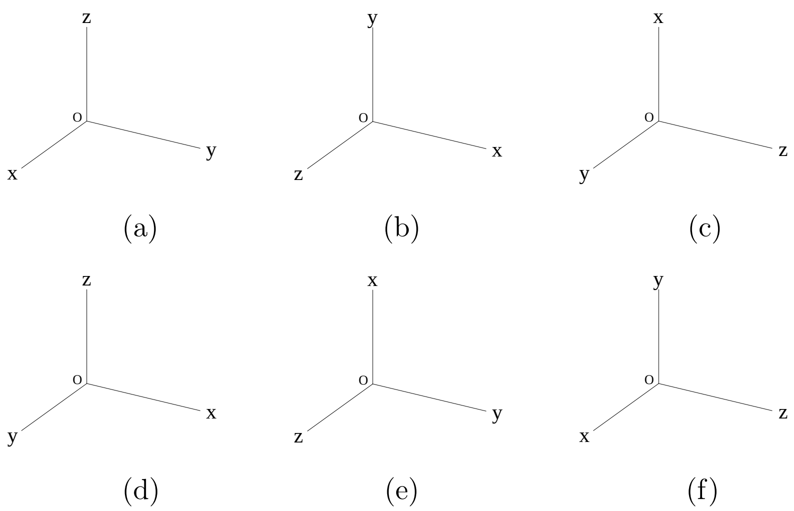


Figura 2: Sistemas de coordenadas en $\mathbf{R^3}$ orientados a la derecha (a) – (c) y a la izquierda (d) – (f).

Cada pareja de ejes de coordenadas define un plano que se designa con el nombre de los ejes seleccionados. Así, en el caso de $\mathbf{R^2}$ se trata del plano xy, y en $\mathbf{R^3}$ se tienen los **planos coordenados** xy, xz y yz. También es conveniente designar a las diferentes regiones del plano y del espacio. $\mathbf{R^2}$ se puede dividir en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, separadas por los ejes de coordenadas, y $\mathbf{R^3}$ en ocho regiones llamadas **octantes**, separadas por los planos coordenados. En las tablas 1 y 2 se indica la manera de designar a cada una de estas regiones.

signo de la componente x	signo de la componente y	cuadrante
+	+	I
-	+	II
-	-	III
+	-	IV

Cuadro 1: Designación de cuadrantes en $\mathbf{R^2}$.

signo de la componente x	signo de la componente y	signo de la componente z	octante
+	+	+	I
-	+	+	II
-	-	+	III
+	-	+	IV
+	+	-	V
-	+	-	VI
-	-	-	VII
+	-	-	VII

Cuadro 2: Designación de octantes en $\mathbf{R^3}$.

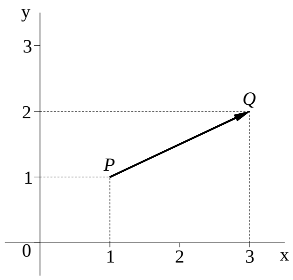
Para localizar al punto $P(x_0, y_0)$, con coordenadas x_0 y y_0, respectivamente, en un sistema de coordenadas cartesianas en $\mathbf{R^2}$, se procede de la siguiente manera. A partir del punto x_0 en el eje x, se traza una recta paralela al eje y, y a partir del punto y_0 sobre el eje y, una recta paralela al eje x. La intersección de estas rectas perpendiculares indica la ubicación del punto P. En la Fig. 1(a) se localiza al punto $P(2, 1)$, el cual está ubicado en el primer cuadrante. Para ubicar al punto $Q(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R^3}$ se procede de manera similar. Primero, se encuentra el punto de intersección entre dos rectas en uno de los planos de coordenadas. Por ejemplo, se ubica la intersección de las rectas $x = x_0$ y $y = y_0$, en el plano xy. A partir de ese punto se traslada una distancia z_0

(en el sentido indicado por el signo de z_0) sobre una recta paralela al eje z. En la Fig. 1(b) se muestra al punto $P(2, 2{,}5, 3)$, ubicado en el primer octante.

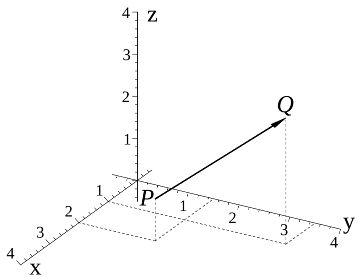
Sea el vector $\mathbf{u} \in \mathbf{R^2}$ con punto inicial en $P(x_1, y_1)$ y punto final en $Q(x_2, y_2)$. Entonces:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (u_1, u_2)\,.$$

En el ejemplo indicado en la Fig. 3(a) se trata del segmento dirigido entre los puntos $P(1, 1)$ y $Q(3, 2)$ y por lo tanto $\mathbf{u} = (2, 1)$.



(a)



(b)

Figura 3: Vectores en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$.

La información contenida en un par ordenado es equivalente a la que define a un vector en $\mathbf{R^2}$ como un segmento dirigido caracterizado por su magnitud (tamaño de la flecha) y dirección.[2] La **magnitud** del vector se denota por $||\mathbf{u}||$ y se define como la distancia entre los puntos P y Q:

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

Este resultado coincide con el Teorema de Pitágoras. El sentido del vector está definido por el ángulo θ que éste forma con la dirección positiva del eje x en el sentido contrario a las manecillas del reloj:

$$\theta = \arccos \frac{x_2 - x_1}{||\mathbf{u}||}\,, \quad ||\mathbf{u}|| \neq 0\,, \tag{2}$$

donde $||\mathbf{u}||$ está definido por la Ec. (1). Por lo tanto, también es posible caracterizar a un vector en $\mathbf{R^2}$ por su magnitud, su dirección y por la posición del punto al cual está

[2]Excepto para el vector $\mathbf{0}$ al cual no es posible asignarle una dirección.

anclado el segmento dirigido (el punto inicial).[3] Cuando el punto al cual está anclado el vector es el origen, se le llama un **vector de posición**. Un vector de posición en $\mathbf{R^2}$ se define completamente por su magnitud y dirección pues se entiende que el vector tiene punto inicial en el origen. Esta situación se ilustra en la Fig. 4(a).

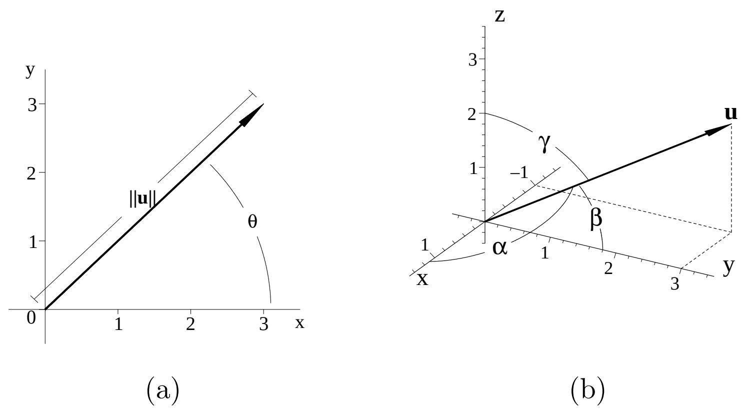


Figura 4: (a) Magnitud y dirección de un vector de posición en $\mathbf{R^2}$ y (b) Ángulos directores de un vector de posición en $\mathbf{R^3}$.

De manera análoga, el segmento dirigido entre los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbf{R^3}$ corresponde al vector:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (u_1, u_2, u_3)\,,$$

cuya representación gráfica se muestra en la Fig. 3(b) para el vector con punto inicial $P(2, 1{,}5, 1)$ y punto final $Q(1, 3{,}5, 3)$. Un vector en $\mathbf{R^3}$ también puede caracterizarse mediante su magnitud y dirección y por la posición del punto inicial. La magnitud se define como:

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{3}$$

Existen varias maneras de definir la dirección de un vector en $\mathbf{R^3}$. En este texto lo haremos en términos de los llamados **ángulos directores**. Se trata de los ángulos que forma el vector con la dirección positiva de cada uno de los ejes de coordenadas x, y y z, y se designan con los símbolos α, β y γ, respectivamente. Los ángulos directores

[3] El análisis de algunas propiedades físicas vectoriales requiere del conocimiento de los puntos iniciales de los vectores. Por ejemplo, la fuerza resultante sobre un objeto se obtiene mediante la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él sin necesidad de saber en qué punto lo hacen. Véase el ejemplo 2.3.

se obtienen mediante el uso de funciones trigonométricas de la siguiente manera:

$$\alpha = \arccos \frac{x_2 - x_1}{||\mathbf{u}||}\,, \quad \beta = \arccos \frac{y_2 - y_1}{||\mathbf{u}||}\,, \quad \gamma = \arccos \frac{z_2 - z_1}{||\mathbf{u}||}\,, \quad ||\mathbf{u}|| \neq 0\,, \quad (4)$$

donde $||\mathbf{u}||$ está definido por la Ec. (3). La representación gráfica correspondiente se encuentra en la Fig. 4(b) para el caso de un vector de posición en el segundo octante. A los cosenos de los ángulos directores se les conoce como **cosenos directores**.

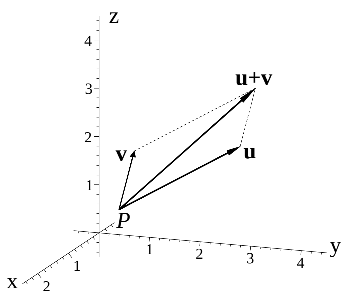
2.3. Suma de vectores y multiplicación por un escalar

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R^3}$. Sea además $k \in \mathbf{R}$ (un escalar). Se definen las siguientes operaciones:

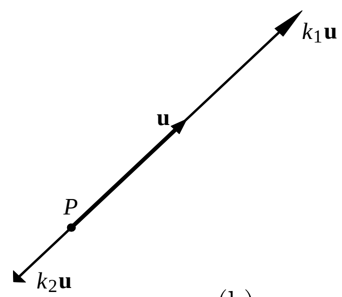
Suma de vectores: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.

Multiplicación de un vector por un escalar: $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$.

Es decir, los vectores se suman componente a componente, y al multiplicar un vector por un escalar, el producto se realiza sobre todas sus componentes. La resta de vectores se define en términos de las operaciones anteriores: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$. De manera análoga se hacen las definiciones correspondientes en $\mathbf{R^2}$. La suma de vectores y la multiplicación por un escalar también tienen una interpretación geométrica. En la Fig. 5(a) se muestra la suma de vectores en el caso de $\mathbf{R^3}$.



(a)



(b)

Figura 5: (a) Suma de vectores y (b) multiplicación por un escalar.

Al vector suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ también se le llama el **vector resultante**. El vector $k\mathbf{u}$ es un vector paralelo al vector $\mathbf{u}$ cuando $k > 0$ y antiparalelo a él cuando $k < 0$.[4] La

[4]Dos **vectores paralelos** tienen la misma dirección y sentido; dos **antiparalelos**, la misma dirección y sentido opuesto.

magnitud del vector $k\mathbf{u}$, respecto a la del vector $\mathbf{u}$, depende de $|k|$. Esta situación se ilustra en la Fig. 5(b), donde a partir del vector $\mathbf{u}$, anclado al punto P, se obtiene un vector paralelo y uno antiparalelo a él, para $k_1 > 1$ y $k_2 \in (-1, 0)$, respectivamente.

Ejemplos.

2.1 *La velocidad de un objeto A relativa a la de un objeto B se define como* $\mathbf{v}_{\mathrm{A/B}} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$*;* $\mathbf{v}_A$ *y* $\mathbf{v}_B$ *son las velocidades de A y B, respectivamente, con respecto a un sistema de referencia. Consideremos un automóvil que se despaza hacia el norte a 20 km/h y otro que se mueve al oeste a 20 km/h. Un sistema de coordenadas adecuado para este ejemplo tiene por ejes x y y a las rectas sobre las que se desplazan los vehículos, orientados hacia el este y norte, respectivamente. Los vectores correspondientes son* $\mathbf{v}_A = (0, 20)$ *y* $\mathbf{v}_B = (-20, 0)$ *en km/h. Por lo tanto,* $\mathbf{v}_{\mathrm{A/B}} = (20, 20)$*. De acuerdo con un observador en B, el automovil A se desplaza hacia el noreste.*

2.2 *Los vectores* $\mathbf{u} = (2, -8, 6)$ *y* $\mathbf{v} = (1, 4, 3)$ *no son paralelos pues no existe una constante k tal que* $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$*.*

2.4. Igualdad de vectores

Dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R^3}$ son iguales si y sólo si:

$$u_1 = v_1, \quad u_2, = v_2, \quad u_3 = v_3.$$

La igualdad de vectores en $\mathbf{R^2}$ se define de manera análoga. De acuerdo con esta definición, dos vectores pueden ser iguales aunque no estén anclados al mismo punto.

Ejemplo.

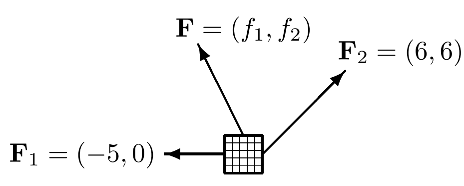
2.3 *La fuerza* $\mathbf{F}$ *necesaria para que la resultante sobre el objeto indicado en la figura sea* $\mathbf{F}_R = (0, 10)$ *N se obtiene a partir de*

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\,.$$

Como consecuencia de la definición de igualdad de vectores:

$0 = f_1 - 5N + 6N, \quad 10N = f_2 + 0 + 6N$

A partir de estas igualdades se obtiene $f_1 = -1$ N y $f_2 = 4$ N.



2.5. Ecuación paramétrica de una recta

Utilizando las definiciones de suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar es posible construir la ecuación paramétrica de una recta. En esta representación, los puntos contenidos en una recta están dados en términos de un conjunto de vectores de posición, como a continuación se indica.

Sean dos puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ contenidos en la misma recta. Sean los vectores $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathcal{O}Q}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$. Nótese que $\mathbf{u}$ es un vector de posición con punto final sobre la recta de interés, y que $\mathbf{v}$ es paralelo a la recta. Un vector de posición al punto Q puede expresarse en términos de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$: $\overrightarrow{\mathcal{O}Q} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. De igual manera, un vector de posición a un punto arbitrario $R(x, y, z)$, también contenido en la recta, puede expresarse en términos de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, siempre que éste último sea multiplicado por un escalar t: $\overrightarrow{\mathcal{O}R} = \mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

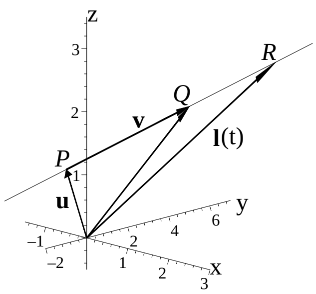


Figura 6: Representación paramétrica de una recta en $\mathbf{R^3}$.

Tal situación se ilustra en la Fig. 6, donde se observa que las coordenadas de todos los puntos contenidos en la recta son iguales a las componentes del vector de posición $\ell(t)$ dado por:

$$\ell(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad \text{donde} \quad t \in R \quad \text{y} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\,. \tag{5}$$

La Ec. (5) es la **ecuación paramétrica de la recta**. Se observa que una recta queda definida ya sea por dos puntos contenidos en ella (para poder obtener los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$), o de manera equivalente por un punto (para obtener al vector $\mathbf{u}$) y un vector que tenga la misma dirección que la recta (el vector $\mathbf{v}$). Dado que el vector de posición a un punto $R(x, y, z)$ contenido en la recta es de la forma

$$\ell(t) = (x, y, z) = (u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3)\,,$$

la ecuación parámetrica de la recta puede escribirse especificando cada componente del vector de posición,

$$x = u_1 + tv_1\,, \quad y = u_2 + tv_2\,, \quad z = u_3 + tv_3\,. \tag{6}$$

Además, las siguientes igualdades son equivalentes a las ecuaciones (5) y (6):

$$\frac{x - u_1}{v_1} = \frac{y - u_2}{v_2} = \frac{z - u_3}{v_3} \tag{7}$$

La Ec. (7) se conoce como la **forma simétrica** de la ecuación de la recta en $\mathbf{R^3}$. Concluimos esta sección mencionando que el análisis anterior puede ser realizado también para obtener la representación paramétrica de una recta en $\mathbf{R^2}$.

Ejemplo.

2.4 *Un objeto que se mueve sobre la recta $\ell(t) = (1-t, 2+t, -3)$, donde t es el tiempo en segundos, se encuentra en el punto P(0,3,-3) cuando t = 1 s. El vector que indica la dirección del objeto es el vector que define la dirección de la recta, $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$; es decir, éste se mueve sobre una recta paralela al plano xy. Véase el ejercicio 5.6.*

2.6. *Ejercicios*

2.1 *Expresar al vector $\mathbf{u} = (3, 3)$ en términos de su magnitud y dirección.*

2.2 *Representar gráficamente los vectores de posición $\mathbf{v} = (3, 5)$ y $\mathbf{w} = (3, -1, 4)$.*

2.3 *Encontrar un vector con punto inicial $\mathrm{P}(3, -1)$ y que sea igual al vector $\mathbf{a} = (2, 6)$.*

2.4 *Demostar que si $\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ es paralelo a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{w}$.*

2.5 *Sean los vectores $\mathbf{a} = (2, 1, -3)$ y $\mathbf{b} = (-1, 8, 1)$.*

1. *Encontrar al vector* $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.
2. *Encontrar la magnitud y dirección (ángulos directores) de este vector.*

2.6 *Dos fuerzas* $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2} \in \mathbf{R^2}$ *de magnitudes 15 N y 20 N, respectivamente, actúan sobre un objeto ubicado en un punto P. Encontrar al vector resultante* $\mathbf{F_R}$*, si* $\mathbf{F_1}$ *y* $\mathbf{F_2}$ *forman ángulos de 30 ° y 120 ° , con respecto a la dirección positiva del eje* x*, respectivamente. Construir el diagrama de fuerzas correspondiente.*

2.7 *Determinar una fuerza* $\mathbf{F_1}$*, tal que* $\mathbf{F_1}$*,* $\mathbf{F_2} = (2, 0, 3)$ *y* $\mathbf{F_3} = (2, 1, 0)$ *estén en equilibrio.*

2.8 *Usando vectores, demostrar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto P que divide a cada mediana en la razón 1:2.*

2.9 *Ecuación de la recta.*

1. *Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(-1,1,2) y Q(2,1,3).*
2. *Encontrar otra representación paramétrica de la recta anterior.*
3. *Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, -1, 2) y que es paralela a la recta* $\ell(t) = (2 + t, 1 - t, t)$.
4. *Determinar si el punto P(1, 2, 1) está contenido en la recta* $\ell(t) = (t, 1+2t, 2t)$.
5. *Determinar si las rectas* $\ell(t) = (1+t, 2+t, 3-t)$ *y* $\ell(t) = (-1+t, -3+2t, t-1)$ *se intersectan. En tal caso, encontrar el punto de intersección.*
6. *Demostrar que en* $\mathbf{R^2}$*, la representación paramétrica de la recta* $\ell(t) = (u_1, u_2) + t(v_1, v_2)$ *es equivalente a la representación no paramétrica* $y = mx + b$.
7. *Obtener la Ec. (7) a partir de la Ec. (5).*

3. Espacios vectoriales

3.1. Definición

Los espacios $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$ tienen ciertas propiedades en común con otros conjuntos de objetos matemáticos como por ejemplo los polinomios de grado n o las matrices $m \times n$. Tales propiedades permiten definir un espacio vectorial (también llamado espacio lineal).

Un conjunto $\mathbf{V}$ es un **espacio vectorial** y sus elementos se llaman **vectores**, si la adición de vectores y la multiplicación por un escalar están definidos, y $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, y $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$, se cumple:

1. **Propiedad de cerradura.**
   a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
   b) $k_1\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.
2. **Propiedades de la suma de vectores.**
   a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
   b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
   c) $\exists\, \mathbf{0} \in \mathbf{V}$, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$.
   d) $\forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $\exists\, (-\mathbf{u}) \in \mathbf{V}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
3. **Propiedades de la multiplicación por un escalar.**
   a) $(k_1 + k_2)\mathbf{u} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{u}$.
   b) $k_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k_1\mathbf{u} + k_1\mathbf{v}$.
   c) $(k_1k_2)\mathbf{u} = k_1(k_2\mathbf{u})$.
   d) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Un conjunto dado ha de satisfacer todas las condiciones anteriores para ser un espacio vectorial. Al elemento $\mathbf{0}$ se le llama la identidad aditiva. Aunque los espacios vectoriales pueden involucrar elementos con números complejos, en este texto se consideran sólo aquellos que incluyan números reales y son llamados **espacios vectoriales sobre los reales**.

Ejemplos. Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales (*véase ejercicio 3.1*):

3.1 $\mathbf{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in \mathbf{R};\ i = 1, 2, \ldots, n\}$

3.2 $p_n = \{p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \,|\, a_i \in \mathbf{R};\ i = 0, 1, \ldots, n\}$, *donde* x *es una indeterminada.*

3.3

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{m\times n} &= \{\textit{matrices con elementos}\, (A)_{ij} = a_{ij} \,|\, a_{ij} \in \mathbf{R}; \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\}\, d\end{aligned}$$

El Ejemplo 3.1 es una generalización de $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$ al conjunto de n–adas ordenadas. Dado que el espacio vectorial $\mathbf{R}^n$, $n > 3$, se representaría en un sistema de coordenadas involucrando n ejes de coordenadas perpendiculares entre sí, es claro que no es posible obtener una representación gráfica de los vectores en este caso. Sin embargo, a pesar de no poder representar a los vectores en $\mathbf{R}^n$ como flechas,[5] esto no implica que estos espacios vectoriales carezcan de importancia práctica. Muchas propiedades físicas dependen de más de tres variables. Por ejemplo, la densidad de un fluido inhomogéneo, además de depender de las tres coordenadas espaciales, puede depender de variables adicionales tales como la temperatura (T), la presión (p) y el tiempo (t); en este caso particular, la densidad es función de seis variables, y los elementos (x, y, z, T, p, t) pertenecen a $\mathbf{R}^6$.

En el Ejemplo 3.2 se presenta al conjunto de polinomios de grado n en la indeterminada x, expresados en notación de suma[6]. La suma de polinomios y la multiplicación de polinomios por un escalar también están definidas. Dados $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$:

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i, \qquad k\, p(x) = \sum_{i=0}^{n} k\, a_i x^i\,.$$

De igual manera, para el espacio de las matrices de orden $m \times n$, Ejemplo 3.3, la suma de matrices y la multiplicación por un escalar están definidas. Dadas dos

[5] Las propiedades generales de los espacios vectoriales y los ejemplos 3.1 a 3.3 muestran que los vectores no son flechas; éstas son solamente representaciones gráficas de los elementos de $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$.

[6] Dado que la notación de suma permite realizar de manera clara y condensada las manipulaciones entre los elementos de un espacio vectorial, es recomendable que se comprenda su uso plenamente.

matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, con elementos $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$ y $(\mathbf{B})_{ij} = b_{ij}$ en el renglón i y la columna j, respectivamente, la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ se obtiene de la siguiente manera:

$$(\mathbf{C})_{ij} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \, .$$

En particular, el conjunto de matrices $1 \times n$ coincide con $\mathbf{R}^n$. Por otro lado, el conjunto de matrices $n \times 1$ contiene elementos de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

Se trata de **vectores columna**, los cuales son equivalentes a los vectores renglón discutidos hasta el momento pues también son n–adas ordenadas. Un vector columna es la matriz transpuesta de un vector renglón. Los vectores columna serán utilizados al estudiar transformaciones lineales en la Sec. 6.

3.2. Subespacio

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial. Sea además $\mathbf{V}' \neq \emptyset$, tal que $\mathbf{V}' \subset \mathbf{V}$. Es decir, $\mathbf{V}'$ es un subconjunto no vacío de $\mathbf{V}$. $\mathbf{V}'$ es un **subespacio** de $\mathbf{V}$, si $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}'$ y $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$, se cumple que $k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Es decir, si $\mathbf{V}'$ satisface la propiedad de cerradura.

Nótese que la propiedad de cerradura implica que $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, es decir, que $\mathbf{0} \in \mathbf{V}'$. Por lo tanto, una condición necesaria, mas no suficiente, para que el subconjunto $\mathbf{V}'$ sea también un subespacio de $\mathbf{V}$, es que $\mathbf{0} \in \mathbf{V}'$.

Ejemplo.

3.4 *El conjunto* $\mathbf{L} = \{(x, y) \,|\, y = mx + b; x, m, b \in \mathbf{R}\}$ *sólo es subespacio de* $\mathbf{R^3}$ *cuando* $b = 0$.

Un subespacio $\mathbf{V}'$ de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ es también un espacio vectorial. Al estar definidas en $\mathbf{V}$ las operaciones de suma de vectores y la multiplicación por un escalar, entonces también están definidas para $\mathbf{V}'$. Se puede demostrar que la satisfacción de la propiedad de cerradura implica que las demás propiedades que definen a un espacio vectorial serán satisfechas por el subespacio.

3.3. Combinación lineal

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial. Sean además $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n} \in \mathbf{V}$ y $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbf{R}$. La expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{u_i} = k_1 \mathbf{u_1} + k_2 \mathbf{u_2} + \ldots + k_n \mathbf{u_n} \tag{8}$$

se llama **combinación lineal** del conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$. Debido a la propiedad de cerradura de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar, una combinación lineal es un vector contenido en $\mathbf{V}$. En algunas ocasiones es posible expresar a un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ como combinación lineal de un conjunto arbitrario $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{u_i} \,. \tag{9}$$

A partir de la Ec. (9) se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve para el conjunto $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ de coeficientes de la combinación lineal. Tal sistema de ecuaciones puede ser consistente o inconsistente. Cuando el sistema es inconsistente significa que el vector $\mathbf{v}$ no puede ser expresado como combinación lineal del conjunto dado; cuando es consistente, éste puede tener solución única o bien un número infinito de soluciones, conduciendo a la existencia de grados de libertad. En las siguientes subsecciones se analizan las condiciones en las que estas situaciones se presentan.

3.4. Espacio generado

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n} \in \mathbf{V}$. Al conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ se le llama **espacio generado** por el conjunto. Este conjunto genera $\mathbf{V}$, siempre que $\forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \exists\, k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbf{R}$, tal que $\mathbf{v} = k_1 \mathbf{u_1} + k_2 \mathbf{u_2} + \ldots + k_n \mathbf{u_n}$. Nótese que, en general, el conjunto $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ sólo genera un subespacio de $\mathbf{V}$.

Ejemplos.

3.5 *Dos vectores* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R^3}$ *sólo generan ya sea un plano, una recta o sólo el vector* $\mathbf{0}$.

3.6 *Dos polinomios de grado 2 no generan el conjunto* p_3.

Estos ejemplos son fáciles de entender al considerar, por ejemplo, que no es posible obtener mediante combinaciones lineales de dos vectores otro vector fuera del plano que contiene a los dos primeros; o bien, mediante la suma de polinomios de grado 2, uno de grado 3. En tales casos, para un vector dado, a partir de la Ec. (9) se obtiene un sistema de ecuaciones inconsistente en el que las incógnitas son los coeficientes de la combinación lineal.

Ejemplo.

3.7 *No es posible expresar al vector* $\mathbf{w} = (1, 6, 4)$ *como combinación lineal de los vectores* $\mathbf{u} = (2, 3, 1)$ *y* $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$. *En este caso, la Ec. (9) toma la forma:*

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}\,.$$

Al sustituir los vectores anteriores e igualar las componentes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales inconsistente:

$$\begin{array}{rcrcl} 2k_1 & + & k_2 & = & 1 \\ 3k_1 & & & = & 6 \\ k_1 & - & k_2 & = & 4 \end{array}$$

Geométricamente, ésto significa que el vector $\mathbf{w}$ *no está contenido en el plano generado por* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$.

3.5. Independencia y dependencia lineal

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial. Sean además $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{V}$ y $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbf{R}$. El conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es **linealmente independiente** si

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{u_i} = \mathbf{0} \longleftrightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0\,. \tag{10}$$

Es decir, la única manera de obtener al vector cero como resultado de la combinación lineal de un conjunto de vectores linealmente independiente es que todos los coeficientes de la combinación lineal sean cero. El conjunto será linealmente dependiente cuando la igualdad se cumpla y $\exists\, k_j \neq 0, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ésto implica que al menos uno de los vectores del conjunto linealmente dependiente puede ser expresado como combinación lineal de los demás. Sea el conjunto linealmente dependiente, donde $k_j \neq 0$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{u_i} \;=\; \mathbf{0}\,,$$

$$\mathbf{u}_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} -\frac{k_i}{k_j}\mathbf{u_i} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} c_i\mathbf{u}_i\,,$$

donde $c_i = -k_i/k_j$. Esta situación se ilustra a continuación para $\mathbf{R^3}$.

3.5.1. Interpretación geométrica en $\mathbf{R^3}$

Sean los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R^3}$, linealmente dependientes. Sea la combinación lineal de estos vectores igual a cero:

$$k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} + k_3\mathbf{w} = 0\,.$$

Por la propiedad de dependendencia lineal, suponemos que $\exists\, k_j \neq 0, j = 1, 2$ ó 3. Sea por ejemplo $k_1 \neq 0$. Entonces:

$$\mathbf{u} = -\frac{k_2}{k_1}\mathbf{u} - \frac{k_3}{k_1}\mathbf{w}\,.$$

Es decir, $\mathbf{u}$ es de la forma:

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \quad a, b \in \mathbf{R}\,,$$

donde $a = -k_2/k_1$ y $b = -k_3/k_1$. Por lo tanto, los vectores $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son coplanares (véase Fig. 7). Así, el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente y además no genera $\mathbf{R^3}$ sino sólo un plano, subespacio de este espacio vectorial. Puede suceder que únicamente genere una recta, la cual será también un subespacio de $\mathbf{R^3}$. Incluso puede generar sólo un punto, el origen, que por supuesto también es un subespacio de $\mathbf{R^3}$. Nótese que el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores elementos de $\mathbf{V}$, siempre es un subespacio de $\mathbf{V}$.

De igual manera, si dos vectores son tales que $\mathbf{w} = c\mathbf{v}$, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente y sólo genera una recta, siempre que alguno de ellos sea diferente de $\mathbf{0}$.

Es posible encontrar situaciones donde se tenga un conjunto linealmente independiente que no genera al espacio vectorial del que es subconjunto.

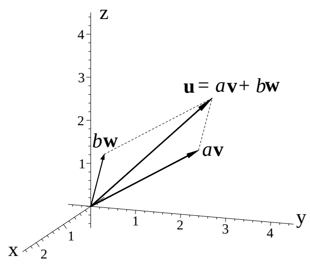


Figura 7: Tres vectores en $\mathbf{R^3}$ linealmente dependientes que generan un plano.

Ejemplos.

3.8 *Los vectores* $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$ *y* $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ *son linealmente independientes pero no generan* $\mathbf{R^3}$ *sino sólo un plano. Por ejemplo, el vector* $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$ *no se encuentra en el espacio generado por los vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$*.*

3.9 *Los polinomios* $f(x) = 1 + x$ *y* $g(x) = x + x^2$ *son linealmente independientes pero no generan* p_2*. Por ejemplo, el polinomio* $h(x) = 1 - x + x^2$ *no se encuentra en el espacio generado por los polinomios* $f(x)$ *y* $g(x)$*. Véase el ejercicio 3.5*

3.6. Base y dimensión

3.6.1. Base

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial. El conjunto $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n} \in \mathbf{V}\}$ es una **base** de $\mathbf{V}$ si satisface las siguientes dos condiciones:

1. Es linealmente independiente.
2. Genera $\mathbf{V}$.

Ésto significa que cualquier elemento de $\mathbf{V}$ puede expresarse como combinación lineal del conjunto $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ y que ninguno de los vectores $\mathbf{u_1}$,$\mathbf{u_2}$,...,$\mathbf{u_n}$ puede expresarse como combinación lineal de los otros. Existe un número infinito de conjuntos que satisfacen las condiciones anteriores y por lo tanto existe también un número infinito de bases para un espacio vectorial dado.[7]

[7]Excepto para el espacio vectorial $\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$, cuya única base es el conjunto vacío, ϕ.

Ejemplos.

3.10 *El conjunto* $\left\{\hat{\mathbf{\imath}} = (1,0,0), \hat{\mathbf{\jmath}} = (0,1,0), \hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)\right\}$ *es una base para* $\mathbf{R^3}$.

3.11 *El conjunto* $\{\mathbf{a} = (1,1,0), \mathbf{b} = (0,1,1), \mathbf{c} = (2,3,1)\}$ *es una base para* $\mathbf{R^3}$.

3.12 *El conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para el conjunto de matrices 2×2.

Es común representar un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en términos del conjunto $\left\{\hat{\mathbf{\imath}}, \hat{\mathbf{\jmath}}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$. Mediante la Ec. (9):

$$\begin{aligned} k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) &= (u_1, u_2, u_3) \\ (k_1, k_2, k_3) &= (u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

De la segunda igualdad se obtiene que los coeficientes de la combinación lineal son directamente las componentes del vector $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = u_1\hat{\mathbf{\imath}} + u_2\hat{\mathbf{\jmath}} + u_3\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Para una base distinta, la solución del sistema de ecuaciones para los coeficientes de la combinación lineal no es tan directa como en este caso.

3.6.2. Dimensión

Las siguientes son definiciones equivalentes de la **dimensión** del espacio vectorial $\mathbf{V}$:

- Es el número de elementos de una base de $\mathbf{V}$.
- Es el número máximo de vectores en $\mathbf{V}$ linealmente independientes.
- Es el número mínimo de vectores que generan $\mathbf{V}$.

La dimensión del espacio vectorial $\mathbf{V}$ se denota por $\dim\mathbf{V} = n$.

Ejemplos.

3.13 $\dim \mathbf{R}^n = n$.

3.14 $\dim p_n = n + 1$.

3.15 $\dim \mathbf{M}^{m\times n} = mn$.

3.7. *Ejercicios*

3.1 *Verificar que $\mathbf{R}^n$, p_n y $\mathbf{M}^{m\times n}$ son espacios vectoriales.*

3.2 *Determinar si el conjunto $\mathbf{V}$ de pares ordenados (x, y) que satisfacen*

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

es un subespacio de $\mathbf{R^2}$.

3.3 *Expresar al polinomio $f(x) = x + x^2$ como combinación lineal de los polinomios $g_1(x) = 1 + x$, $g_2(x) = 1 - x - x^2$ y $g_3(x) = 2 + x$.*

3.4 *Determinar si los vectores $\mathbf{u} = (1, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, -1)$ generan $\mathbf{R^2}$.*

3.5 *Demostrar que las funciones $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = x + x^2$ son linealmente independientes pero no generan p_2. Explicar por qué el polinomio $h(x) = 1 - x + x^2$ no se encuentra en el espacio generado por $f(x)$ y $g(x)$.*

3.6 *Determinar si la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

se encuentra en el espacio generado por las matrices

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.7 *Determinar si los vectores* $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$*,* $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$ *y* $\mathbf{w} = (0, -1, 1)$ *generan* $\mathbf{R^3}$*.*

3.8 *¿Cuál de los siguientes conjuntos forma una base para* $\mathbf{R^3}$*?*

1. $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$*,* $\mathbf{v} = (2, 3, 5)$ *y* $\mathbf{w} = (-3, 0, 2)$

2. $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$*,* $\mathbf{v} = (1, 3, 5)$ *y* $\mathbf{w} = (1, -1, 1)$

3.9 *Determinar si las matrices siguientes forman una base para* $\mathbf{M}^{3\times 2}$*:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.10 *Determinar si los vectores* $\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$*,* $\mathbf{v} = -\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ *y* $\mathbf{w} = 3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ *forman una base para* $\mathbf{R^2}$*.*

Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

4. Producto interno

4.1. Definición

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial. Un **producto interno** sobre $\mathbf{V}$ asocia a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ un escalar denotado por $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$, que tiene las siguientes propiedades:

1. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >=< \mathbf{v}, \mathbf{u} >$.

2. $< \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{w} > + < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$.

3. $\forall\, k \in \mathbf{R}, \quad < k\mathbf{u}, \mathbf{v} >= k < \mathbf{u}, \mathbf{v} >=< \mathbf{u}, k\mathbf{v} >$.

4. $< \mathbf{u}, \mathbf{u} >\geq 0$. $< \mathbf{u}, \mathbf{u} >= 0 \leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

El producto interno también es llamado **producto interior**, **producto escalar** o **producto punto**.

Ejemplos.

4.1 *Sean* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, *y* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$. *El siguiente es un producto interno en* $\mathbf{R}^n$*:*

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >\equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \,. \tag{11}$$

4.2 *Sea* $C[a, b]$ *el conjunto de funciones continuas en el intervalo* $[a, b]$. *Sean* $f, g \in C[a, b]$. *El siguiente es un producto interno en* $C[a, b]$*:*

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

4.3 *El siguiente es un producto interno en el espacio de las matrices* $\mathbf{M}^{m\times n}$. *Sean* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}^{m\times n}$, *con elementos* $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$ *y* $(\mathbf{B})_{ij} = b_{ij}$, *respectivamente:*

$$< \mathbf{A}, \mathbf{B} >= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \,.$$

En el caso particular del producto interno en $\mathbf{R}^n$, en adelante usaremos la notación más común $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, indicada en el Ejemplo 4.1.

Existen muchas maneras de definir un producto interno para un espacio vectorial. Cualquier definición que cumpla con las condiciones (a) a (d) anteriores, podrá ser un producto interno válido. En $\mathbf{R}^n$, utilizaremos la definición más usual dada por la Ec. (11), introducida en el Ejemplo 4.1.

Ejemplo.

4.4 *Es posible verificar que el siguiente también es un producto interno en* $\mathbf{R^2}$. *Sean* $\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2)$*:*

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= u_1 v_1 - 2u_1 v_2 - 2u_2 v_1 + 5u_2 v_2$$

4.2. Ortogonalidad

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ son **ortogonales** si y sólo si $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= 0$.

Ejemplos.

4.5 *Los vectores* $\mathbf{u} = (2, 3, -1)$ *y* $\mathbf{v} = (3, 2, 12)$ *son ortogonales de acuerdo a la definición de producto punto dada en el ejemplo 4.1.*

4.6 *Las funciones* $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ *y* $g(x) = \cos 2x$ *son ortogonales en el intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *de acuerdo a la definición de producto interno entre funciones continuas dada en el ejemplo 4.2.*

4.3. Norma

También llamada **magnitud** o **longitud**. La **norma** de un vector $\mathbf{u}$ se define como

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{< \mathbf{u}, \mathbf{u} >}. \tag{12}$$

Ejemplos.

4.7 *En el caso de vectores en* $\mathbf{R}^n$*, y utilizando la definicón de producto interior dada en el Ejemplo 4.1, se obtiene la* ***norma euclidiana*** *de* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$*:*

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}\,. \tag{13}$$

Este resultado es consistente con el teorema de Pitágoras; las ecuaciones (1) y (3) son un caso particular de la Ec. (13).

4.8 *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbf{M}^{m\times n}$*, una matriz* $m \times n$ *con elementos* $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$*. La siguiente se denomina* ***norma de Frobenius*** *de la matrix* $\mathbf{A}$*:*

$$||\mathbf{A}||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\,.$$

Esta definición se obtiene utilizando la de producto interno entre matrices indicada en el Ejemplo 5.5 y es utilizada a menudo en análisis numérico.[8]

Cuando un vector tiene norma 1 se dice que es un **vector unitario** y es común representarlo con un acento circunflejo: $\hat{\mathbf{u}}$. A partir de un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ es posible obtener dos vectores unitarios paralelos a él multiplicandolo por un escalar: $\hat{\mathbf{u}} = \pm k\mathbf{u}$. Se trata entonces de encontrar k, tal que la igualdad anterior se cumpla. Es decir, $1 = ||\hat{\mathbf{u}}||$, o bien: $1 = ||\hat{\mathbf{u}}||^2 = ||k\mathbf{u}||^2 = k^2||\mathbf{u}||^2$. Por lo tanto $k = \pm 1/||\mathbf{u}||$. Se obtienen dos vectores unitarios, uno de los cuales es

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/||\mathbf{u}||$$

y el otro es el negativo de éste. En conclusión, para encontrar un vector unitario en la dirección de otro no unitario, basta con dividir al vector no unitario entre su norma.

Ejemplo.

4.9 *En el caso de vectores en* $\mathbf{R^3}$*, un vector unitario en la dirección del vector* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *es:*

$$\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{u_1}{||\mathbf{u}||}, \frac{u_2}{||\mathbf{u}||}, \frac{u_3}{||\mathbf{u}||}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\,.$$

Es decir, se obtiene un vector cuyas componentes son los cosenos directores (véase discusión alrededor de la Ec. (4)). Dado que este vector es unitario, se obtiene entonces la siguiente relación entre los cosenos directores:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

---

[8] Véase por ejemplo *Matrix Computations*, G. H. Golub y C. F. van Loan, The Johns Hopkins University, 1983.

4.3.1. Base ortonormal

Una base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n \in \mathbf{V}\}$ de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ es una **base ortonormal** si sus elementos son vectores unitarios y además son ortogonales entre sí.

Ejemplo.

4.10 *La base* $\left\{\hat{\mathbf{\imath}}, \hat{\mathbf{\jmath}}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$ *es una base ortonormal para* $\mathbf{R^3}$.

4.11 *La base* $\left\{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)\right\}$ *es una base ortonormal para* $\mathbf{R^2}$.

4.4. Ángulo entre vectores en $\mathbf{R}^n$

El ángulo θ entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, elementos de $\mathbf{R}^n$, se obtiene a partir de:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||}\,, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\,. \tag{14}$$

Nótese que se ha usado la notación más usual para el producto punto entre vectores en $\mathbf{R^2}$ o $\mathbf{R^3}$. En la Fig. 8 se presenta un ejemplo en $\mathbf{R^2}$.

En el caso de vectores en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$ la Ec. (14) indica que dos vectores ortogonales son perpendiculares.

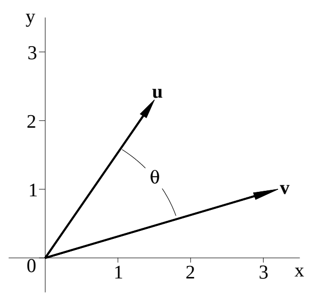


Figura 8: Ángulo entre vectores en $\mathbf{R^2}$.

4.5. Proyección

La proyección de un vector $\mathbf{v}$ sobre otro $\mathbf{u}$ se ilustra en la Fig. 9. Ésta se puede entender como la longitud de la sombra debida a $\mathbf{v}$ sobre la recta que contiene a $\mathbf{u}$, si una luz perpendicular a $\mathbf{u}$ (es decir, paralela a la linea punteada) incidiera sobre los vectores.

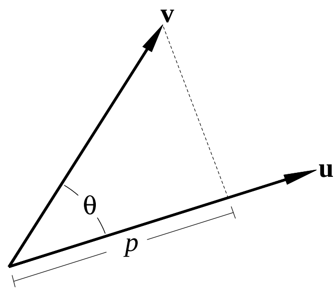


Figura 9: Proyección (p) de un vector sobre otro.

A partir del triángulo rectángulo formado por la proyección p, el vector $\mathbf{v}$ y la linea punteada, se obtiene:

$$\cos\theta = \frac{p}{||\mathbf{v}||}\,, \quad -\pi < \theta < \pi\,.$$

De esta igualdad, se despeja p:

$$p = ||\mathbf{v}||\cos\theta\,.$$

Utilizando la Ec. (14) se obtiene:

$$p = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||}\,. \tag{15}$$

Nótese que cuando el ángulo entre los vectores sea igual o mayor que $\pi/2$ radianes la proyección será cero o negativa, respectivamente.

4.6. *Ejercicios*

4.1 *Sean los vectores* $\mathbf{a} = (2, 5, 1)$ *y* $\mathbf{b} = (3, -1, 1)$.

1. *Evaluar* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.
2. *Evaluar* $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})\cdot 4\mathbf{b}$.
3. *Encontrar la norma de* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
4. *Encontrar dos vectores unitarios paralelos al vector* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

5. *Encontrar el ángulo entre los vectores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$.

6. *Encontrar la proyección del vector* $\mathbf{a}$ *sobre el vector* $\mathbf{b}$.

4.2 *Encontrar un vector unitario perpendicular a los vectores* $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{\imath}} + \hat{\mathbf{\jmath}}$ *y* $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{\imath}} + \hat{\mathbf{k}}$.

4.3 *Encontrar la componente de la fuerza* $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{\imath}} - \hat{\mathbf{\jmath}} + \hat{\mathbf{k}}$ *en la dirección del movimiento de una partícula que se desplaza sobre la recta:*

$$\ell(t) = (1 + 3t, 2 + 4t, -3 + 5t)\,,$$

donde t representa al tiempo en la trayectoria de la partícula.

4.4 *¿Cuáles de las siguientes expresiones no tienen sentido?*

(a) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$	*(b)* $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$	*(c)* $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\|\|\mathbf{c}\|\|$
(d) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\|\|\mathbf{c}\|\|$	*(e)* $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$	*(f)* $\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$

4.5 *Verificar que la Ec. (14) es equivalente a la Ley de los cosenos mediante el cálculo de la magnitud del vector* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. *Realizar la representación gráfica.*

4.6 *Mostrar que:*

$$||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 \longleftrightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

(teorema de Pitágoras).

4.7 *Encontrar la ecuación de la recta que pasa por P(3,1,-2) que se intersecta y es perpendicular a la recta* $x = -1 + t$, $y = -2 + t$, $z = -1 + t$.

4.8 *Sean los vectores* $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. *Demostrar que la ecuación* $(\mathbf{r} - \mathbf{a})\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0$ *representa una esfera; encontrar su radio y centro.*

4.9 *Sean las funciones* $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3, \in C[-2, 2]$. *Usando la definición de producto interior entre funciones dada en el Ejemplo 4.6:*

1. *Determinar si estas funciones son ortogonales.*

2. *A partir de f y g, encontrar un polinomio h de grado tres tal que* $< h, h >= 1$. *(una función que cumple con esta condición se dice que está **normalizada**).*

4.10 *Verificar que el conjunto*

$$\left\{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,1,-1,-1), \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)\right\}$$

es una base ortonormal para $\mathbf{R}^4$.

5. Producto cruz

5.1. Definición

El **producto cruz**, también llamado **producto vectorial**, entre los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, está dado por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - v_2 u_3)\hat{\mathbf{\imath}} - (u_1 v_3 - v_1 u_3)\hat{\mathbf{\jmath}} + (u_1 v_2 - v_1 u_2)\hat{\mathbf{k}}\,, \tag{16}$$

y sólo se define en $\mathbf{R^3}$. A diferencia del producto interior, donde se obtiene un escalar, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector. Esta definición, que a simple vista podría parecer injustificada resulta útil tanto en el estudio de la geometría de vectores en $\mathbf{R^3}$, como en el estudio de propiedades físicas. Un ejemplo es el vector de momento angular, definido como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, importante en el estudio de la dinámica de partículas. En esta definición, $\mathbf{r}$ es el vector de posición que describe la trayectoria de una partícula, y $\mathbf{p}$ es el vector de momento lineal.

El producto cruz se puede escribir usando la notación de determinantes:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{\imath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\,. \tag{17}$$

Sin embargo, es importante aclarar que el producto cruz no es un determinante ya que contiene vectores en un renglón; la Ec. (17) es sólo una regla nemotécnica, más fácil de memorizar que la Ec. (16).

El producto cruz cumple con las siguientes propiedades. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R^3}$, y $k \in \mathbf{R}$:

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (propiedad anticonmutativa).
2. $(k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$.
3. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$.
4. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Aunque todas estas propiedades son consecuencia de la definición 16, son más fáciles de verificar usando las propiedades de los determinantes. Por ejemplo, la propiedad 1 está de acuerdo con la propiedad de los determinantes que indica que al intercambiar dos renglones de un determinante, éste cambia su signo. La propiedad 5 sigue de aquélla que indica que un determinante con dos renglones iguales tiene valor 0 (el vector $\mathbf{0}$ en este caso).

5.2. Triple producto escalar

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R^3}$. El **triple producto escalar** se define por:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} =$$
$$u_1(v_2w_3 - w_2v_3) - u_2(v_1w_3 - w_1v_3) + u_3(v_1w_2 - w_1v_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Dado que tanto el producto punto como el producto cruz son operaciones que sólo están definidas entre vectores, el par de paréntesis indicado en la primera expresión en la Ec. (18) es redundante. Sin embargo, por el momento se conservará con fines de claridad. Nótese además que el triple producto escalar sí es un determinante pues involucra solamente escalares como resultado de realizar el producto punto entre dos vectores.

El triple producto escalar tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.

3. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.

Estas propiedades se prueban mediante las propiedades de los determinantes.

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores no paralelos. Debido a la propiedad (b) el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ simultaneamente, y por lo tanto, al plano que los contiene. Al igual que en la definición de un sistema de coordenadas derecho, el sentido del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está determinado por la regla de la mano derecha: al orientar los dedos de la mano derecha excepto el pulgar, desde el vector $\mathbf{u}$ hasta el vector $\mathbf{v}$, el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ apunta en la dirección del dedo pulgar.

Ejemplos.

5.1 *1.* $\hat{\mathbf{\imath}} \times \hat{\mathbf{\imath}} = \hat{\mathbf{\jmath}} \times \hat{\mathbf{\jmath}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$.

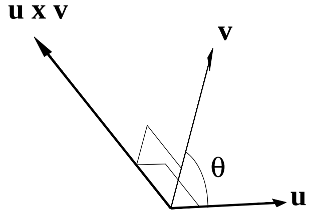
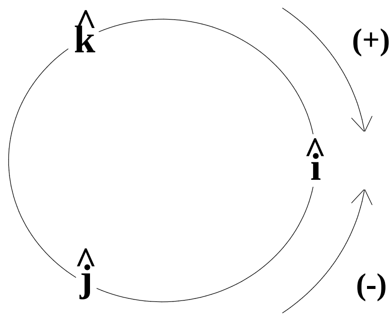


Figura 10: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es un vector perpendicular a los vectores no paralelos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y su dirección es tal que los tres vectores forman un sistema derecho.

2. $\hat{\mathbf{\imath}} \times \hat{\mathbf{\jmath}} = \hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{\jmath}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{\imath}}$, $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{\imath}} = \hat{\mathbf{\jmath}}$.

3. $\hat{\mathbf{\imath}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{\jmath}}$, $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{\jmath}} = -\hat{\mathbf{\imath}}$, $\hat{\mathbf{\jmath}} \times \hat{\mathbf{\imath}} = -\hat{\mathbf{k}}$.

Estos dos últimos incisos se pueden resumir en forma de diagrama. Al hacer el producto cruz entre dos vectores adyacentes, se obtiene el vector restante; le precede un signo positivo cuando el sentido de giro sea el de las manecillas del reloj y negativo cuando sea en el sentido contrario.



5.2 *La fuerza magnética sobre una carga q con velocidad $\mathbf{v}$, bajo la acción de un campo con inducción magnetica $\mathbf{B}$, está dada por la siguiente expresión:*

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,.$$

Esta fuerza es perpendicular a la dirección de movimiento de la carga y a las lineas de campo magnético.

5.3. Más sobre interpretación geométrica de vectores en $\mathbf{R}^3$

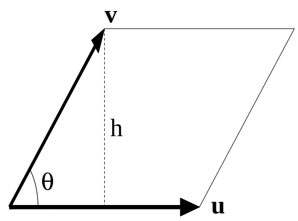
5.3.1. Ángulo entre vectores en $\mathbf{R}^3$

El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se relaciona con el ángulo θ entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de la siguiente manera (véase Fig. 10):

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||}{||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\,. \tag{19}$$

5.3.2. Área de un paralelogramo

Considerar el paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:



El área A del paralelogramo es:

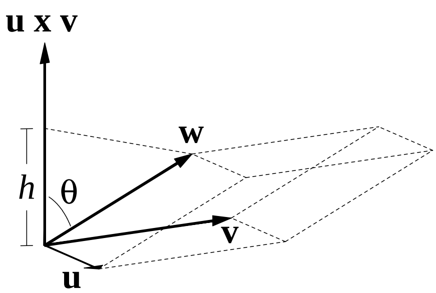
$$\mathrm{A} = (\text{base})(\text{altura}) = b\,h = \underbrace{(||\mathbf{u}||)}_{b}\,\underbrace{(||\mathbf{v}||\operatorname{sen}\theta)}_{h}$$

Usando la Ec. (19) se obtiene:

$$\mathrm{A} = ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\,. \tag{20}$$

5.3.3. Volumen de un paralelepípedo

El volumen V del paralelepípedo generado por los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se obtiene considerando la siguiente figura:



$$V = (\text{área de la base})(\text{altura}) = A_b\, h = \underbrace{(||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||)}_{A_b}\,\underbrace{(||\mathbf{w}|||\cos\theta|)}_{h},$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ (véase la figura anterior).

Usando las ecuaciones (14) y (20), y considerando que el volumen es un número positivo, se obtiene:

$$V = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|\,. \tag{21}$$

Ejemplo.

5.3 *Al calcular el triple producto escalar de los vectores* $\mathbf{u} = (2,3,1)$*,* $\mathbf{v} = (1,0,-1)$ *y* $\mathbf{w} = (1,6,5)$*, mediante la Ec. (18), se obtiene* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \mathbf{0}$*. De acuerdo con la Ec. (21), el volumen del paralelepípedo generado por estos vectores es cero. Este resultado indica que los vectores anteriores son coplanares y como consecuencia linealmente dependientes.*

5.4. Ecuación de un plano

Un plano queda determinado con el conocimiento de tres puntos no colineales contenidos en él. De manera equivalente, un plano queda determinado por el conocimiento de un vector perpendicular y un punto contenido en él.

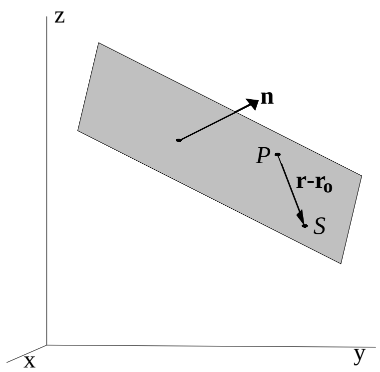


Figura 11: Plano normal al vector **n** y que pasa por el punto P.

Consideremos la ecuación del plano que contiene al punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Sea $S(x, y, z)$ un punto cualquiera contenido en el plano. Con esta información, es posible definir los siguientes dos vectores: $\mathbf{r_0} = \overrightarrow{OP} = (x_0, y_0, z_0)$ y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OS} = (x, y, z)$. En tal caso, el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ está contenido en el plano y por lo tanto es perpendicular al vector $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{r_0}) = 0\,. \tag{22}$$

Sustituyendo los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r_0}$ en esta ecuación, se obtiene:

$$a\,x + b\,y + c\,z = d\,, \tag{23}$$

donde $d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r_0} = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0$. Las ecuaciones (22) y (23) representan a los puntos $S(x, y, z)$ contenidos en el plano, por lo que cualquiera de ellas es una ecuación del plano.

Supongamos ahora que se conocen tres puntos no colineales $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$ y $R(x_2, y_2, z_2)$, contenidos en el plano. A partir de estos puntos es posible definir dos vectores $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$ contenidos en el plano. Un vector perpendicular a éstos, y por lo tanto al plano, es el vector $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, el cual junto con alguno de los puntos P, Q o R, puede ser utilizado en cualquiera de las ecuaciones (22) o (23).

Ejemplos.

5.4 *El plano $2x - y - z = 0$ es perpendicular al vector $\mathbf{n} = (2, -1, -1)$ y pasa por el origen.*

5.5 *La recta $\ell(t) = (2t, -t, -t)$ es perpendicular al plano $2x - y - z = 0$ y pasa por el origen.*

5.5. *Ejercicios*

5.1 *Encontrar la ecuación del plano que contiene a las rectas $\ell_1(t) = (1, 1, 2) + t(1, 0, 2)$ y $\ell_2(t) = (1, 0, 1) + t(2, -2, 2)$.*

5.2 *Determinar si el punto P(2,0,3) está contenido en el plano $2x - y + z = 6$.*

5.3 *Encontrar la ecuación del plano perpendicular a los planos* $x + y + z = 1$ *y* $2x + 2y + z = 5$*, y que pasa por el origen.*

5.4 *Encontrar la ecuación del plano paralelo al plano* $x - y + z = 1$ *y que pasa por el punto P(1,1,0).*

5.5 *Encontrar las coordenadas del punto de intersección entre la recta* $\ell(t) = (t\hat{\mathbf{i}} + (1+t)\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ *y el plano* $z = 2x + 2y + 1$.

5.6 *Demostrar que el vector* $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$ *es paralelo al plano* xy.

6. Transformaciones lineales

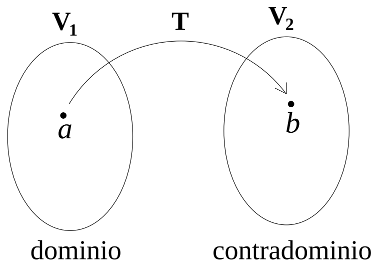
6.1. Definiciones

Ahora estudiaremos las relaciones que se pueden establecer entre los elementos de diferentes espacios vectoriales.

Sean $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ dos espacios vectoriales. Una **transformación** es una función T que asocia a $a \in \mathbf{V_1}$ un elemento de $\mathbf{V_2}$. Una transformación también es llamada **función** u **operador**.

Al conjunto $\mathbf{V_1}$ se le llama el **dominio** y al conjunto $\mathbf{V_2}$ se le llama el **contradominio**. Además, se dice que el elemento b es la **imagen** de a.

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &: \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2 \\ b &= \mathrm{T}(a) \end{aligned}$$



Nótese que la naturaleza de los elementos del dominio y del contradominio puede ser muy diversa. Además, la regla de asociación que define la transformación, aunque arbitraria, puede en casos concretos tener significado físico, geométrico o de otra naturaleza. Ésto se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos.

6.1 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. *Sean* $x, y \in \mathbf{R}$. *La regla de transformación es* $y = f(x) = x^2 + x$. *Se trata de una función en una variable. Por ejemplo,* $f(7) = (7)^2 + (7) = 56$*; es decir, 56 es la imagen de 7.*

6.2 $V : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$. *Sean* $(r, h) \in \mathbf{R^2}$ *y* $v \in \mathbf{R}$. *La regla de asociación* $v = V(r, h) = \pi r^2 h$ *puede interpretarse como el volumen de un cilíndro circular cuando* $r, h > 0$. *Se trata de una función de dos variables. Por ejemplo* $V(1, 2) = \pi(1)^2(2) = 2\pi$.

6.3 $p = p(T, v) = RT/v\,,\ R \in \mathbf{R}$. *Cuando* p, T *y* v *representan la presión, la temperatura y el volumen molar, respectivamente, se trata de la ecuación de estado para un gas a bajas presiones (gas ideal).*

6.4 $\mathrm{I} : C[a,b] \to \mathbf{R}$, *donde* $C[a,b]$ *se refiere a las funciones continuas en el intervalo* $[a,b]$. *La regla de asociación es:*

$$\mathrm{I}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Se trata de la integral definida de una función de una variable. Nótese que en este caso la regla de asociación relaciona un escalar con una función.

6.5 $\mathrm{D} : C^1[a,b] \to C[a,b]$, *donde* $C^1[a,b]$ *se refiere a las funciones diferenciables una vez en el intervalo* $[a,b]$. *La regla de asociación es:*

$$\mathrm{D}(f) = \frac{d\,f}{d\,x}\,.$$

En este caso se trata de la derivada de una función de una variable. Por ejemplo. $\mathrm{D}(\cos x^2) = -2x \operatorname{sen} x^2$.

Entre las transformaciones hay algunas que son de particular importancia en las aplicaciones. Se trata de las llamadas **transformaciones lineales**:

Sean $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ espacios vectoriales. Una transformación $\mathrm{T} : \mathbf{V_1} \to \mathbf{V_2}$ es lineal si $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V_1}, k \in \mathbf{R}$ se cumple:

1. $\mathrm{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathrm{T}(\mathbf{u}) + \mathrm{T}(\mathbf{v})$
2. $\mathrm{T}(k\mathbf{u}) = k\mathrm{T}(\mathbf{u})$

De aquí se sigue que si T es lineal entonces se cumple:

$$\mathrm{T}\left[\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{u}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathrm{T}(\mathbf{u}_i)\,, \quad \forall \mathbf{u}_i \in \mathbf{V_1}, k_i \in \mathbf{R}\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{24}$$

Ejemplos.

6.6 *La transformación* $P_{xy} : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$. $P_{xy}(x,y,z) = (x,y,0)$ *es una transformación lineal. Geométricamente, esta transformación se refiere a la proyección de un vector en el plano* xy.

6.7 *La transformación* $\ell : \mathbf{R} \to \mathbf{R^3}$. $\ell(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)$ *es lineal solamente cuando* $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. *Geométricamente, este último caso corresponde a la recta que pasa por el origen y es generada por el vector* (b_1, b_2, b_3).

6.8 *El operador integral definida (véase Ejemplo 6.4) es un operador lineal.*

6.9 *El operador derivada (véase Ejemplo 6.5) es un operador lineal.*

6.10 *La transformación* $\mathrm{T}(x,y) = (2x - y, y, -x)$ *es lineal.*

Como ejemplo adicional consideremos la rotación alrededor del origen de un vector $\mathbf{r} = (x,y) \in \mathbf{R^2}$, por un ángulo de θ radianes en el sentido contrario a las manecillas del reloj (véase Fig. 12).

Las componentes del vector antes de la rotación son:

$$x = R\cos\theta_0\,, \quad y = R\,\mathrm{sen}\,\theta_0\,,$$

y después de la rotación:

$$x' = R\cos\theta_1 = R\cos(\theta_0+\theta)\,, \quad y' = R\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = R\,\mathrm{sen}(\theta_0+\theta)\,.$$

Mediante el uso de identidades trigonométricas, se obtiene:

$$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \quad y' = y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

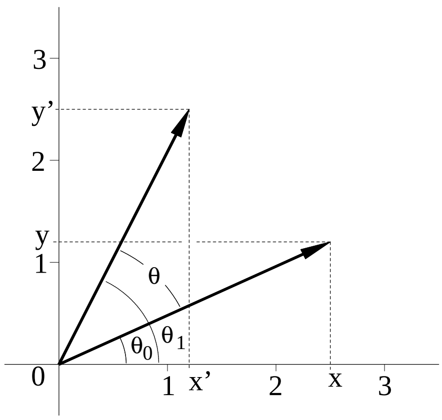


Figura 12: Rotación por θ radianes de un vector en $\mathbf{R^2}$.

Es decir, la transformación:

$$R(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{25}$$

corresponde a la rotación por θ radianes de un vector en $\mathbf{R}^2$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Además, se trata de una transformación lineal. La rotación de un vector en el espacio también es una transformación lineal. Las operaciones de rotación de un vector y la proyección de un vector en un plano, presentada en el Ejemplo 6.6, son casos particulares de una serie de operaciones que pueden realizarse sobre este tipo de objetos. Otros ejemplos son la reflexión de un vector sobre un plano y la inversión[9] (véase Ejemplo 6.18). Operaciones como éstas tienen relevancia en el estudio de las propiedades de simetría de las moléculas y en sus propiedades químicas y físicas (por ejemplo, en las propiedades espectroscópicas), y se estudian en la llamada teoría de grupos aplicada a la Química.[10]

6.2. Multiplicación de matrices

Sean dos matrices $\mathbf{A} \in \mathbf{M}^{m\times n}$ y $\mathbf{B} \in \mathbf{M}^{n\times p}$, con elementos $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$ y $(\mathbf{B})_{ij} = b_{ij}$ en el renglón i y la columna j, respectivamente. La matriz $\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$ se define como

$$(\mathbf{C})_{ij} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\,. \tag{26}$$

A partir de esta definición, los elementos de la matriz producto, $\mathbf{C}$, se obtienen mediante la suma de los productos de los elementos de los renglones de la primer matriz con los de las columnas de la segunda matriz. Obtengamos, por ejemplo, el elemento c_{32} de la matriz producto a partir del tercer renglón de la matriz $\mathbf{A}$ y de la segunda columna de la matriz $\mathbf{B}$:

$$\begin{pmatrix} & & & \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{12} & \\ & b_{22} & \\ & \vdots & \\ & b_{n2} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & c_{32} & \\ & & \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con la Ec. (26):

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + \ldots + a_{3n}b_{n2}\,.$$

La multiplicación matricial sólo está definida cuando el número de columnas de la primer matriz coincide con el número de renglones de la segunda. Además, de la

[9] La inversión es la operación de cambiar el signo a las componentes de un vector.

[10] Véase por ejemplo *Group Theory and Chemistry*, D. M. Bishop, Dover, 1993.

Ec. (26) se sigue que, en general, la multiplicación matricial no es conmutativa aunque existen casos particulares donde $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Ejemplos.

6.11 *Las matrices*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

conmutan pues

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

6.12 *Las matrices*

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

no conmutan pues

$$\mathbf{K}\,\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \mathbf{L}\,\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

6.3. Matriz asociada a una transformación lineal

En este apartado se muestra que el conocimiento del efecto de una transformación lineal sobre los elementos de una base del dominio es suficiente para saber el efecto de la transformación sobre cualquier elemento del dominio. Además, se describe la manera de representar matricialmente a una trasformación lineal.

Consideremos los espacios vectoriales $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$, de dimensión $\dim(\mathbf{V_1}) = n$ y $\dim(\mathbf{V_2}) = m$, respectivamente. Sea $\mathrm{T} : \mathbf{V_1} \to \mathbf{V_2}$ una transformación lineal y $\mathbf{u} \in \mathbf{V_1}$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{V_2}$. Sean $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ y $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ bases de $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$, respectivamente.

En términos de sus respectivas bases, los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i \tag{27}$$

y

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} v_i \mathbf{e}'_i \tag{28}$$

Aplicando T sobre el vector **u** se obtiene:

$$\mathbf{v} = \mathrm{T}(\mathbf{u}) \overset{\substack{usando\ Ec.\ (27)\\ \downarrow}}{=} \mathrm{T}\left[\sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i\right] \overset{\substack{usando\ Ec.\ (24)\\ \downarrow}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i \mathrm{T}(\mathbf{e}_i)\,. \tag{29}$$

En el último paso se utilizó el hecho de que T es una transformación lineal. La última expresión también indica que basta con conocer el efecto de la transformación sobre los elementos de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ para conocer su efecto sobre cualquier elemento del dominio $\mathbf{V_1}$.

El elemento $\mathrm{T}(\mathbf{e}_i)$ pertenece a $\mathbf{V_2}$ y, por lo tanto, se puede expresar como combinación lineal de la base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$:

$$\mathrm{T}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\mathbf{e}'_j\,. \tag{30}$$

Los coeficientes de la combinación lineal anterior tienen dos índices debido a que existe un conjunto de coeficientes para cada $\mathrm{T}(\mathbf{e}_i)$. Sustituyendo la expresión anterior en la Ec. (29):

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\,\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_i\,a_{ji}\,\mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n} u_i\,a_{ji}\right]\mathbf{e}'_j\,.$$

Igualando la expresión anterior con la Ec. (28) se obtiene:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} v_j\,\mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n} u_i\,a_{ji}\right]\mathbf{e}'_j\,.$$

Por lo tanto:

$$v_j = \left[\sum_{i=1}^{n} u_i\,a_{ji}\right]\,.$$

Esta expresión define los elementos de matriz del producto entre **A**, con elementos $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$, y el vector columna $\mathbf{u}^t$ (el transpuesto de **u**), con elementos $(u^t)_{i1} = u_{i1} \equiv v_i$; se produce el vector columna $\mathbf{v}^t$ con elementos $(v^t)_{j1} = v_{j1} \equiv u_j$:

$$\mathbf{v}^t = \mathbf{A}\,\mathbf{u}^t\,. \tag{31}$$

La matriz asociada a la transformación $\mathrm{T} : \mathbf{V_1} \to \mathbf{V_2}$ con dominio y contradominio de dimensiones $\dim(\mathbf{V_1}) = n$ y $\dim(\mathbf{V_2}) = m$, respectivamente, es de dimension $m \times n$: $\mathbf{A} \in \mathbf{M}^{m\times n}$. Además, la Ec. (30) indica la manera de obtener los elementos de la matriz asociada a la transformación lineal: se transforman los elementos de la base del dominio y el resultado de cada transformación se expresa como combinación lineal de la base del contradominio; los coeficientes cada una de estas combinaciones lineales se colocan como columnas de la matriz. Esa ecuación indica también que la matriz asociada a una transformación lineal depende de la bases seleccionadas para el dominio y el contradominio.

Ejemplos.

En los siguientes ejemplos se utiliza la base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$ *para* $\mathbf{R^2}$ *y la base* $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ *para* $\mathbf{R^3}$.

6.13 *La matriz asociada a la transformación lineal* $\mathrm{T}(x, y) = (y, x + y, x - y)$ *es*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, sea $\mathbf{v} = (2, 1)$. $\mathrm{T}(\mathbf{v}) = (1, 3, 1)$, *o de manera equivalente, utilizando la Ec. (31):*

$$\mathcal{T}\mathbf{v}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tal como se esperaba.

6.14 *La matriz asociada a la tranformación lineal que corresponde a la rotación por* θ *radianes de un vector en* $\mathbf{R^2}$ *en el sentido opuesto a las manecillas del reloj es:*

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(véase Ec. (25) en la Subsec. 6.1).

6.4. Composición de transformaciones

Sean $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ y $\mathbf{V_3}$ espacios vectoriales tales que $\dim(\mathbf{V_1}) = m$, $\dim(\mathbf{V_2}) = n$ y $\dim(\mathbf{V_3}) = p$. Sean además, las transformaciones:

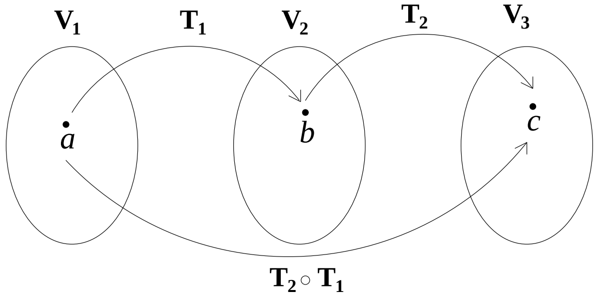
$$\begin{aligned} \mathrm{T}_1 &: \mathbf{V_1} \to \mathbf{V_2} \\ \mathrm{T}_2 &: \mathbf{V_2} \to \mathbf{V_3} \end{aligned}$$

La composición de T_1 y T_2 es:

$$\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1 : \mathbf{V_1} \to \mathbf{V_3}\,,$$

definida por

$$\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1(a) = \mathrm{T}_2\left(\mathrm{T}_1(a)\right)\,.$$



Es decir, se trata de la aplicación de T_1 seguida por T_2. La composición de transformaciones tiene relevancia, por ejemplo, en la generalización de la regla de la cadena a funciones de varias variables y en el estudio de las transformaciones de coordenadas. Nótese que, en general, la composición de transformaciones no es conmutativa. Puede suceder incluso que la composición en alguno de los dos órdenes ni siquiera esté definida.

Algunas propiedades importantes de la composición de transformaciones lineales son las siguientes:

1. La composición de dos transformaciones lineales es una transformación lineal. Sean T_1 y T_2 dos transformaciones lineales. Sea la composición $\mathrm{T} = \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1$ actuando sobre la combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}) &= \mathrm{T}_2\left[\mathrm{T}_1\left(k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}\right)\right] = \mathrm{T}_2\left[k_1\mathrm{T}_1(\mathbf{u}) + k_2\mathrm{T}_1(\mathbf{v})\right] \\ &= k_1\mathrm{T}_2\left[\mathrm{T}_1(\mathbf{u})\right] + k_2\mathrm{T}_2\left[\mathrm{T}_1(\mathbf{v})\right] \\ &= k_1\mathrm{T}(\mathbf{u}) + k_2\mathrm{T}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

2. Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ matrices asociadas a las transformaciones lineales T_1 y T_2, respectivamente. La matriz asociada a la composición $\mathrm{T} = \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1$ es la matriz $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$.

Ejemplos.

6.15 *Sean $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = 1/(x^2+y^2)$ y $g : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$, $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. La composición $g \circ f$ no está definida. La composición $f \circ g$ está dada por*

$$h(r,\theta) = f \circ g\,(r,\theta) = f\left(g(r,\theta)\right) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = 1/r^2\,.$$

Esta composicion en particular se puede interpretar como la transformación de la función $f(x, y)$ a coordenadas polares. En este caso, la transformación conduce a una expresión más simple que en coordenadas cartesianas al tratarse de una función cuyo valor únicamente depende de la distancia al origen en el dominio.

6.16 *Sea el operador derivada: $D\,f = d\,f/d\,x$. La composición de D consigo misma es:*

$$D^2\,f = D \circ D\,f = \frac{d}{d\,x}\left(\frac{d\,f}{d\,x}\right) = \frac{d^2\,f}{d\,x^2}\,.$$

Además, al ser D una transformación lineal, D^2 también lo es.

6.17 *El siguiente operador diferencial de orden n:*

$$\mathcal{L}^n = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\,,$$

es un operador diferencial lineal. Sus propiedades pueden ser utilizadas en el estudio de las soluciones de la ecuacion diferencial $\mathcal{L}^n\,y = g(x)$.[11]

6.18 *Las transformaciones lineales $\mathcal{R}_{yz} = (-x, y, z)$ e $\mathcal{I}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ representan la reflexión de un vector en el plano yz y la inversión, respectivamente (véase final de Subsec 6.1). La matriz asociada a la reflexión de un vector en el plano yz seguida de una inversión está dada por:*

$$\mathcal{M} = \mathcal{I}\,\mathcal{R}_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nótese el orden en que se realiza la multiplicación matricial.

6.5. *Ejercicios*

En los ejercicios donde se pida la matriz asociada a una transformación lineal que involucre a los espacios $\mathbf{R^2}$ o $\mathbf{R^3}$, utilizar las bases $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$ para $\mathbf{R^2}$ y $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathbf{k}}\}$ para $\mathbf{R^3}$.

[11] Véase por ejemplo *Introducción al Análisis Lineal, V. 1.*, D.L Kreider, R. G. Kuller, D. R. Ostberg, F. W: Perkins, Fondo Educativo Interamericano y Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A., 1980.

6.1 *Determinar cuál de las siguientes transformaciones es lineal.*

1. $\mathrm{f}(x,y)=2x-y+1$.

2. $\mathrm{T}(x,y,z)=(x+a,y+b,z+c)$, *donde* $a,b,c\in\mathrm{R}$.

3. $\mathbf{F}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,(x,y)$.

4. $\mathrm{G}(x,y,z)=(3x,2y-4x)$.

6.2 *Sea la transformación* $\mathrm{T}:\mathbf{R^2}\to\mathbf{R^3}$, $\mathrm{T}(x,y)=(x+3y,2y,-x-y)$.

1. *Evaluar* $\mathrm{T}(3,-1)$.

2. *Determinar si se trata de una transformación lineal.*

3. *Si la transformación es lineal, encontrar la matriz asociada.*

6.3 *Sea una transformación lineal* $\mathrm{S}:\mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$ *tal que su acción sobre los elementos de la base* $\{\hat{\mathbf{\imath}},\hat{\mathbf{\jmath}},\hat{\mathbf{k}}\}$ *es:* $\mathrm{T}(\hat{\mathbf{\imath}})=(0,0,1)$, $\mathrm{T}(\hat{\mathbf{\jmath}})=(-1,2,0)$, $\mathrm{T}(\hat{\mathbf{k}})=(1,0,-3)$.

1. *Encontrar la matriz asociada a la transformación.*

2. *Encontrar* $\mathrm{T}(2,1,-1)$.

6.4 *Deducir la Ec. (25).*

6.5

1. *Demostrar que la transformación* $R_z(x,y,z)=(x\cos\theta+y\,\mathrm{sen}\,\theta,-x\,\mathrm{sen}\,\theta+y\cos\theta,z)$, *siendo* θ *una constante, es una transformación lineal. Esta transformación corresponde a la rotación por* θ *radianes de un vector alrededor del eje* z *en el sentido contrario a las manecillas del reloj.*

2. *Encontrar la matriz asociada a la transformación.*

3. *Encontrar el vector resultante de rotar al vector* $\mathbf{u}=(1,1,1)$ *por* $\pi/2$ *rad alrededor del eje* z *en el sentido contrario a las manecillas del reloj.*

6.6

1. *Encontrar la matriz asociada que corresponde a la rotación de un vector por* π *radianes alrededor del eje* z *en el sentido contrario a las manecillas del reloj, seguida de una reflexión en el plano* xy. *(véase Ejemplo 6.18).*

2. *Aplicar esta transformación al vector* $\mathbf{v}=(2,-1,-3)$ *y representar gráficamente el resultado.*

6.7 *Probar que el operador diferencial de orden n definido en el Ejemplo 6.17 es un operador lineal.*

6.8 *Sean las transformaciones* $\mathrm{T}_1(x, y, z) = (z, y - x)$ *y* $\mathrm{T}_2(x, y) = (-x, 2y)$.

1. *Demostrar que* T_1 *y* T_2 *son transformaciones lineales.*

2. *Encontrar la matriz asociada a la composición de estas transformaciones.*

3. *Sea* $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$. *Aplicarle* T_1 *al vector* $\mathbf{u}$ *y al resultado aplicarle* T_2. *Realizar la multiplicación matricial adecuada y comparar con la obtenida en el inciso anterior y así verificar que mediante ambos procedimientos se obtiene el mismo resultado.*

Referencias

[1] H. Gerber. *Álgebra Lineal.* Iberoamericana, 1992.

[2] S. I. Grossman. *Álgebra Lineal.* McGraw–Hill, 1996.

[3] S. Lang. *Álgebra Lineal.* Sistemas Técnicos de Edición, 1986.

[4] E. Kreyszig. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.* Limusa–Wiley, 2000.

[5] M. Johnson and A. R. Steffensen. *Álgebra Aplicada.* Trillas, 1993.

[6] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Cálculo.* CECSA, 1997.

[7] S. Lipschutz. *Álgebra Lineal.* McGraw–Hill, 1992.

[8] C. Pita Ruiz. *Álgebra Lineal.* McGraw-Hill, 1991.

[9] Linear Algebra with Applications. *S. J. Leon.* McMillan College Publishing Co., 1994.

[10] Elementary Linear Algebra. *H. Anton.* John Wiley & Sons Inc, 1991.

[11] Applied Linear Algebra. *B. Noble and J. W. Daniel.* Prentice–Hall, 1988.

[12] W. K. Nicholson. *Linear Algebra with Applications.* PWS Publishing Company, 1995.