Introducción a las Matemáticas

Ejercicios y problemas

Víctor Robledo Rella | Antonio Aguilar Gómez | Luis Martínez Arias

Grupo Editorial Patria

INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

Ejercicios y problemas

LibrosVirtual

Grupo Editorial Patria

INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

Ejercicios y problemas

Víctor Francisco Robledo-Rella

Antonio Aguilar Gómez

Luis Antonio Martínez Arias

Instituto Tecnológico de Estudios
Superiores de Monterrey

PRIMERA EDICIÓN EBOOK
MÉXICO, 2014

LibrosVirtual

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinadora editorial: Estela Delfín Ramírez
Diseño de interiores: Braulio Morales Sánchez
Diseño de portada: Juan Bernardo Rosado Solís / Signx
Supervisor de producción: Gerardo Briones González
Fotografías: © Thinkstockphoto

Revisión técnica:

Silvia González Durán
Héctor Ochoa Grimaldo
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Monterrey

Hugo Gustavo González Hernández
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Puebla

Elizabeth Toriz García
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Estado de México

Jesús Cuauhtémoc Ruvalcaba Álvarez
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Guadalajara

Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional

Introducción a las matemáticas. Ejercicios y problemas

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

ISBN ebook: 978-607-438-921-0

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2014

Contenido

Prólogo
ix

Agradecimientos
x

Capítulo 1
Álgebra y conceptos básicos

1

Introducción 2

1.1 Números reales y números complejos 2

Conjunto de números naturales 2
Conjunto de números enteros 2
Conjunto de números racionales 2
Conjunto de números irracionales 2
Conjunto de números reales 2
Axiomas de los números reales 3
Sustracción o resta y cociente 4
Propiedades de orden 5
Valor absoluto de un número 5
Recta de los números reales 5
Números complejos 6

1.2 Exponentes y radicales 10

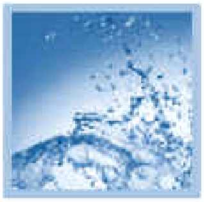
Leyes de los exponentes 10
Exponente cero 12
Exponentes racionales 13
Exponentes irracionales 15
Leyes de los radicales 15

1.3 Productos notables y factorización 21

Productos notables 21

1.4 Expresiones algebraicas 27

División de expresiones algebraicas 28
División sintética 32
Simplificación de expresiones racionales 35
Multiplicación y división de expresiones racionales 37
Suma y resta de expresiones racionales 38



Capítulo 2 Ecuaciones y desigualdades

43

Introducción 44

2.1 Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales 44

Ecuaciones lineales 44

Sistemas de ecuaciones lineales 48

2.2 Ecuaciones cuadráticas 60

Números complejos 70

2.3 Otros tipos de ecuaciones (racionales, con radicales, con valores absolutos y reducibles a cuadráticas) 75

Ecuaciones racionales 75

Ecuaciones con radicales 81

Ecuaciones con valor absoluto 86

Ecuaciones que se reducen a ecuaciones cuadráticas 91

2.4 Desigualdades e intervalos 97

Desigualdades e intervalos 97

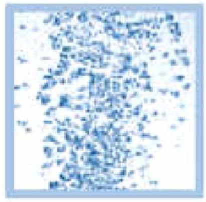
Resolución de desigualdades 102

Desigualdades lineales 103

Desigualdades cuadráticas 109

Desigualdades con valor absoluto 113

Otras desigualdades 118



Capítulo 3 Funciones y gráficas

127

Introducción 128

3.1 El plano cartesiano y gráficas de ecuaciones 128

Distancia entre dos puntos 130

Punto medio 131

Gráficas de ecuaciones 133

Intersecciones con los ejes 136

3.2 Rectas 138

Rectas paralelas y perpendiculares 142

Rectas horizontales y verticales 144

Aplicaciones de las rectas 145

3.3 Definición de función 148

Evaluación de funciones 151

Modelado de funciones 152

3.4 Gráficas de funciones 156

Graficación con transformaciones 161

Funciones seccionadas 170

3.5 Funciones cuadráticas 173

3.6 Operaciones con funciones 182

Suma, resta, multiplicación y división de funciones 182

Composición de funciones 184

3.7 Funciones inversas 190

Capítulo 4 Funciones polinomiales y funciones racionales

197

Introducción 198

4.1 Funciones polinomiales 198

Funciones con potencias enteras ... 198

4.2 División de polinomios 200

División algorítmica de polinomios 201

División sintética de polinomios 202

Teorema del residuo 203

4.3 Raíces de polinomios 208

Teorema fundamental del álgebra 208

Teoremas de las raíces de un polinomio 209

Teoremas usados para localizar raíces de un polinomio 211

Solución de ecuaciones polinomiales y gráficas de polinomios 217

4.4 Funciones racionales 226

Definición de función racional 226

Gráfica de una función racional 226

Aplicaciones 246

Capítulo 5 Funciones exponenciales y logarítmicas

251

Introducción 252

5.1 Funciones exponenciales 252

5.2 Funciones logarítmicas 260

Logaritmos común y natural 261

Propiedades de los logaritmos 262

Gráficas de funciones logarítmicas 263

Leyes de los logaritmos 267

Cambio de base 269

5.3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas 271

Ecuaciones exponenciales 272

Ecuaciones logarítmicas 275

Capítulo 6 Funciones trigonométricas

279

6.1 Ángulos 280

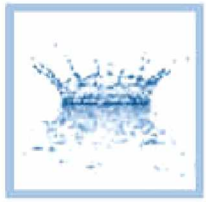
Conversión de grados y/o radianes a grados centesimales 288

6.2 Funciones trigonométricas 294

6.3 Gráficas de funciones trigonométricas 317

6.4 Aplicaciones de las funciones trigonométricas 334

Funciones trigonométricas inversas 341



Capítulo 7 Geometría analítica

351

Introducción 352

7.1 Circunferencia 353

7.2 Parábola 364

Parábolas en posición estándar 365

Parábolas con orientación estándar 367

Aplicaciones de las parábolas 376

Gráfica, ecuación y características de elipses en posición estándar 381

Aplicaciones de la elipse 395

7.4 Hipérbola 398

Gráfica, ecuación y características de hipérbolas en posición estándar 399

Aplicaciones de la hipérbola 416

Prólogo

Bienvenido al libro *Introducción a las matemáticas. Ejercicios y problemas.* El estudio cuidadoso de las páginas de este libro te permitirá conocer los conceptos relacionados con los temas principales de un curso de Precálculo, incluidos los siguientes:

1. Álgebra
2. Ecuaciones y desigualdades
3. Funciones y gráficas
4. Funciones polinomiales y racionales
5. Funciones exponenciales y logarítmicas
6. Funciones trigonométricas
7. Geometría analítica.

Los profesores que escribimos este libro de texto hemos vertido en sus páginas nuestra experiencia docente de más de dos décadas. Con base en ella tomamos en cuenta la manera en que aprenden nuestros alumnos y enfatizamos aquellos conceptos que sabemos que son particularmente difíciles para ellos.

El libro está escrito de una manera clara y precisa que te ayudará a comprender los temas presentados. Al inicio de un tema, se desarrollan los conceptos principales y se incluyen muchos ejemplos resueltos que te permitirán afianzar los conocimientos adquiridos. Te sugerimos que repases con mucho cuidado estos ejemplos resueltos a fin de que comprendas los temas presentados y para que aprendas a resolver ejercicios similares. Esta es una parte muy importante del proceso de autoaprendizaje. A continuación, al final de cada sección, se ofrecen una serie de ejercicios propuestos que te permitirán poner a prueba tu comprensión de los temas y que te ayudarán a desarrollar tu habilidad de resolución de problemas, la cual es una competencia fundamental que necesitan los nuevos profesionistas. Al final del texto se incluyen las respuestas de los ejercicios propuestos, lo que te permitirá verificar si los resolviste correctamente. Los problemas presentados al final de cada una de las secciones del libro también pueden ser utilizados por el profesor que adopta este libro como base para sus ejercicios de tareas semanales.

Los autores de este libro confiamos en que en estas páginas encontrarás una guía práctica que te permitirá acrecentar tus conocimientos de Precálculo y que te dará las bases necesarias y suficientes para afrontar con éxito los cursos siguientes de matemáticas universitarias, incluyendo cálculo diferencial y cálculo integral.

En hora buena por tu estudio de las matemáticas y recuerda que el dominio de ellas te permitirá desenvolverte mejor a lo largo de tu vida profesional.

Capítulo 1

Álgebra y conceptos básicos

Al final de este capítulo el alumno será capaz de:

- Identificar los conjuntos de numeración, incluyendo los números reales y los números complejos.
- Identificar el conjunto de los números reales y sus subconjuntos.
- Resolver problemas que involucran el uso y las propiedades de los números reales.
- Conocer los principales productos notables y realizar ejercicios de factorización.
- Entender y manejar el concepto de exponentes y radicales.
- Conocer y realizar operaciones de adición o suma, sustracción o resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas.

Introducción

Las matemáticas son una de las ramas más bellas de las ciencias que jamás haya producido el ser humano. El desarrollo de las matemáticas le ha permitido expandir su conocimiento acerca del mundo físico que lo rodea.

Los conjuntos de números constituyen la base del lenguaje matemático y son el tema principal de esta sección introductoria del libro.

1.1 Números reales y números complejos

Existen distintos conjuntos de numeración que se usan en matemáticas, los cuales presentamos a continuación.

Conjunto de números naturales

El *conjunto de los números naturales*, $\mathbb{N}$, está compuesto por los números: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. El conjunto de los números naturales es infinito.

Conjunto de números enteros

El *conjunto de los números enteros*, $\mathbb{Z}$, está compuesto por el conjunto de los números naturales, además del 0 y la reflexión de los números naturales. Es decir: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Entonces:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

El símbolo $\subset$, significa pertenencia. Es decir, el conjunto de los naturales es un subconjunto del conjunto de los enteros.

Conjunto de números racionales

El *conjunto de los números racionales*, $\mathbb{Q}$, está compuesto por todos los números que pueden escribirse como cociente de dos números enteros, $c = b/a$, con a y $b \in \mathbb{Z}$, y $a \neq 0$. Es decir, $\mathbb{Q} = \{c \text{ tal que } c = b/a, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{Z}, \text{ y } a \neq 0\}$. Así, por ejemplo, los números $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2, -\frac{3}{7}$ pertenecen a los números racionales. Así pues:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Conjunto de números irracionales

El *conjunto de los números irracionales*, $\mathbb{I}$, está compuesto por todos los números que *no* pueden escribirse como cociente de números enteros, es decir: $c \neq b/a$, con a y $b \in \mathbb{Z}$, y $a \neq 0$. Algunos ejemplos de números irracionales son: $\sqrt{2}$, π, e, $\sqrt[3]{5}$, $ln\ 2$, etcétera.

Conjunto de números reales

A nivel universitario, el principal conjunto de numeración que se usa en matemáticas es el *conjunto de los números reales*, $\mathbb{R}$, que está compuesto por la unión de los números racionales y los números irracionales. Esto es: $\mathbb{R}$ = {conjunto de los números c, tales que $c \in \mathbb{Q}$ o $c \in \mathbb{I}$}. Algunos ejemplos de números reales son: 0, -32.28, $ln\ \pi$ y e^{10}, entre otros. Así que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Axiomas de los números reales

Existen dos operaciones fundamentales en los números reales: la suma o adición y la multiplicación o producto, que tienen las siguientes propiedades.

Sean a, b, c y d cuatro números reales cualesquiera.

Propiedad de cerradura

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c = a + b$ y $d = a \cdot b$, entonces los números c y d son únicos y ambos $\in \mathbb{R}$.

Propiedades conmutativas

1. $a + b = b + a$ (el orden de los sumandos no afecta la suma).
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (el orden de los factores no altera el producto).

Propiedades asociativas

1. $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$
2. $a(bc) = (ab)c = abc.$

Propiedades distributivas

1. $a(b + c) = ab + ac.$
2. $(a + b)c = ac + bc.$

La multiplicación es distributiva sobre la suma.

Leyes de identidad

1. Existe un número único 0, con la propiedad: $0 + a = a + 0 = a$.
2. Existe un número único 1, con la propiedad: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

Leyes inversas

1. Para cada número real a existe un número real $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
2. Para cada número real a, diferente de cero, existe un número real a^{-1}, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.
3. $-a$ se conoce como el inverso aditivo, o negativo de a.

4. a^{-1} se conoce como el inverso multiplicativo, o el recíproco de a.

Leyes del factor cero

1. Para todo número real a, $a \cdot 0 = 0$.
2. Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Leyes de los negativos

1. $-(-a) = a$.
2. $(-a)(-b) = ab$.
3. $-ab = (-a)b = a(-b) = -(-a)(-b)$.
4. $(-1)a = -a$.

Sustracción o resta y cociente

La sustracción o resta se define como:

$$a - b = a + (-b).$$

En tanto, el cociente se define como:

$$\frac{a}{b} = a \div b = a \cdot b^{-1}$$

Así que:

$$b^{-1} = 1 \cdot b^{-1} = 1 \div b = \frac{1}{b}$$

Nótese que, dado que 0 no tiene inverso multiplicativo, $a \div 0$ no está definido, es decir, la división entre cero no existe en los números reales.

Leyes de los cocientes

1. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{-a}{-b}$.
2. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.
3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si y solo si $ad = cb$.
4. $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$, para cualquier número real k diferente de 0.

Propiedades de orden

El conjunto de los números reales positivos, designado por $\mathbb{R}^+$, es un subconjunto de los números reales que cumple con las siguientes propiedades:

1. Si a y b están en $\mathbb{R}^+$, entonces $a + b$ y ab también están en $\mathbb{R}^+$.
2. Para cada número real a, se cumple que: a está en $\mathbb{R}^+$, a es cero, o $-a$ está en $\mathbb{R}^+$. Si a está en $\mathbb{R}^+$, se dice que a es positivo; pero, si $-a$ está en $\mathbb{R}^+$, se dice que a es negativo.

El número a es *menor que b*, es decir, $a < b$, si $b - a$ es positivo. En este caso, b es *mayor que a*, es decir, $b > a$. Si a es menor o igual que b, se escribe: $a \leq b$. En este caso b es mayor o igual que a, y se escribe $b \geq a$.

Por tanto, de lo anterior se desprenden las siguientes propiedades:

1. $a > 0$, si y solo si a es positivo.
2. Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.
3. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
4. Si $a < b$, entonces $\begin{cases} ac < bc, \text{ si } c > 0 \\ ac > bc, \text{ si } c < 0 \end{cases}$
5. Para cada número real a, se cumple que $a > 0$, $a = 0$ o $a < 0$.
6. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número real a, se escribe y se define como:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Recta de los números reales

Los números reales pueden representarse mediante puntos sobre una recta L (véase figura 1.1), tal que a cada número real a le corresponde exactamente un punto en la recta y viceversa. Es decir, a cada punto en la recta le corresponde exactamente un número real.

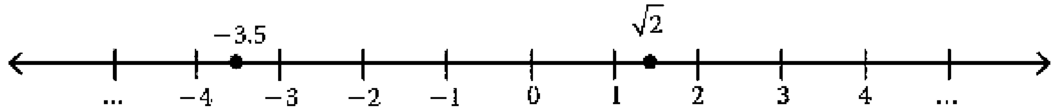


Figura 1.1 Recta de los números reales.

Números complejos

Pero no todos los números son números reales; por ejemplo, no existe ningún número real que al elevarlo al cuadrado dé como resultado un número negativo. Por ejemplo, $2 \times 2 = 4$, pero $(-2) \times (-2) = 4$. De esta manera, se define el número imaginario i, tal que $i^2 = -1$. Por tanto, los números complejos se definen como el conjunto $\mathbb{C} = \{c = a + bi$, tal que a y $b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1\}$. Entonces se tiene que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

La figura 1.2 muestra de manera gráfica la relación entre estos diferentes conjuntos de números.

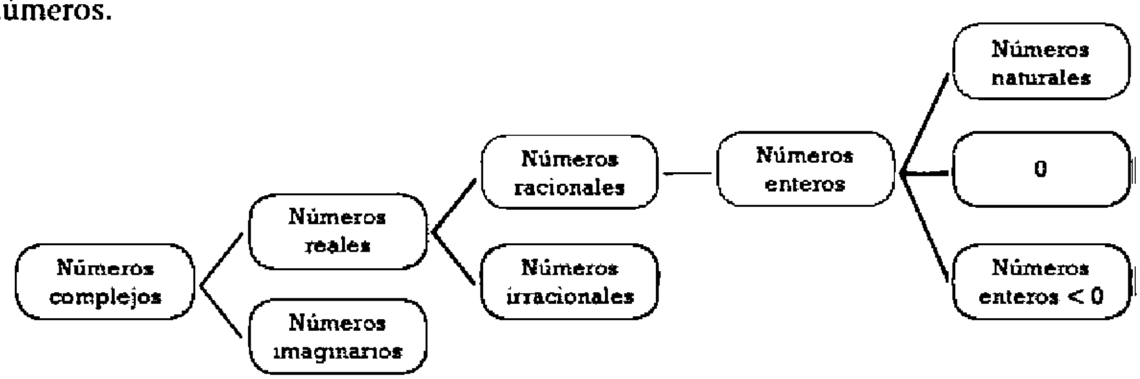


Figura 1.2 Relación entre los conjuntos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Los números complejos tienen diversas aplicaciones en física y matemáticas. Por ejemplo, se usan para representar de manera práctica una *onda viajera* o para escribir la función de onda de un electrón en un átomo de hidrógeno.

Ejemplo 1

Tomando en cuenta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, determinar a qué conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, entre otros, pertenecen los siguientes números:

a) 63 **b)** -1 **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** 4.3333

e) $-\pi$ **f)** $\sqrt[3]{9}$ **g)** $1+\sqrt{-6}$

Solución

En general, observamos que:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Por tanto:

a) $63 \in \mathbb{N}$ **b)** $-1 \in \mathbb{Z}$ **c)** $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ **d)** $4.3333 \in \mathbb{Q}$

e) $-\pi \in \mathbb{I}$ **f)** $\sqrt[3]{9} \in \mathbb{I}$ **g)** $1+\sqrt{-6} \in \mathbb{C}$

Ejemplo 2

Usando las propiedades de los números reales, demostrar que

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

Solución

$a(b + c + d) = a[(b + c) + d]$	Ley asociativa
$= a(b + c) + ad$	Ley distributiva
$= ab + ac + ad$	Ley distributiva

Ejemplo 3

Demostrar que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.

Solución

Suponemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Entonces, por definición de división: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lo que significa que $ab^{-1} = cd^{-1}$. Así que:

$ad = ad \cdot 1$	Ley de identidad
$= ad\,bb^{-1}$	Ley del inverso
$= ab^{-1}\,db$	Leyes asociativa y conmutativa
$= cd^{-1}\,db$	Por hipótesis
$= c \cdot 1\,b$	Ley del inverso
$= bc$	Leyes de identidad y conmutativa

Ejemplo 4

Identificar si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas:

a) $-4 < -9$ **b)** $\sqrt{2} = 1.41$ **c)** $x^3 \geq 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$

Solución

a) Como $(-9)-(-4) = (-9)+4 = -5$ es negativo, significa que $-9 < -4$, así que la afirmación es falsa.

b) $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ y $1.41 \in \mathbb{Q}$. Así que la afirmación es falsa.

c) Si $x \geq 0$, entonces $x^3 \geq 0$. Sin embargo, si $x < 0$, tenemos que $x^3 = x^2 \cdot x$, y como $x^2 > 0$ y $x < 0$, implica que $x^3 < 0$, así que la afirmación es falsa.

Ejemplo 5

Reescribir las siguientes expresiones sin usar el símbolo de valor absoluto y simplificar.

a) $|6-9|$ b) $|5|-|8|$ c) $|6-2\pi|$ d) $|x-5|$ si $x>5$

e) $|y+8|$ si $y<-8$

Solución

a) $|6-9| = |-3| = 3$.

b) $|5| - |8| = 5-8 = -3$.

c) Como $6 < 2\pi$, entonces: $6-2\pi < 0$. Así que: $|6-2\pi| = -(6-2\pi) = 2\pi - 6$.

d) Como $x > 5$, entonces: $x-5 > 0$. Así que: $|x-5| = x-5$.

e) Como $y < -8$, entonces: $y+8 < 0$. Así que: $|y+8| = -(y+8) = -y-8$.

Ejercicios propuestos

1. Tomando en cuenta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, determina a qué conjuntos, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, entre otros, pertenecen los siguientes números:

   a) -37 b) 89 c) $17/9$ d) 2.323232

   e) $\sqrt{-1}$ f) $\log 100$ g) $\sqrt{61}$

2. Tomando en cuenta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, determina a qué conjuntos, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, entre otros, pertenecen los siguientes números:

   a) 0 b) $\sqrt{16}$ c) $\dfrac{6}{5}$ d) $\ln e$

   e) $\pi^{\frac{1}{2}}$ f) $\sqrt{-2}$ g) -9 h) 6

   i) $\sqrt{5}$

3. Identifica las leyes de los números reales que se utilizan para los siguientes enunciados:

   a) $200[0.5(25-y)] = [200(0.5)](25-y)$

   b) $x^3(d+x) = x^3 \cdot d + x^3 \cdot x$

4. Si $x<0$ y $y<0$, indica el signo del número real $\dfrac{x}{y} + x \cdot y$.

5. Si $x>0$ y $y>0$, determina el signo del número real $\dfrac{x-y}{xy}$.

6. Demuestra que si $ad = bc$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (*Sugerencia*: Asume que $ad = bc$; luego, comienza con ab^{-1} y transfórmalo en cd^{-1}, como se hizo en el ejemplo 3.)

7. Identifica si las siguientes afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V):

   a) -8 es un número racional. (F) (V)

   b) $\pi^2 = 3.14^2$. (F) (V)

   c) $|x - 9| = x - 9$, para toda $x \in \mathbb{R}$. (F) (V)

   d) Los números racionales están contenidos en los números reales. (F) (V)

8. Identifica si las siguientes afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V):

   a) π *no* es un número real. (F) (V)

   b) $\sqrt{-1}$ = *no* es un número real. (F) (V)

   c) $|10 + x| = 10 + x$, para toda $x \in \mathbb{N}$. (F) (V)

   d) Los números irracionales están contenidos en los números racionales. (F) (V)

9. En los ejercicios siguientes determina si el enunciado es falso (F) o verdadero (V):

   a) Si $a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. (F) (V)

   b) Como $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, entonces $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$. (F) (V)

   c) Si $a < b$ y $b < c$, entonces necesariamente $a < c$. (F) (V)

   d) Si $x < 0$ y $y < 0$, entonces necesariamente $x < y$. (F) (V)

   e) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces necesariamente $a = c$ y $b = d$. (F) (V)

   f) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces necesariamente $ad = cb$. (F) (V)

   g) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces necesariamente $\frac{ae}{be} = \frac{c}{d}$, con $e \neq 0$. (F) (V)

   h) $a(b + c) = (a + b)c$ (F) (V)

10. Reescribe las siguientes expresiones sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica:

    a) $|13 - 6|$ **b)** $|7| - |-9|$ **c)** $|2\pi - 7|$

    d) $|6 - x|$ si $x > 6$ **e)** $-|-y + 3|$ si $y < -3$

11. Si $x < 1$, reescribe $|x-1|$ sin usar el símbolo de valor absoluto.
12. Reescribe las siguientes expresiones sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica:

a) $|(-3)-[-(-8)]|$ **b)** $|-\sqrt{2}-1.4142|$

c) $|12-x|$; si $x > 12$ **d)** $|-4-x|$

e) $|a-b|$ si $a > b$ **f)** $|a-b|$ si $a < b$

13. Reescribe los números siguientes sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica el resultado:

a) $|-11+1|$ **b)** $|\pi-3|$

c) $\left|\sqrt{2}-1.5\right|$ **d)** $|4+x|$ si $x < -4$

1.2 Exponentes y radicales

Una potencia es una expresión del tipo a^n, donde a es la base y n es el exponente. Entonces, la expresión a^n significa que el número a debe multiplicarse por sí mismo $n-1$ veces. No obstante, por lo común, se dice que se debe multiplicar n veces, pero esto es un *error*. Por ejemplo, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Nótese en este caso que solo estamos multiplicando dos veces el número por sí mismo, no tres veces; es decir, solo se hacen dos multiplicaciones, no tres.

Leyes de los exponentes

A continuación se listan las leyes de los exponentes acompañadas de un ejemplo cada una.

Ley	Ejemplo
1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\dfrac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2$
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(-2 \cdot 4)^2 = (-2)^2(4)^2 = 4 \cdot 16$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{7}{3}\right)^4 = \dfrac{7^4}{3^4}$
5. $(a^n)^m = a^{nm}$	$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	$\left(\dfrac{13}{2}\right)^{-7} = \left(\dfrac{2}{13}\right)^7$

Estas leyes tienen sentido siempre y cuando n y m sean números enteros y a y b sean cualquier número real, excepto 0 (cero). Más adelante se verá que también pueden usarse cuando n y m son números racionales o irracionales; no obstante, en estos casos el resultado no siempre tiene sentido.

Ejemplo 6

Simplificar una expresión usando las leyes de los exponentes.

Solución

En este caso, tenemos la expresión:

$$\left(\frac{3xy^{3}z^{-1}}{4x^{-2}yz^{-4}}\right)^{-2}$$

Primero, usamos la ley 7, podemos escribir:

$$\left(\frac{4x^{-2}yz^{-4}}{3xy^{3}z^{-1}}\right)^{2}$$

Observa que los signos de los exponentes de la expresión que conforma la base no cambian, debido a que no se está aplicando la ley 6. En este caso, el numerador y el denominador solo intercambiaron su posición y cambió el signo del exponente principal.

Ahora, si aplicamos la ley 6, tenemos:

$$\left(\frac{4yz}{3xx^{2}y^{3}z^{4}}\right)^{2}$$

Lo que se hace con la ley 6 es cambiar todos los exponentes negativos a positivos. Esto significa que las potencias con exponente negativo que se encontraban en el numerador pasaron al denominador con exponente positivo. Asimismo, las potencias del denominador (en este caso, solo $Z\ ^{1}$) pasan al numerador.

Entonces, usando las leyes 1 y 2 nos queda:

$$\left(\frac{4}{3x^{3}y^{2}z^{3}}\right)^{2}$$

Con la ley 1 obtuvimos que $xx^{2}=x^{3}$ y con la ley 2 sabemos que $\frac{y}{y^{3}}=y^{1-3}=y^{-2}=\frac{1}{y^{2}}$.

En el último paso de esta serie de igualdades se aplicó la ley 6 y lo mismo se hizo para dividir $\frac{z}{z^{4}}$.

Ahora, aplicamos la ley 4 para escribir:

$$\frac{4^2}{\left(3x^3y^2z^3\right)^2}$$

En el denominador aplicamos la ley 3 y obtenemos:

$$\frac{16}{9\left(x^3\right)^2\left(y^2\right)^2\left(z^3\right)^2}$$

Por último, en las tres potencias del denominador usamos la ley 5 y obtenemos el resultado final:

$$\frac{16}{9x^6y^4z^6}$$

Exponente cero

Seguramente has escuchado que un número elevado a la potencia cero es igual a uno. Pero esto es cierto solo si la base de la potencia no es cero. Enseguida se analiza por qué es así.

Cuando se divide un número diferente de cero entre sí mismo, el resultado es uno. Es decir:

$$\frac{a^n}{a^n}=1$$

Esto se cumple si $a \neq 0$. Por tanto: $a^n \neq 0$. Esto es importante, porque si $a^n = 0$, entonces $\frac{a^n}{a^n}$ no tiene sentido. Pero se sabe por las leyes de los exponentes que:

$$\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=a^0$$

De esta manera, como se sabe que $\frac{a^n}{a^n} = 1$, entonces $a^0 = 1$.

Ejemplo 7

Leyes de exponentes y exponente cero

En esta ocasión queremos simplificar la expresión:

$$\frac{-2ab^0}{\left(ac^{-1}\right)^{-3}}$$

Solución

Primero, suponiendo que $b \neq 0$, sabemos que $b^0 = 1$. Entonces:

$$\frac{-2a}{\left(ac^{-1}\right)^{-3}}$$

Ahora, al aplicar la ley 6 obtenemos:

$$-2a\left(ac^{-1}\right)^{3}$$

Usando la ley 3, tenemos:

$$-2aa^{3}\left(c^{-1}\right)^{3}$$

Después, al utilizar las leyes 1 y 5, tenemos:

$$-2a^{4}c^{-3}$$

Hay que recordar que siempre debemos dejar la expresión sin exponente negativo alguno, así que finalmente volvemos a utilizar la ley 6. Entonces:

$$\frac{-2a^{4}}{c^{3}}$$

Exponentes racionales

Antes de iniciar este tema, conviene plantear la siguiente pregunta: ¿qué significan expresiones como: $4^{\frac{1}{2}}, 7^{\frac{2}{3}}$ o $10^{\frac{11}{4}}$? Después de observarlas, es cierto que cuesta trabajo darles un significado, porque eso implica poder multiplicar un número por sí mismo un número no entero de veces.

Como es bien sabido, cada operación tiene una operación inversa. Por ejemplo, cuando se efectúa la suma $3 + (-2)$, en realidad eso es igual a realizar la operación $3 - 2$, que es una resta o sustracción; la operación inversa es la suma o adición. Entonces, cuando se suma un número negativo, en realidad se está restando.

De igual forma, cuando se multiplica por un número fraccionario, lo que en realidad se hace es una división. Por ejemplo:

$$8\cdot\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2$$

De manera análoga, cuando se eleva un número a una potencia fraccionaria, lo que en realidad se está haciendo es la operación inversa de la potencia, que es hallar una raíz. Para su comprensión, tómese como ejemplo la expresión antes citada $4^{\frac{1}{2}}$, la cual es lo mismo que $\sqrt{4}$; entonces, el resultado es 2. De esta manera, al elevar a la potencia $\frac{1}{2}$, esto quiere decir hallar la raíz cuadrada de la base de la potencia; esto es, hallar un número que multiplicado por sí mismo dé como resultado la base. De la misma forma, elevar a la $\frac{1}{3}$ significa obtener la raíz cúbica de la base, etcétera.

Pero, ¿qué significa un número como $7^{\frac{2}{3}}$? Como ya se analizó antes, el denominador del exponente implica obtener una raíz cúbica; pero, ¿entonces qué se hace con el numerador? De acuerdo con la ley 5 de los exponentes, $7^{\frac{2}{3}} = (7^2)^{\frac{1}{3}}$. Y eso es igual a $\sqrt[3]{49}$, el cual constituye un número irracional, porque ningún número racional multiplicado dos veces por sí mismo da como resultado 49. (*)

Ejemplo 8

Una potencia sin sentido

Observemos la siguiente expresión:

$$(-5)^{\frac{3}{2}}$$

Solución

Esta misma expresión, por la ley 5 de los exponentes, la podemos escribir como:

$$\left[(-5)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

Efectuando la potencia interior tenemos:

$$(-125)^{\frac{1}{2}}$$

Lo que finalmente es igual a:

$$\sqrt{-125}$$

Esta expresión está indefinida, es decir, no tiene sentido, porque no se puede hallar la raíz cuadrada de un número negativo en los números reales. Como se mencionó antes, cuando los exponentes no son enteros también está permitido usar las leyes de los exponentes, pero puede suceder que en esos casos nos encontremos con expresiones carentes de sentido. En el caso de raíces cuadradas de números negativos, debemos utilizar los números imaginarios ($i^2 = -1$), definidos en la sección 1.1.

En el ejemplo anterior también se pudo haber escrito:

$$(-5)^{\frac{3}{2}} = \left[(-5)^{\frac{1}{2}}\right]^3 = \left(\sqrt{-5}\right)^3$$

Esta expresión tampoco tiene sentido porque $\sqrt{-5}$ no existe en los números reales.

Entonces, para evaluar una potencia con exponente racional, se debe aplicar la siguiente ley:

* Ya se explicó por qué dos veces y no tres.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Cuando n sea par, esto tendrá sentido solo si a es positiva.

Exponentes irracionales

Antes de entrar en materia, conviene responder la siguiente pregunta: ¿qué significa la expresión 2^π?

En realidad, no es posible escribir π como fracción, porque se trata de un número irracional. No obstante, es posible ubicar a π entre dos números racionales, por ejemplo: $3.1 < \pi < 3.2$. Entonces, es lógico pensar que $2^{3.1} < 2^\pi < 2^{3.2}$, o lo que es lo mismo $2^{\frac{31}{10}} < 2^\pi < 2^{\frac{32}{10}}$.

De hecho, $2^{\frac{31}{10}} \approx 8.5741877$ y $2^{\frac{32}{10}} \approx 9.18958684$; por tanto, se esperaría que 2^π fuera un número que estuviera entre estos dos números. Hallar el valor aproximado de 2^π podría hacerse con algún método de análisis numérico, lo cual constituye un área fuera del alcance de este libro. La forma más práctica de hallar su valor es usar una calculadora. Al realizarlo se tiene que:

$$2^\pi \approx 8.824977827$$

que en realidad es un número entre $2^{3.1}$ y $2^{3.2}$.

¿También es posible hallar $(-2)^\pi$ en la calculadora? inténtalo...

¿Por qué la calculadora marca error? Si se piensa igual que en el ejemplo anterior, se supondría que $(-2)^{\frac{31}{10}} < (-2)^\pi < (-2)^{\frac{32}{10}}$. Pero $(-2)^{\frac{31}{10}} = \left(\sqrt[10]{-2}\right)^{31}$, lo cual no tiene sentido.

Por tanto, tampoco tiene sentido elevar un número negativo a un exponente irracional.

Leyes de los radicales

Como ya se vio antes, la operación inversa a la potencia es la radicación.

Un radical es una expresión del tipo $\sqrt[n]{a}$, donde n es el índice y a es el radicando. Si $\sqrt[n]{a} = b$, significa que $b^n = a$.

Para manejar radicales se deben usar las siguientes leyes.

Ley	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 8} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{2}}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[12]{10}$

4. $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a \text{ si } n \text{ es impar} \\ |a| \text{ si } n \text{ es par}\end{cases}$ $\quad\quad \begin{cases}\sqrt[3]{2^3}=\sqrt[3]{8}=2 \\ \sqrt{(-4)^2}=\sqrt{16}=4\end{cases}$

5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ $\quad\quad \left(\sqrt[3]{64}\right)^3=4^3=64$

Ahora, resulta necesario revisar el segundo ejemplo de la ley 4. Esto es, si $\sqrt[n]{a^n}$ siempre fuera igual a a, entonces $\sqrt{(-4)^2}$ sería igual a -4, pero en el ejemplo es posible observar que eso no es cierto. No obstante, alguien podría afirmar que $\sqrt{16}=\pm 4$, porque tanto 4^2 como $(-4)^2$ son iguales a 16. Sin embargo, lo que sucede es que para poder manejar ambos valores por separado (lo cual es más cómodo), se ha convenido en reservar la expresión $\sqrt[n]{a}$ para la raíz positiva de a (cuando n es par).

Usando la ley 5 también es posible encontrar expresiones sin sentido; por ejemplo: $\left(\sqrt{-9}\right)^2$. Esta expresión no tiene sentido porque $\sqrt{-9}$ no existe, es un número imaginario. Entonces, para poder usar la ley 5, a debe ser positiva cuando n sea par.

Ejemplo 9

Simplificar una expresión con radicales

Para este ejemplo, tenemos la expresión:

$$\sqrt[4]{\frac{2x^6y^{-2}z}{3xyz^3}}$$

Solución

Antes que nada, usamos leyes de exponentes para simplificar el radicando. Por tanto, queda:

$$\sqrt[4]{\frac{2x^5}{3y^3z^2}}$$

Enseguida, ocupamos la ley 2 de los radicales y tenemos:

$$\frac{\sqrt[4]{2x^5}}{\sqrt[4]{3y^3z^2}}$$

En el numerador podemos usar la ley 1; por tanto:

$$\frac{\sqrt[4]{x^4}\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{3y^3z^2}}$$

Entonces, por la ley 4 tenemos que:

$$\frac{|x|\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{3y^3z^2}}$$

Una práctica muy común es racionalizar el denominador, es decir, dejar la expresión sin radicales en el denominador. Más adelante veremos por qué es útil esto.

En este caso, para racionalizar la expresión que nos quedó, debemos emplear la ley 4, la cual nos permite eliminar el radical de una expresión. Con base en ese objetivo, debemos multiplicar la expresión por 1, pero ese número 1 deberá estar escrito en una forma peculiar:

$$\frac{|x|\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{3y^3z^2}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3^3yz^2}}{\sqrt[4]{3^3yz^2}}$$

Recordemos que una expresión dividida sobre sí misma es igual a 1. Por tanto, es posible multiplicar por 1 porque eso no altera la expresión original. Esto es, un número multiplicado por 1 es igual a sí mismo. La pregunta obvia es: ¿por qué escribimos ese 1 de esa forma? Hagamos la multiplicación de fracciones que nos quedó y después será evidente el porqué.

Entonces:

$$\frac{|x|\sqrt[4]{2x}\sqrt[4]{3^3yz^2}}{\sqrt[4]{3y^3z^2}\sqrt[4]{3^3yz^2}}$$

Si usamos la ley 1 de los radicales, tanto en el numerador como en el denominador, y luego empleamos la ley 3 de los exponentes en el denominador, tenemos:

$$\frac{|x|\sqrt[4]{54xyz^2}}{\sqrt[4]{3^4y^4z^4}}=\frac{|x|\sqrt[4]{54xyz^2}}{\sqrt[4]{(3yz)^4}}$$

Ahora sí, podemos aplicar la ley 4 de los radicales para obtener:

$$\frac{|x|\sqrt[4]{54xyz^2}}{|3yz|}=\frac{|x|\sqrt[4]{54xyz^2}}{|3||yz|}=\frac{|x|\sqrt[4]{54xyz^2}}{3|yz|}$$

Si en el ejemplo anterior, desde un inicio se hubiera indicado que las letras representan números positivos, entonces no habría sido necesario el valor absoluto y la respuesta sería:

$$\frac{x\sqrt[4]{54xyz^2}}{3yz}$$

Ejemplo 10

Otro tipo de racionalización

Ahora, aquí queremos racionalizar el denominador de la siguiente expresión:

$$\frac{5x}{2-\sqrt{y}}$$

Solución

En este caso, la diferencia con respecto al ejemplo anterior es que el radical no constituye todo el denominador. Aquí, el radical solo es un término de la resta que comprende el denominador. Para racionalizar, nuevamente multiplicaremos por 1, escrito ahora de la siguiente forma:

$$\frac{5x}{2-\sqrt{y}}\cdot\frac{2+\sqrt{y}}{2+\sqrt{y}}$$

¿Por qué lo escribimos así? Para entenderlo, primero hagamos la multiplicación de fracciones y luego efectuemos la multiplicación de binomios conjugados que queda en el denominador (véase la sección 1.3):

$$\frac{5x\left(2+\sqrt{y}\right)}{\left(2-\sqrt{y}\right)\left(2+\sqrt{y}\right)}=\frac{5x\left(2+\sqrt{y}\right)}{4+2\sqrt{y}-2\sqrt{y}-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{5x\left(2+\sqrt{y}\right)}{4-\left(\sqrt{y}\right)^2}$$

Ahora, aplicamos la ley 5 de los radicales y tenemos:

$$\frac{5x\left(2+\sqrt{y}\right)}{4-y}$$

Para que este último paso sea válido, debemos suponer que y es un número positivo; de lo contrario, $\sqrt{y}$ no tendría sentido.

Ahora bien, es momento de conocer para qué sirve racionalizar el denominador. Con base en ese objetivo, primero debe observarse la expresión $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e intentar darle sentido. Aunque ya se sabe que $\sqrt{2}\approx 1.4142$, eso no dice mucho para este caso. Por tanto, si se racionaliza la expresión, se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

En una fracción, el denominador indica el número de partes en las que se está dividiendo un entero. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ indica que un entero se divide en 4 partes iguales y el numerador indica que se toman 3 de esas 4 partes. No obstante, cuando se tiene la fracción $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es difícil imaginarse un entero dividido en $\sqrt{2}$ partes iguales; sin embargo, si esta fracción se escribe como $\frac{\sqrt{2}}{2}$, esto significa que hay que dividir un entero en dos partes iguales y tomar aproximadamente 1.4142 partes de esas dos partes, es decir, una mitad completa y casi la mitad de la otra mitad.

Ejercicios propuestos

Evalúa las siguientes expresiones:

14. 34^0
15. $\frac{3^7}{3^4}$
16. $8^4 \cdot 8^{-2}$
17. $\left(2^3\right)^2 \cdot 3^{-1}$
18. $(3\pi)^3$
19. $\left(4\sqrt{2}\right)^{-2}$
20. $\left(\frac{7}{11}\right)^{-2}$
21. $\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[3]{-8}$
22. $\sqrt{\frac{121}{144}} \cdot \sqrt[5]{32}$
23. $\sqrt{30+6}$
24. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$
25. $\sqrt[6]{(-3)^6} \cdot \left(\sqrt[3]{-3}\right)^3$
26. $16^{-\frac{3}{4}}$
27. $(-5)^{\sqrt{2}}$

Simplifica las siguientes expresiones:

28. $\dfrac{xy^3}{(xyz)^2}$

29. $\left(2x^2y^{-3}z\right)^{-3}$

30. $\dfrac{3a^4b^{-5}c}{4^{-1}ab^{-3}c}$

31. $\left(\dfrac{6x}{3yz^2}\right)^{-3}\left(\dfrac{x}{z}\right)^2$

32. $\dfrac{\left(64xy^2\right)^{\frac{2}{3}}}{2x}$

33. $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^3}{a^{\frac{1}{2}}}$

Simplifica las siguientes expresiones y racionaliza el denominador. Asume que las letras representan números positivos:

34. $\sqrt{\dfrac{xyz^{-1}}{x^2}}$

35. $\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{3x^5y^6z^7}{2}}}$

36. $\sqrt[3]{\dfrac{4x^{-3}yz^8}{xy^{-1}}}$

37. $\sqrt[5]{6ab^{-3}c^7}$

38. $\sqrt{3xy}\cdot\sqrt{3x^7y^6z}$

39. $\dfrac{9x}{2-\sqrt{x}}$

40. $\dfrac{32^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{7}+1}$

41. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

1.3 Productos notables y factorización

Factorizar una expresión algebraica significa expresar esta como el producto de otras expresiones algebraicas. Por ejemplo, $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Sin embargo, en el ámbito de los números reales, no todas las expresiones son factorizables; por ejemplo, x^2+9 no se puede factorizar.

En la factorización y multiplicación de polinomios se utiliza con mucha frecuencia un grupo determinado de reglas fijas, las cuales se conocen como **productos notables**. La idea del uso de los productos notables es poder factorizar rápidamente, al identificar a simple vista la fórmula a utilizar o desarrollar la expresión dada.

Productos notables

I. $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$ (Diferencia de cuadrados)

II. $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$

$(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$ (Binomio al cuadrado)

III. $(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$(A-B)^3 = A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$ (Binomio al cubo)

IV. $A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$ (Diferencia de cubos)

V. $A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$ (Suma de cubos)

VI. $(X+A)(X+B) = X^2+(A+B)X+AB$ (Producto de binomios con un término común)

VII. $(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2(AB+AC+BC)$ (Trinomio al cuadrado)

En las fórmulas anteriores, si la igualdad se considera de izquierda a derecha, se dice que los productos se ***desarrollan***, y si se considera de derecha a izquierda, se dice que se ***factorizan***. La fórmula I también se conoce como ***producto de binomios conjugados***; obsérvese que en esta, dado que el orden de los factores no altera el producto (propiedad conmutativa del producto), también se tiene que: $A^2-B^2 = (A+B)(A-B) = (A-B)(A+B)$. Asimismo, también obsérvese que la fórmula II no es: $(A+B)^2 = A^2+B^2$ (véase el ejercicio 78).

A continuación se presenta una serie de ejemplos resueltos, con el fin de observar el uso de estas fórmulas.

Ejemplo 11

Desarrollar cada una de las siguientes expresiones dadas.

a) $(2x-7)^2$

b) $(y^2-2z^4)^3$

c) $(x^5-3w)(x^5+3w)$

d) $(x+7)(x+6)$

e) $(2y^4-4z)(2y^4+9z)$

f) $(z^3+3w+5)^2$

Solución

a) En este caso, tenemos un binomio al cuadrado, así que utilizamos la fórmula II:

$$(2x-7)^2=(2x)^2-(2)(2x)(7)+(7)^2=4x^2-28x+49$$

b) En este caso, usamos la fórmula III para elevar el binomio al cubo:

$$\begin{aligned}(y^2-2z^4)^3&=(y^2)^3-3(y^2)^2(2z^4)+3(y^2)(2z^4)^2-(2z^4)^3\\&=y^6-6y^4z^4+12y^2z^8-8z^{12}\end{aligned}$$

c) Se trata de un producto de binomios conjugados (fórmula I):

$$(x^5-3w)(x^5+3w)=(x^5)^2-(3w)^2=x^{10}-9w^2$$

d) Aquí utilizamos la fórmula VI, porque se trata de un producto de binomios con término común:

$$(x+7)(x+6)=x^2+(7+6)x+(7)(6)=x^2+13x+42$$

e) En este caso, nuevamente se trata de un producto de binomios con un término común:

$$(2y^4-4z)(2y^4+9z)=(2y^4)^2+(-4z+9z)(2y^4)+(-4z)(9z)=4y^8+10zy^4-36z^2$$

f) Aquí utilizamos la fórmula VII, debido a que se trata del cuadrado de un trinomio:

$$\begin{aligned}(z^3+3w+5)^2&=(z^3)^2+(3w)^2+(5)^2+2((z^3)(3w)+(z^3)(5)+(3w)(5))\\&=z^6+9w^2+25+2(3z^3w+5z^3+15w)\\&=z^6+9w^2+25+6z^3w+10z^3+30w\end{aligned}$$

Ejemplo 12

Factorizar los siguientes polinomios dados:

a) $9x^2-81$

b) $27x^3+8y^3$

c) $4x^2+20xz+25z^2$

d) $\frac{x^3}{64} - 125z^6h^3$

e) $16x^4 - 81y^4$

f) $x^2 - 12x + 36$

g) $x^2 + 8x + 15$

h) $w^4 - w^2 - 12$

i) $z^4 - 2z^2 + 4$

j) $A^6 - B^6$

k) $z^{12} - 64$

l) $x^4 + 2x^2y^3 + 2x^2 + y^6 + 2y^3 + 1$

Solución

a) En este caso, aplicamos la fórmula I, porque la expresión es una diferencia de cuadrados:

$$9(x^2-9) = 9(x^2-3^2) = 9(x-3)(x+3)$$

También es posible factorizar como sigue:

$$9x^2-81 = (3x)^2-9^2 = (3x-9)(3x+9)$$

b) Aquí aplicamos la fórmula V, dado que se trata de una suma de cubos:

$$27x^3 + 8y^3 = (3x)^3 + (2y)^3 = (3x+2y)((3x)^2-(3x)(2y)+(2y)^2)$$
$$= (3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$$

c) Esta expresión se trata de un cuadrado perfecto, por lo que utilizamos la fórmula II:

$$4x^2+20xz+25z^2 = (2x)^2+2(2x)(5z)+(5z)^2 = (2x+5z)^2$$

d) Puesto que se trata de una diferencia de cubos, aquí utilizamos la fórmula IV:

$$\frac{x^3}{64} - 125z^6h^3 = \left(\frac{x}{4}\right)^3 - (5z^2h)^3 = \left(\frac{x}{4} - 5z^2h\right)\left(\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)(5z^2h) + (5z^2h)^2\right)$$

$$= \left(\frac{x}{4} - 5z^2h\right)\left(\frac{x^2}{16} + \frac{5xz^2h}{4} + 25z^4h^2\right)$$

e) En este caso, comenzamos a factorizar como una diferencia de cuadrados:

$$16x^4-81y^{12} = (4x^2)^2 - (9y^6)^2 = (4x^2 - 9y^6)(4x^2 + 9y^6) \qquad (1)$$

Aquí notamos que $4x^2 - 9y^6$, se puede volver a factorizar como una diferencia de cuadrados:

$$4x^2 - 9y^6 = (2x)^2 - (3y^3)^2 = (2x + 3y^3)(2x - 3y^3) \qquad (2)$$

Ahora sustituimos (2) en (1) y obtenemos:

$$16x^4-81y^{12} = (4x^2)^2 - (9y^6)^2 = (2x - 3y^3)(2x + 3y^3)(4x^2 + 9y^6)$$

f) En este caso se trata de un binomio al cuadrado, por consiguiente utilizamos el producto notable II.

$$x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2(6x) + 6^2 = (x - 6)^2$$

g) Aquí utilizamos el producto de binomios con un término común (fórmula VI). Por tanto, lo que buscamos son dos números A y B tales que su suma sea 8, $A + B = 8$, y su producto sea 15, $A \cdot B = 15$. Esto no es difícil, si se realiza mediante un poco de ensayo y error o tanteo. De esta manera, vemos que estos números son $A = 5$ y $B = 3$, por lo que:

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$$

h) En este caso, primero reducimos el grado mediante la sustitución de $x = w^2$:

$$w^4 - w^2 - 12 = (w^2)^2 - w^2 - 12 = x^2 - x - 12$$

Aquí, la última expresión del lado derecho se factoriza como un producto de binomios con un término común, solo basta encontrar dos números A y B, cuya suma sea -1, $A + B = -1$, y cuyo producto sea -12, $A \cdot B = -12$. Un poco de tanteo nos lleva a determinar que $A = -4$ y $B = 3$, por lo que:

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

Pero, al cambiar x por w^2 tenemos:

$$w^4 - w^2 - 12 = (w^2 - 4)(w^2 + 3)$$

Todavía es posible factorizar más, debido a que el factor $w^2 - 4$ es una diferencia de cuadrados: $w^2 - 4 = (w + 2)(w - 2)$. De esta manera, la factorización final es:

$$w^4 - w^2 - 12 = (w + 2)(w - 2)(w^2 + 3).$$

i) En este caso, comenzamos cambiando $x = z^2$:

$$z^4 - 2z^2 + 4 = x^2 - 2x + 4$$

Luego, buscamos dos números A y B tales que $A + B = -2$ y $A \cdot B = 4$. Como podrás observar esto no es sencillo mediante ensayo y error. Cuando esto sucede lo recomendable para polinomios de grado 2 es utilizar la fórmula general: $ax^2 + bx + c = 0$, la cual tiene las raíces: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

En nuestro caso, $a = 1$, $b = -2$ y $c = 4$, por lo que las raíces están dadas por $x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$. Notamos que el número dentro de la raíz cuadrada es negativo. Por tanto, podemos concluir que este polinomio no es factorizable (en los números reales).

j) Aquí, primero factorizamos como una diferencia de cuadrados:

$$A^6 - B^6 = (A^3)^2 - (B^3)^2 = (A^3 - B^3)(A^3 + B^3) \qquad (1)$$

Enseguida, factorizamos cada factor del lado derecho de la igualdad (diferencia y suma de cubos):

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \qquad (2)$$

y $$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \qquad (3)$$

Ahora, sustituimos (2) y (3) en (1) y tenemos:

$$A^6 - B^6 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)(A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

En este caso es posible que algunos de estos factores puedan factorizarse más, solo depende de las expresiones de A y B:

k) En este caso, primero escribimos la expresión como una diferencia de potencias de grado 6:

$$z^{12} - 64 = (z^2)^6 - 2^6$$

Enseguida, utilizamos la fórmula encontrada en el inciso anterior:

$$(z^2)^6 - 2^6 = (z^2 - 2)((z^2)^2 + (z^2)2 + 2^2)(z^2 + 2)((z^2)^2 - (z^2)2 + 2^2)$$
$$= (z^2 - 2)(z^4 + 2z^2 + 4)(z^2 + 2)(z^4 - 2z^2 + 4)$$

Además, la expresión $z^2 - 2$ se puede factorizar como una diferencia de cuadrados:

$$z^2 - 2 = z^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(z - \sqrt{2}\right)\left(z + \sqrt{2}\right)$$

Como sabemos del inciso i, el polinomio $z^4 - 2z^2 + 4$ no es factorizable, por lo que la factorización final es:

$$z^{12} - 64 = \left(z - \sqrt{2}\right)\left(z + \sqrt{2}\right)(z^4 + 2z^2 + 4)(z^2 + 2)(z^4 - 2z^2 + 4)$$

l) Este caso se trata de un trinomio al cuadrado si lo reescribimos como sigue:

$$x^4 + 2x^2y^3 + 2x^2 + y^6 + 2y^3 + 1 = x^4 + y^6 + 1 + 2x^2y^3 + 2x^2 + 2y^3$$
$$= (x^2)^2 + (y^3)^2 + 1^2 + 2(x^2y^3 + x^2(1) + 2y^3(1))$$
$$= (x^2 + y^3 + 1)^2$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 42 a 66 factoriza la expresión dada.

42. $x^3 - 27$
43. $x^3 + 27$
44. $4x^2 - 16$
45. $2x^2 - y^4$
46. $w^2z^6 - 9t^4$
47. $q^{12} - p^3$
48. $x^6z^9 + 8w^3y^3$

49. $x^2 + 6x + 9$

50. $z^4 - 4z^2 + 4$

51. $t^4 - 1$

52. $x^6 - 1$

53. $w^2 + w - 42$

54. $q^4 + 11q^2 + 18$

55. $y^4 - 8y^2 - 9$

56. $z^8 + 14z^4 + 49$

57. Encuentra una fórmula para factorizar $A^4 - B^4$.

58. Utiliza la fórmula que encontraste en el ejercicio 57 y factoriza: $x^4 - 1$.

59. En el ejemplo 12, inciso j, primero factoriza como una diferencia de cubos y luego como una diferencia de cuadrados. ¿Llegas a la misma expresión que en la solución del ejemplo? Explica tu respuesta.

En los ejercicios 60 a 68 desarrolla el binomio dado.

60. $(2x - 3y^3)^2$

61. $(2x + 3y^3)^2$

62. $(2 + w)^3$

63. $(2z^2 - 3w)^3$

64. $(6zw^3 + 3x^2y)^2$

65. $(6zw^3 + 3x^2y)^3$

66. $\left(\frac{z}{3} - 24q\right)^2$

67. $(x + 1 + y)^2$

68. Comprueba que $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB$.

En los ejercicios 69 a 77 simplifica la expresión dada.

69. $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2$

70. $(3xy + y^2)^2 - (3xy - y^2)^2$

71. $(A - 7B)^2 - (A + 7B)^2$

72. $(x + y + z)^2 - (x + y - z)^2$

73. $(x^3 - 1)^2 - (x^3 + 1)^2$

74. $(x^n + A)^2 - (x^n - A)^2$

75. $(2 - x)(2 + x)$

76. $(4 + 2z)(4 - 2z)$

77. $(1 - x^3)(1 + x^3)$

78. Comprueba que $(A + B)^2 \neq A^2 + B^2$, y que $(A - B)^2 \neq A^2 - B^2$, dando valores numéricos: $A = 5$ y $B = 2$. Esto es, comprueba que $(5 + 2)^2 \neq 5^2 + 2^2$, y que $(5 - 2)^2 \neq 5^2 - 2^2$.

1.4 Expresiones algebraicas

En esta sección se resumen algunas definiciones importantes que se utilizan a lo largo de todo el texto y se presentan algunos ejemplos de operaciones y divisiones de expresiones algebraicas.

De esta forma, se inicia con algunas definiciones básicas generales.

Un conjunto es una colección de objetos de algún tipo; a dichos objetos se les denomina elementos del conjunto. Por lo general, se usan las letras x, y y z para denotar variables, mientras que para denotar constantes se usan las letras a, b, c. A menos que se indique otra cosa, todas las variables y constantes usadas en este libro deben considerarse números reales.

Por su parte, una expresión algebraica es el resultado de sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a una potencia u obtener una raíz de una colección de variables y constantes. Cuando las variables de una expresión algebraica se sustituyen por números específicos, el número resultante se llama valor de la expresión algebraica para esos números específicos.

El dominio de una expresión algebraica corresponde al conjunto de valores que pueden tomar las variables de una expresión dada, que al ser sustituidos en la expresión algebraica, esta está bien definida, sin que el denominador de la expresión algebraica sea igual a 0 (cero) y que sus raíces existan.

A continuación se presenta un par de ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^4 - 7x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{o} \quad \frac{3yz - \left(\frac{9}{x^2}\right)}{\sqrt[4]{x - 8}}$$

Si x es una variable, un monomio en x se define por una expresión de la forma ax^n, donde a es un número real y n es un entero no negativo. En tanto, un binomio es la suma de dos monomios y un trinomio es la suma de tres monomios. Así que, en general, un polinomio en x es la suma de monomios en x; es decir, un polinomio en x, $P(x)$, que en general se puede escribir como:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Donde n es un entero mayor o igual a cero y los coeficientes a_i son números reales. Entonces, si $a_n \neq 0$, el polinomio es de grado n. Las expresiones a_ix^i de un polinomio se denominan términos del polinomio y al coeficiente a_n de la máxima potencia presente de x se le conoce como coeficiente principal. Por ejemplo, el polinomio $-7x^9 + 9x^3 + 3x^2 - 2$ es de grado 9 y su coeficiente principal es -7.

Como contra ejemplo, sí una expresión algebraica contiene divisiones o raíces de la variable x, entonces no es un polinomio.

Enseguida se presentan algunos ejemplos de expresiones algebraicas que no son polinomios:

$$\frac{2}{x}+9,\ \frac{x-5}{x+2}\ \text{ o }\ 9x^2-\sqrt{7x}+14$$

Un resultado importante es que, dado que los polinomios toman valores reales, cuando se realizan sumas, restas, multiplicaciones o divisiones de polinomios, se pueden usar todas las propiedades de los números reales descritas en la sección 1.1.

Como se expuso antes, cuando un polinomio se puede representar como producto de dos o más polinomios, se dice que cada polinomio del producto es un factor del polinomio original. Así que factorizar es el proceso de expresar una suma de términos como un producto. De esta manera, un polinomio con coeficientes en algún conjunto S es irreducible sobre S, si no se puede escribir como producto de dos polinomios de grado positivo con coeficientes en S. Por ejemplo, el polinomio $x^2 - 2$ es *irreducible* en los números racionales, pues no se puede factorizar en dos polinomios de grado positivo con coeficientes en los números racionales. Sin embargo, $x^2 - 2$ *no* es irreducible en los números reales, ya que se puede escribir como $x^2-2=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$. Por su parte, $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números reales, pero *no* lo es sobre los números complejos.

En general, una expresión fraccionaria es un cociente de dos expresiones algebraicas. Y como caso particular, una expresión racional es un cociente P/Q de dos polinomios, P y Q, con $Q \neq 0$. Como la división entre cero no está permitida, el dominio de P/Q es el conjunto de los números reales para los cuales $Q \neq 0$.

Un ejemplo de *expresión racional* es:

$$\frac{9x^3+6x-3}{x^2-1}$$

En este caso, el *dominio* es el conjunto $\{x : x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } x \neq \pm 1\}$, lo cual se lee como: *"El conjunto de las x, tales que x pertenece a los números reales, con x distinto de 1 o −1".*

División de expresiones algebraicas

Como se enfatizó en la sección 1.1, la división es la operación inversa de la multiplicación. Es decir, para dos números reales cualesquiera a y b, con $b \neq 0$, existe un número real único c, tal que $c = a/b$. Esto se lee: "c es igual a a entre b" . Es decir, $a = bc$, donde "a" es el *dividendo*, "b" es el divisor y "c" es el *cociente*. Es decir:

$$\text{Cociente} = \frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}}$$

Cuando a, b y c se refieren a expresiones algebraicas y no solo a número reales, por ejemplo el polinomio $A = 3x^2 + 8$ y el monomio $B = 2x$, en general se tienen dos casos:

a) Si la división es exacta, entonces:

$$\frac{A}{B} = C \Rightarrow A = CB \quad \text{(División exacta)}$$

b) Si la división *no* es exacta, entonces al dividir A entre B queda un residuo R. Así que:

$$\frac{A}{B} = C + \frac{R}{B} \Rightarrow A = CB + R$$

Es decir:

$$\text{Dividendo} = \text{Cociente} \times \text{Divisor} + \text{Residuo}$$

Enseguida se presentan algunos ejemplos resueltos paso a paso.

Ejemplo 13

Encontrar el cociente $C = A/B$ que resulta de dividir las siguientes expresiones algebraicas A y B:

$$A = -8m^2n^3;\ B = -4m^3n^{-2}$$

Solución

Considerando las reglas de los exponentes que vimos en las secciones anteriores, tenemos que:

$$C = \frac{A}{B} = \frac{-8m^2n^3}{-4m^3n^{-2}} = 2m^{-1}n^5 = \frac{2n^5}{m}$$

Ejemplo 14

Encontrar la siguiente división de expresiones algebraicas:

$$\frac{3m^4z^2c^4 - 9c^3z + 6m^5c^4}{2z^3c^2}$$

Solución

Usando las leyes de los exponentes, tenemos que:

$$\frac{3m^4z^2c^4-9c^3z+6m^6c^4}{2z^3c^2}=\frac{3m^4z^2c^4}{2z^3c^2}-\frac{9c^3z}{2z^3c^2}+\frac{6m^6c^4}{2z^3c^2}=\frac{3m^4c^2}{2z}-\frac{9c}{2z^2}+\frac{3m^6c^2}{z^3}$$

Ejemplo 15

Encontrar el cociente y el residuo de la siguiente división de polinomios:

$$\frac{2x^3-3x^2+6x-4}{x^2-x+1}$$

Solución

Primero, ordenamos los polinomios de mayor a menor y procedemos como en el caso de una división de números cualesquiera:

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x-1 \\ \hline x^2-x+1 & \;2x^3-3x^2+6x-4 \\ & -2x^3+2x^2-2x \\ \cline{2-2} & \quad 0 \;-\; x^2+4x-4 \\ & \qquad +\; x^2-\;x+1 \\ \cline{2-2} & \qquad\quad 0+3x-3 \end{array}$$

Es decir:

$$\frac{2x^3-3x^2+6x-4}{x^2-x+1}=2x-1+\frac{3x-3}{x^2-x+1}$$

O lo que es lo mismo:

$$2x^3-3x^2+6x-4=(2x-1)(x^2-x+1)+3x-3$$

En este caso, el cociente es $2x-1$ y el residuo es $3x-3$.

Comprobación: Desarrollando el lado derecho podemos comprobar que este es igual al lado izquierdo:

$$(2x-1)(x^2-x+1)+3x-3=2x^3+2x^2-2x-x^2-x-1+3x-3=2x^3-3x^2+6x-4$$

Lo que queremos demostrar (de aquí en adelante *l. q. d.*).

Entonces, vemos que si $\frac{A}{B}=C+\frac{R}{B}$ entonces, $A=(C\cdot B)+R$.

Ejemplo 16

Encontrar el cociente y el residuo que resulta al dividir los siguientes polinomios:

$$\frac{4x^5+8x^4+2x^2-6x+8}{x^2+2x+1}$$

Solución

Primero, ordenamos los polinomios de mayor a menor y procedemos como en una división de números cualesquiera. Observa que como no está presente el término con x^3 en el dividendo, dejamos el espacio correspondiente:

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 4x^3 & -4x & +10 & & & \\ \hline
x^2+2x+1 & 4x^5 & +8x^4 & & +2x^2 & -6x & +8 \\
 & -4x^5 & -8x^4 & -4x^3 & & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & +0 & +4x^3 & -2x^2 & -6x & \\
 & & & -4x^3 & +8x^2 & +4x & \\ \cline{4-6}
 & & & 0 & +10x^2 & -2x & +8 \\
 & & & & -10x^2 & -20x & -10 \\ \cline{5-7}
 & & & & 0 & -22x & -2
\end{array}
$$

Es decir:

$$\frac{4x^5+8x^4+2x^2-6x+8}{x^2+2x+1}=4x^3-4x+10+\frac{-22x-2}{x^2+2x+1}$$

O lo que es lo mismo:

$$4x^5+8x^4+2x^2-6x+8=\left(4x^3-4x+10\right)\left(x^2+2x+1\right)-22x-2$$

Comprobación: Desarrollando el lado derecho podemos comprobar que es igual al lado izquierdo:

$$\left(4x^3-4x+10\right)\left(x^2+2x+1\right)-22x-2=$$

$$4x^5+8x^4+4x^3-4x^3-8x^2-4x+10x^2+20x+10-22x-2=$$

$$4x^5+8x^4+2x^2-6x+8$$

Una vez más, si $\frac{A}{B}=C+\frac{R}{B}$ entonces, $A=\left(C\cdot B\right)+R$

Antes de describir el método de división sintética entre dos polinomios, es conveniente enunciar dos teoremas importantes que serán de gran utilidad más adelante: el *teorema del residuo* y el *teorema del factor*.

Teorema del residuo

Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $(x - c)$, donde c es una constante independiente de x, entonces el residuo de la división es $P(c)$. En términos algebraicos, se tiene que:

$$\frac{P(x)}{(x-c)}=Q(x)+\frac{P(c)}{(x-c)}$$

Es importante destacar que una consecuencia útil e importante del teorema del residuo es el *teorema del factor*.

Teorema del factor

Si $P(x)$ es un polinomio, entonces $(x - c)$ es un *factor* de $P(x)$ si y solo si $P(c) = 0$. Así que $x - c$ es un factor del polinomio $P(x)$ si y solo si c es un cero del polinomio, es decir si $P(c) = 0$.

División sintética

En el caso de la división de un polinomio entre un divisor de la forma $(x - a)$ existe una manera práctica de obtener el cociente y el residuo, llamada división sintética, la cual está fundamentada en el teorema del residuo mencionado anteriormente.

A continuación, se muestra el método de división sintética acompañado de un ejemplo, antes de describir el procedimiento en general:

Ejemplo 17

Con base en el método de división sintética, encontrar el *cociente* y el *residuo* al dividir $x^3 - 5x^2 + 7x - 9$, entre $x - 4$.

Solución

Aquí:

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9, \text{ y } (x - c) = x - 4$$

Así que:

$$c = 4.$$

Procedimiento

a) Primero, ordenamos los coeficientes de $x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ en el primer renglón de un arreglo de tres renglones, es decir: $1 \ -5 \ 7 \ -9$.

b) Enseguida, bajamos al tercer renglón el coeficiente de la potencia más alta de x, en este caso de x^3; es decir: 1.

c) Luego, multiplicamos este valor por la constante c; es decir, $1 \times 4 = 4$ y escribimos el resultado en el segundo renglón, abajo del coeficiente de la siguiente potencia de x, en este caso, abajo del número -5, y sumamos $-5 + 4 = -1$ y lo escribimos en el tercer renglón, a la derecha del 1 que habíamos bajado inicialmente.

d) Acto seguido, multiplicamos este $-1 \times 4 = -4$, y lo ponemos en el segundo renglón, abajo del coeficiente del siguiente exponente de las x; es decir, abajo del 7.

e) En el siguiente paso sumamos $7 + (-4) = 3$, y lo escribimos a la derecha del -1, que habíamos escrito en el tercer renglón.

f) Luego, repetimos el procedimiento y multiplicamos este $3 \times 4 = 12$, que escribimos en el segundo renglón, abajo del coeficiente del siguiente exponente de las x, en este caso el -9.

g) Por último, sumamos $-9 + 12$ para obtener el número 3, que corresponde al residuo:

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -5 & 7 & -9 \\ & & 4 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}$$

Como se puede ver, los primeros tres valores obtenidos en el tercer renglón, 1, -1 y 3, corresponden a los coeficientes del *cociente* en orden descendente, mientras que el último valor, en este caso, 3, corresponde al residuo.

De esta manera, hemos determinado que:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 9}{x - 4} = x^2 - x + 3 + \frac{3}{x - 4}$$

O lo que es lo mismo:

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 9 = (x^2 - x + 3)(x - 4) + 3$$

Así que el cociente es $x^2 - x + 3$ y el residuo es 3.

Cuando comprobamos nuestro resultado, desarrollando el lado derecho, podemos verificar que es igual al lado izquierdo:

$$(x^2 - x + 3)(x - 4) + 3 = x^3 - 4x^2 - x^2 + 4x + 3x - 12 + 3 = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$$

En resumen, la ***división sintética*** permite hallar de manera eficiente el cociente de un polinomio $P(x)$ entre un polinomio de la forma $x - c$. El procedimiento es el siguiente:

a) Ordenar los coeficientes del polinomio dividendo $P(x)$, en orden decreciente en el primer renglón de un arreglo de tres renglones. En tanto, a la izquierda del primer renglón, se coloca el valor de la constante c:

$$c| \; a_n \; a_{n-1} \; \ldots \; a_1 \; a_0$$

El tercer renglón se forma bajando el primer coeficiente de $P(x)$, luego se multiplica sucesivamente cada coeficiente del tercer renglón por c, y se coloca el resultado en el segundo renglón a partir de la segunda posición y este resultado se suma al coeficiente correspondiente en el primer renglón y se coloca el resultado en la siguiente posición del tercer renglón:

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & ca_n & cb_1 & \cdots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & r \end{array}$$

Aquí, $b_1 = a_{n-1} + ca_n$. El último coeficiente en el tercer renglón (r) es el *residuo*, los otros coeficientes $(a_n\ b_1\ b_2 \ldots b_{n-1})$ son los coeficientes del *cociente* en orden descendente.

Ejemplo 18

Usar el método de división sintética para encontrar el cociente y el residuo de la siguiente *expresión racional* (cociente de dos polinomios):

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 5}{x - 3}$$

Solución

Siguiendo el procedimiento descrito antes, procedemos a formar el arreglo con los tres renglones. Así:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 0 & -5 \\ & & 3 & -3 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & -14 \end{array}$$

De esta manera, encontramos que:

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 5}{x - 3} = (x^2 - x - 3) + \frac{-14}{x - 3}$$

Es decir:

$$x^3 - 4x^2 - 5 = (x^2 - x - 3)(x - 3) - 14$$

Por tanto, el cociente es $x^2 - x - 3$, y el residuo es -14.

Lo cual se puede comprobar desarrollando el lado derecho y verificando que sea igual al lado izquierdo:

$$(x^2 - x - 3)(x - 3) - 14 = x^3 - 3x^2 - x^2 + 3x - 3x + 9 - 14 = x^3 - 4x^2 - 5$$

Ejemplo 19

Usar el método de división sintética para encontrar el cociente y el residuo de la siguiente división de polinomios:

$$\frac{3x^3+8x^2+5x-7}{x+2}$$

Solución

Para la resolución de este problema, primero usamos el método de división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & 8 & 5 & -7 \\ & & -6 & -4 & -2 \\ \hline & 3 & 2 & 1 & -9 \end{array}$$

Así que:

$$\frac{3x^3+8x^2+5x-7}{x+2}=\left(3x^2+2x+1\right)-\frac{9}{x+2}$$

Es decir:

$$3x^3+8x^2+5x-7=\left(3x^2+2x+1\right)\left(x+2\right)-9$$

Por tanto, el cociente es $3x^2 + 2x + 1$ y el residuo es -9.

Simplificación de expresiones racionales

Como se mencionó antes, una *expresión fraccionaria* es un cociente de dos expresiones algebraicas; entonces, como caso particular, una *expresión racional* es el cociente de dos polinomios A/B, donde el numerador A es el dividendo y el denominador B es el divisor, que se asume no es nulo ($B \neq 0$). Además, el *dominio* del polinomio $B = B(x)$, es tal que B es distinto de 0, de tal modo que la expresión A/B está bien definida.

Para reducir una expresión fraccionaria a su mínima expresión, es necesario buscar todos los factores comunes al numerador y al denominador. En este proceso de simplificación debe tomarse en cuenta que el valor de una fracción no se altera si el numerador y el denominador se multiplican (o dividen) por el mismo factor (no nulo). Es decir:

$$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{C}=\frac{A}{B}\cdot 1=\frac{A}{B}$$

Donde $C \neq 0$.

Ejemplo 20

Factorizar y simplificar el cociente de expresiones racionales $\dfrac{12x^3-11x^2+2x}{8x^3+10x^2-3x}$ a su mínima expresión.

Solución

$$\frac{12x^3-11x^2+2x}{8x^3+10x^2-3x}=\frac{x}{x}\cdot\frac{12x^2-11x+2}{8x^2+10x-3}=\frac{(3x-2)(4x-1)}{(2x+3)(4x-1)}=\frac{3x-2}{2x+3}$$

Con:

$$x\neq\frac{1}{4},\ x\neq-\frac{3}{2},\ x\neq 0$$

Ejemplo 21

Factorizar la siguiente expresión racional: $\dfrac{3x^4+9x^3}{12x^4+18x^3-54x^2}$ a su mínima expresión.

Solución

$$\frac{3x^4+9x^3}{12x^4+18x^3-54x^2}=\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{3x^2+9x}{12x^2+18x-54}=\frac{x}{(4x-6)}\cdot\frac{(3x+9)}{(3x+9)}=\frac{x}{4x-6}$$

Con:

$$x\neq\frac{3}{2},\ x\neq-3,\ x\neq 0$$

Ejemplo 22

Factorizar la siguiente expresión racional $\dfrac{20x^3-11x^2-3x}{5x^4+11x^3+2x^2}$ a su mínima expresión.

Solución

$$\frac{20x^3-11x^2-3x}{5x^4+11x^3+2x^2}=\frac{x}{x}\cdot\frac{20x^2-11x-3}{5x^3+11x^2+2x}=\frac{20x^2-11x-3}{x\left(5x^2+11x+2\right)}$$

$$=\frac{(4x-3)(5x+1)}{x\,(x+2)(5x+1)}=\frac{4x-3}{x\,(x+2)}$$

Con:

$$x\neq-\frac{1}{5},\ x\neq-2,\ x\neq 0$$

Multiplicación y división de expresiones racionales

Cuando se tiene el producto de dos expresiones racionales (también conocidas como fracciones algebraicas) deben tomarse en cuenta las siguientes reglas de multiplicación y división:

1. Multiplicación de fracciones: $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$.

2. División de fracciones $\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)}=\frac{AD}{BC}$.

Es decir:

$$\left(\frac{A}{B}\right)\div\left(\frac{C}{D}\right)=\frac{AD}{BC}$$

A continuación se presenta una serie de ejemplos resueltos paso a paso.

Ejemplo 23

Realizar la multiplicación de las siguientes expresiones racionales: $\frac{9x^3y}{6a^2b}\times\frac{2a^3b^2}{6x^2y^2}$.

Solución

$$\frac{9x^3y}{6a^2b}\times\frac{2a^3b^2}{6x^2y^2}=\frac{18a^3b^2x^3y}{36a^2bx^2y^2}=\frac{abx}{2y}$$

Ejemplo 24

Realizar la multiplicación de las siguientes expresiones racionales:

$$\frac{x^2}{x^2+9x+20}\times\frac{x+4}{x^2-x-6}.$$

Solución

$$\frac{x^2}{x^2+9x+20}\times\frac{x+4}{x^2-x-6}=\frac{x^2(x+4)}{(x^2+9x+20)(x^2-x-6)}=\frac{x^2(x+4)}{(x+4)(x+5)(x-3)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2}{(x+5)(x-3)(x+2)}$$

Ejemplo 25
Realizar la división de las siguientes fracciones algebraicas

$$\frac{28x^2-13x-6}{x-2}\div\frac{8x^2+6x-9}{x^2-2x}$$

Solución

$$\frac{28x^2-13x-6}{x-2}\div\frac{8x^2+6x-9}{x^2-2x}=\frac{28x^2-13x-6}{x-2}\times\frac{x^2-2x}{8x^2+6x-9}$$

$$=\frac{28x^2-13x-6}{x-2}\times\frac{x(x-2)}{8x^2+6x-9}=\frac{(28x^2-13x-6)x}{8x^2+6x-9}=\frac{(4x-3)(7x+2)x}{(4x-3)(2x+3)}=\frac{(7x+2)x}{2x+3}$$

Suma y resta de expresiones racionales

Por lo general, para sumar o restar dos expresiones racionales se debe encontrar un *denominador común*, con las siguientes propiedades: $\frac{A}{D}\pm\frac{B}{D}=\frac{A\pm B}{D}$.

Si los denominadores de las expresiones no son iguales, es posible obtener un denominador común multiplicando el numerador y el denominador de cada fracción por una expresión adecuada. Por lo común, tiende a emplearse el mínimo común denominador (mcd) de ambos cocientes: $\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm CB}{BD}$.

Cuando se trata de números, para hallar el mcd es común realizar la factorización de cada denominador en números primos y formar el producto de los factores primos diferentes, usando el *máximo* exponente que aparezca en cada factor primo. Pero, cuando se trata de sumas o restas de fracciones algebraicas, el mcd es igual al producto de todos los factores de los diferentes polinomios de los denominadores, tomando cada factor al máximo exponente que aparezca. Lo anterior se demuestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 26

Realizar la siguiente operación y desarrollar:

$$\frac{x}{x-3}-\frac{2}{3x+4}$$

Solución

$$\frac{x}{x-3}-\frac{2}{3x+4}=\frac{x(3x+4)-2(x-3)}{(x-3)(3x+4)}=\frac{3x^2+4x-2x+6}{(x-3)(3x+4)}$$

$$=\frac{3x^2+2x+6}{(x-3)(3x+4)}=\frac{3x^2+2x+6}{3x^2-5x-12}$$

Ejemplo 27

Realizar la siguiente operación y desarrollar:

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}$$

Solución

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}=\frac{6}{x(3x-2)}\cdot\frac{x}{x}+\frac{5}{3x-2}\cdot\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\cdot\frac{3x-2}{3x-2}=$$

$$\frac{6x}{x^2(3x-2)}+\frac{5x^2}{x^2(3x-2)}-\frac{2(3x-2)}{x^2(3x-2)}=$$

$$\frac{6x+5x^2-2(3x-2)}{x^2(3x-2)}=\frac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}=\frac{5x^2+4}{3x^3-2x^2}$$

Ejercicios propuestos

División de expresiones algebraicas

79. Encuentra el cociente $C = A/B$ de las siguientes expresiones algebraicas y simplifica, con: $A = 3m^4n^3$ y $B = -6m^2n^5$.

80. Encuentra el cociente $C = A/B$ de las siguientes expresiones algebraicas y simplifica, con: $A = 12x^5y^4z$ y $B = 3x^7y^5z^4$

81. Realiza la siguiente división de expresiones algebraicas:

$$\frac{A}{B}=\frac{7u^8z^6x^2-9v^3z^2x+12z^3x^4y^2}{3u^2z^2x^3}$$

82. Realiza la siguiente división de expresiones algebraicas:

$$\frac{A}{B}=\frac{8a^3b^4c+4b^3cd^2+16c^8d}{2a^4c^2d^3}$$

83. Encuentra el cociente y el residuo de la siguiente división de polinomios:

$$\frac{2x^4+4x^3-5x^2+3x-2}{x^2+2x-3}$$

84. Encuentra el cociente y el residuo de la siguiente división de polinomios:

$$\frac{x^4-x^3y-x^2y^2+7xy^3-6y^2}{x^2+xy-2y^2}$$

85. Encuentra el cociente y el residuo de la siguiente división de polinomios:

$$\frac{x^4-3x^3+2x-5}{x^2+x+1}$$

86. Encuentra el cociente y el residuo de la siguiente división de polinomios:

$$\frac{3x^3+4x^2+x+7}{x^2+1}$$

División sintética

87. Usa el método de división sintética para encontrar el cociente y el residuo de la siguiente división de polinomios:

$$\frac{6x^3-19x^2+16x-4}{x-2}$$

88. Usa el método de división sintética para encontrar el cociente y el residuo de la siguiente división de polinomios:

$$\frac{x^3-1}{x-1}$$

89. Utiliza el método de división sintética para encontrar el cociente y el residuo de la siguiente división de polinomios:

$$\frac{6x^3-8x^2-4x-14}{x-2}$$

90. Usa el método de división sintética para encontrar el cociente y el residuo de la siguiente división de polinomios:

$$\frac{2x^4+5x^3-2x+8}{x+3}$$

91. Utiliza el método de división sintética para encontrar el cociente y el residuo de la siguiente expresión racional:

$$\frac{3x^3+8x^2+5x-7}{x+2}$$

Simplificación de expresiones racionales

92. Factoriza y simplifica el siguiente cociente de expresiones algebraicas:

$$\frac{8x^3-6x^2-14x}{4x^3+14x^2+10x}$$

93. Factoriza y simplifica el siguiente cociente de expresiones algebraicas:

$$\frac{15x^4-17x^3+4x^2}{10x^4+12x^3-16x^2}$$

94. Factoriza y simplifica la siguiente expresión racional:

$$\frac{12x^2+14x-6}{6x^2+28x-10}$$

95. Factoriza y simplifica la siguiente expresión racional:

$$\frac{98x^3-32x}{28x^3-2x^2-8x}$$

Multiplicación y división de expresiones racionales

96. Realiza la multiplicación de las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{7x^3y^2}{8a^2b}\times\frac{4a^3b^2}{3xy^4}$$

97. Realiza la multiplicación de las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{32u^4v^3}{w^7}\times\frac{v^3}{4u^2w}$$

98. Realiza la división de las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{x+8}{3x^2-19x-14}\div\frac{x+4}{6x^2-46x+28}$$

99. Realiza la división de las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{x-2}{6x^2-2x-8}\div\frac{4+x}{8x^2+2x-2}$$

Suma y resta de expresiones racionales

100. Realiza la siguiente operación y desarrolla:

$$\frac{x}{2-x}+\frac{2}{4x+3}$$

101. Realiza la siguiente operación y desarrolla:

$$\frac{2}{x^2(5x+1)}-\frac{3}{(5x+1)}+\frac{2}{x^2}$$

102. Realiza la siguiente operación y desarrolla:

$$\frac{7}{(x+1)(x+2)}-\frac{5}{(x+2)x}+\frac{9}{x(x+1)}$$

Capítulo 2

Ecuaciones y desigualdades

Al final de este capítulo el alumno será capaz de:

- Identificar y resolver ecuaciones lineales.
- Resolver problemas relacionados con ecuaciones lineales.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolver ecuaciones cuadráticas.
- Reconocer y resolver desigualdades.

Introducción

En este capítulo se tratan los principales métodos de resolución de ecuaciones y desigualdades. Con base en ese objetivo, se inicia con el estudio de ecuaciones lineales, las cuales tienen muchas aplicaciones; enseguida, se trabaja en los sistemas de ecuaciones lineales. Asimismo, se aborda la resolución de ecuaciones cuadráticas, con valores absolutos y racionales. Una vez que se poseen estos conocimientos, se inicia el estudio de la resolución de una inecuación o desigualdad.

2.1 Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones; por ejemplo, $2x^2 + 3x = x^2 + 2x + 6$ o $x^3 = 125$ son ecuaciones. Resolver una ecuación significa encontrar los valores de la variable que hacen verdadera la ecuación, es decir que satisfacen la igualdad; estos valores se conocen como *soluciones* o *raíces* de la ecuación. Por ejemplo, en la ecuación $2x^2 + 3x = x^2+2x+6$, $x = 2$ es una solución (o raíz), porque al sustituir este valor se obtiene una identidad:

$$2(2)^2+3(2) = (2)^2+2(2)+6$$

$$8+6 = 4+4+6$$

$$14 = 14$$

En este caso, $x = 1$ no es una solución, porque al sustituir este valor no se obtiene una identidad:

$$2(1)^2+3(1) \stackrel{?}{=} (1)^2+2(1)+6$$

$$2+3 = 1+2+6$$

$$5 \neq 9$$

Para la ecuación $x^3 = 125$, la única solución es $x = 5$, dado que al sustituir en la ecuación cualquier otro número, no se obtiene una igualdad.

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es una ecuación de la forma $mx + b = 0$ (con $m \neq 0$), y su solución es: $x = \dfrac{-b}{m}$. Para la resolución de ecuaciones lineales, si se suma o resta la misma cantidad a cada lado de la ecuación, la igualdad no se afecta. Lo mismo sucede al multiplicar ambos lados de la ecuación por un número. Como no existe la división entre cero, al dividir cada lado de una ecuación por un número, este debe ser diferente de cero. En símbolos:

- Si $a = b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $a + c = b + c$.
- Si $a = b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $a - c = b - c$.

- Si $a = b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $ac = bc$.
- Si $a = b$ y $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Ejemplo 1

Resolver la siguiente ecuación:

$$3x - 7 = 13 - 2x$$

Solución

Primero, sumamos $2x$ a cada lado de la ecuación $2x$:

$$3x - 7 + 2x = 13 - 2x + 2x$$

Luego, simplificamos:

$$5x - 7 = 13$$

Ahora, sumamos 7 a cada lado de la igualdad, así obtenemos:

$$5x - 7 + 7 = 13 + 7$$

Al simplificar tenemos:

$$5x = 20$$

Por último, dividimos cada lado entre 5. Por tanto:

$$\frac{5x}{5} = \frac{20}{5} \text{ o } x = 4.$$

Podemos comprobar esta solución al sustituirla en la ecuación original. Entonces:

$$3(4) - 7 = 13 - 2(4)$$

$$12 - 7 = 13 - 8$$

$$5 = 5$$

Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación:

$$17x - 2(x - 4) + 3 = 4(5x + 1) - 3x + 28$$

Solución

Primero, desarrollamos los paréntesis y simplificamos en cada lado de la ecuación:

$$17x - 2(x - 4) + 3 = 4(5x + 1) - 3x + 28$$

$$17x - 2x + 8 + 3 = 20x + 4 - 3x + 28$$

$$15x + 11 = 17x + 32$$

Luego, restamos $17x$ a cada lado de la ecuación y simplificamos:

$$15x + 11 - 17x = 17x + 32 - 17x$$

$$-2x + 11 = 32$$

Enseguida, restamos 11 a cada lado de la igualdad:

$$-2x + 11 - 11 = 32 - 11$$

$$-2x = 21$$

Finalmente, dividimos entre -2 cada lado de la ecuación:

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{21}{-2}$$

De esta forma, vemos que la solución es:

$$x = -\frac{21}{2}$$

Para realizar la comprobación, sustituimos la solución encontrada en la ecuación original:

$$17\left(-\frac{21}{2}\right) - 2\left(-\frac{21}{2} - 4\right) + 3 = 4\left(5\left(-\frac{21}{2}\right) + 1\right) - 3\left(-\frac{21}{2}\right) + 28$$

$$-\frac{357}{2} - 2\left(-\frac{29}{2}\right) + 3 = 4\left(-\frac{103}{2}\right) + \frac{63}{2} + 28$$

$$-\frac{293}{2} = -\frac{293}{2}$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación:

$$\frac{2x-1}{5} + 1 = 5 - \frac{7-4x}{3}$$

Solución

Podemos evitar trabajar con fracciones si multiplicamos por 15 cada lado de la ecuación (nótese que 15 es el mínimo común múltiplo de los denominadores 5 y 3) y simplificamos:

$$15\left[\frac{2x-1}{5} + 1\right] = 15\left[5 - \frac{7-4x}{3}\right]$$

$$15\left[\frac{2x-1}{5}\right] + 15(1) = 15(5) - 15\left[\frac{7-4x}{3}\right]$$

$$6x - 3 + 15 = 75 - 35 + 20x$$

$$6x + 12 = 40 + 20x$$

Enseguida restamos $20x$ y 12 a cada lado:

$$6x+12-20x-12=40+20x-20x-12$$

$$-14x=28$$

Entonces, al dividir cada lado entre -14, obtenemos la solución:

$$x=-2$$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación:

$$\frac{6x+2}{3}+1=2(x-5)$$

Solución

En primera instancia, multiplicamos cada término de la igualdad por 3:

$$6x+2+3=6(x-5)$$

Luego, simplificamos:

$$6x+5=6x-30$$

Enseguida, restamos $6x$ a cada lado de la igualdad:

$$6x+5-6x=6x-30-6x$$

$$5=-30$$

Nótese que la última igualdad es un absurdo, lo que significa que la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 5

Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{15x-35}{5}=3(x-1)+8$$

Solución

Primero, multiplicamos cada término de la igualdad por 5:

$$15x-35=15(x-1)+40$$

$$15x-35=15x-15+40$$

$$15x-35=15x-35$$

Ahora, si restamos $15x$ a cada lado obtenemos:

$$-35=-35$$

Esto es verdadero, independientemente del valor de x, por tanto cualquier número real es solución de esta ecuación. El conjunto solución es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6

Un vendedor tiene un salario base de \$4000.00 mensuales más una comisión de \$150.00 por cada producto que venda. Determinar cuántos productos debe vender este mes si quiere obtener un ingreso de \$8500.00.

Solución

Si S representa el salario del vendedor y n es el número de productos que vende por mes, entonces su salario es:

$$S = 4000 + 150n$$

Entonces, si el vendedor quiere que $S = 8500$, debemos resolver la ecuación $4000 + 150n = 8500$:

$$150n = 8500 - 4000 = 4500 \text{ y } n = \frac{4500}{150} = 30.$$

Esto significa que debe vender 30 productos.

Ejemplo 7

En el curso de matemáticas Luis tiene calificaciones parciales de 71 y 89. Determinar qué calificación debe obtener en el siguiente examen parcial para obtener un promedio final de 85 puntos.

Solución

Si x = calificación del siguiente parcial, entonces el promedio es:

$$\frac{71+89+x}{3}$$

Como Luis quiere un promedio de 85, resolvemos la ecuación:

$$\frac{71+89+x}{3} = 88 \Rightarrow 160 + x = 255 \Rightarrow x = 95$$

De esta manera, Luis debe obtener 95 puntos en su siguiente examen parcial.

Sistemas de ecuaciones lineales

En ciertas aplicaciones es necesario resolver no una ecuación lineal, sino dos ecuaciones de manera simultánea:

$$(*)\begin{cases} y = mx + b \ldots(1) \\ y = nx + c \ldots(2) \end{cases}$$

El sistema (*) anterior se conoce como un *sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas* o un *sistema de ecuaciones lineales* de 2×2. En este, a los números m, b, n y c

se les conoce como *coeficientes* del sistema, mientras que x y y son las *incógnitas* o *indeterminadas* del sistema.

Pero esta no es la única forma de representar el sistema. Por lo común, el sistema se expresa en la forma:

$$(**)\begin{cases} ax+by=p\ldots(1) \\ cx+dy=q\ldots(2) \end{cases}$$

Sistema 2×2 que tiene coeficientes a, b, c y d, y sus incógnitas son x y y.

Existen varios métodos para resolver un sistema 2×2, pero aquí solo se hará mención de los tres principales métodos:

- **Igualación.** Si el sistema es de la forma (*), es posible igualar la ecuación (1) con la ecuación (2), con el fin de obtener una ecuación lineal. De esta manera:

  $$mx + b = nx + c$$

  Esta ecuación lleva a la solución $x=\dfrac{c-b}{m-n}$ (siempre que $m - n \neq 0$). Una vez conocida la variable x, solo basta sustituirla en cualquiera de las ecuaciones, (1) o (2), para obtener el valor de la variable y.

  Cuando el sistema es de la forma (**), primero se despeja la misma variable de las ecuaciones (1) y (2) y estas se igualan después.

- **Suma-resta.** Cuando el sistema es de la forma (**), se utiliza el método conocido como suma-resta; esto es, se multiplica la primera ecuación por c y la segunda por a. Esto iguala los coeficientes de la variable x:

  $$ax+by=p \rightarrow \text{se multiplica por } c \rightarrow acx+bcy=cp\ldots(3)$$

  $$cx+dy=q \rightarrow \text{se multiplica por } a \rightarrow acx+ady=aq\ldots(4)$$

  Al restar estas ecuaciones se elimina x y se obtiene una ecuación lineal en y, la cual es fácil de resolver: $bcy - ady = cp - aq$ o $y=\dfrac{cp-aq}{bc-ad}$ (si $bc-ad\neq 0$). Una vez conocida la incógnita y, es posible sustituir su valor en cualquiera de las ecuaciones, (1) o (2), para encontrar el valor de x. Para eliminar y, y obtener x, también es posible repetir el proceso de suma-resta; para esto basta multiplicar la primera ecuación por d y la segunda por b y restar las ecuaciones obtenidas:

  $$ax+by=p \rightarrow \text{se multiplica por } d \rightarrow adx+bdy=dp\ldots(5)$$

  $$cx+dy=q \rightarrow \text{se multiplica por } b \rightarrow bcx+bdy=bq\ldots(6)$$

  Al restar la ecuación (5) a la ecuación (6), se obtiene $adx-bcx=dp-bq$ o $x=\dfrac{dp-bq}{ad-bc}$.

  Más adelante se analizan algunos ejemplos de este caso.

- Sustitución. Otro método para resolver un sistema 2 × 2 consiste en despejar una variable de cualquiera de las dos ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación. Por ejemplo, para el sistema (**) se despeja y de la ecuación (1):

$$y=\frac{p-ax}{b} \tag{3}$$

Luego, se sustituye (3) en (2) y se obtiene la ecuación lineal:

$$cx+d\left(\frac{p-ax}{b}\right)=q$$

Al despejar x de esta ecuación se obtiene $x=\dfrac{dp-bq}{ad-bc}$, que coincide con el resultado anterior. Una vez que se conoce el valor de x, se sustituye en la ecuación (3) para obtener el valor de y.

A continuación se presenta una serie de ejemplos.

Ejemplo 8

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y=2x+1\ldots(1) \\ y=3x-2\ldots(2) \end{cases}$$

Solución

Primero, igualamos la ecuación (1) con la (2):

$$2x+1=3x-2$$

Luego, restamos y sumamos 2 de cada lado para obtener:

$$x=3$$

Ahora, sustituimos este valor en la ecuación (1):

$$y=2(3)+1=7$$

Como se puede observar, si sustituimos en la ecuación 2 obtenemos el mismo valor:

$$y=3(3)-2=7$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x=3, y=7$$

Para su comprobación, debemos sustituir los dos valores encontrados en el sistema y verificar que ambas ecuaciones se cumplen, ¡no basta con comprobar en una sola ecuación!

$$\begin{cases} y=2x+1 \rightarrow \text{sustituimos } x=3,\ y=7 \rightarrow 7=2(3)+1 \rightarrow 7=7 \\ y=3x-2 \rightarrow \text{sustituimos } x=3,\ y=7 \rightarrow 7=3(3)-2 \rightarrow 7=7 \end{cases}$$

Ejemplo 9

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \ldots(1) \\ 5x + 6y = 16 \ldots(2) \end{cases}$$

Solución

En este caso, usaremos el método de suma-resta. Primero, multiplicamos la ecuación (1) por 5 y la ecuación (2) por 3 (obsérvese que los números 5 y 3, que son los que multiplicamos, son los coeficientes de x):

$$3x - 4y = 2 \rightarrow \text{multiplicados por } 5 \rightarrow 15x - 20y = 10 \ldots(3)$$

$$5x + 6y = 16 \rightarrow \text{multiplicados por } 3 \rightarrow 15x + 18y = 48 \ldots(4)$$

Al restar la ecuación (4) de la ecuación (3), tenemos:

$$18y - (-20y) = 48 - 10 \text{ o } y = 1$$

Ahora, multiplicamos la ecuación (1) por 6 [el coeficiente de y de la ecuación (2)] y la ecuación (2) por 4 [que es el coeficiente de y de la ecuación (1)]:

$$3x - 4y = 2 \rightarrow \text{multiplicados por } 6 \rightarrow 18x - 24y = 12 \ldots(5)$$

$$5x + 6y = 16 \rightarrow \text{multiplicados por } 4 \rightarrow 20x + 24y = 64 \ldots(6)$$

Dado que los coeficientes de y tienen signos contrarios, sumamos (no restamos) las ecuaciones (5) y (6). De esta manera, obtenemos:

$$38x = 76 \text{ o } x = 2$$

La solución es:

$$x = 2, y = 1$$

Si queremos comprobar, recordemos que hay que sustituir en ambas ecuaciones.

Ejemplo 10

La teoría de la relatividad, descubierta por Albert Einstein, afirma que el tiempo no transcurre igual para una persona que permanece en la Tierra que para otra que viaja por el espacio a una velocidad cercana a la velocidad de la luz. Como ejemplo, considérense a dos personas que tienen la misma edad, 20 años en el año 2012. De ellos, uno parte en una nave que viaja a una velocidad tal que su edad cambia solo la tercera parte de la edad que tendría si se queda en la Tierra.

a) Determinar la edad que tendrían ambas personas en el año 2039.

b) Establecer en cuántos años terrestres, la persona que permanece en la Tierra le doblará la edad a la persona que viaja en el espacio.

Solución

Si a la edad de la persona que viaja en el espacio la designamos con la letra E, y dado que en la nave el tiempo transcurre a una tercera parte de lo que transcurre en la Tierra, la ecuación de la edad de la persona en el espacio es:

$$E = \frac{1}{3}t + 20$$

Donde $t = 0$ en el año 2012.

a) En el año 2039, $t = 27$. Por esta razón, la persona que permaneció en la Tierra tendrá $20 + 27 = 49$ años, mientras que la persona que viaja en el espacio, tan solo tiene $E = \frac{1}{3}(27) + 20 = 29$ años.

b) Para resolver este problema utilizaremos la ecuación de la edad en la Tierra. En este caso, la ecuación es simple, solo debemos sumar el número de años que transcurren a la edad actual; esto es, si e_t representa la edad en la Tierra, entonces:

$$e_t = t + 20$$

Donde $t = 0$ en el año 2012.

Como requerimos que la edad de la persona en la Tierra sea el doble de la edad en el espacio, $e_t = 2E$. Así que tenemos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{3}t + 20 \ldots (1) \\ 2E = t + 20 \ldots (2) \end{cases}$$

Ahora, sustituimos la ecuación (1) en la ecuación (2) y obtenemos:

$$2\left(\frac{1}{3}t + 20\right) = t + 20$$

Al resolver la ecuación anterior obtenemos:

$$t = 60 \text{ años}$$

Si sustituimos este valor en la ecuación (1), obtenemos la edad de la persona en el espacio:

$$E = 40 \text{ años}$$

¡Mientras que la persona en la Tierra tendría 80 años!

Ejemplo 11

En economía, el *punto de equilibrio* de un mercado se define como la intersección entre la curva de demanda y la curva de oferta. Las variables que comúnmente se utilizan son p (precio) y q (cantidad), en lugar de x y y. Supóngase que para cierto mercado las curvas de demanda y oferta son:

- Oferta: $p = -3q + 4$
- Demanda: $3p - 6q = 3$

Determinar el punto de equilibrio.

Solución

Primero, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} p = -3q + 4 \ldots(1) \\ 3p - 6q = 3 \ldots(2) \end{cases}$$

Como p ya está despejada de la ecuación (1), la sustituimos en la ecuación (2) y resolvemos para q:

$$3(-3q + 4) - 6q = 3$$

$$-9q + 12 - 6q = 3$$

$$-15q = -9 \text{ o } q = \frac{-9}{-15} = \frac{3}{5}$$

Ahora, sustituimos este valor de q en la ecuación (1):

$$p = -3\left(\frac{3}{5}\right) + 4 = \frac{11}{5}$$

Entonces, el punto de equilibrio es:

$$p = \frac{11}{5},\ q = \frac{3}{5}$$

Existen ecuaciones que parece que no son lineales, pero se reducen a resolver una ecuación lineal. Normalmente se dan con cocientes en los que aparece la variable en el denominador. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 12

Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{2}{x-3} + 5 = \frac{3}{x-3}$$

Solución

En este ejemplo, lo primero que debemos hacer notar es que $x = 3$ no puede ser solución dado que es la raíz del denominador y no se puede sustituir en la ecuación. Así que en adelante supondremos que $x = 3$.

Ahora, multiplicamos cada término de la ecuación por $x - 3$:

$$\frac{2}{x-3}(x-3)+5(x-3)=\frac{3}{x-3}(x-3)$$

Luego, simplificamos:

$$2 + 5(x - 3) = 3$$

Esta última ecuación es lineal, pero debemos recordar que $x \neq 3$ De esta manera, al resolverla obtenemos la solución:

$$x=\frac{16}{5}$$

Ejemplo 13

Resolver la ecuación:

$$\frac{6x^2+x-5}{3x-7}=2x+9$$

Solución

Aquí el denominador se anula si $x=\frac{7}{3}$, por lo que la solución no puede ser este número; y en adelante consideramos que $x \neq \frac{7}{3}$. De esta manera, multiplicamos cada término de la ecuación por $3x - 7$:

$$\frac{6x^2+x-5}{3x-7}(3x-7)=(2x+9)(3x-7)$$

$$6x^2+x-5=6x^2+13x-63$$

Nótese que los términos al cuadrado se eliminan al restar $6x^2$ de cada lado:

$$x - 5 = 13x - 63$$

Al resolver esta ecuación, encontramos que $x=\frac{29}{6}$ (véase el ejercicio propuesto 4).

Ejemplo 14

Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x+7}=11$$

Solución

En este caso, solo los valores de x que hagan la expresión $3x + 7$ positiva pueden ser solución. En otras palabras, debemos sustituir la solución que encontremos para garantizar que esta sea una solución.

Entonces, elevamos al cuadrado cada lado, para eliminar el radical:

$$\left(\sqrt{3x+7}\right)^2 = 11^2$$

$$3x+7=121$$

$$x=\frac{121-7}{3}=38$$

En estos casos es conveniente que comprobemos la solución, debido a que al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones "extrañas" (por ejemplo, al elevar al cuadrado $x = -2$, obtenemos $x^2 = 4$, pero resolver esta ecuación nos da $x = 2$ y $x = -2$).

Ahora, en la ecuación original sustituimos $x = 38$, y comprobamos que $x = 38$ es la solución:

$$\sqrt{3(38)+7}=\sqrt{114-7}=\sqrt{121}=11$$

Es importante destacar que existen sistemas que no tienen solución o que tienen un número infinito de soluciones. A continuación se presenta un caso de cada una.

Ejemplo 15

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 6x-3y=1\ldots(1) \\ -2x+y=-2\ldots(2) \end{cases}$$

Solución

Para la resolución de este sistema, en primera instancia procedemos con el método de suma-resta. Así, multiplicamos la ecuación (2) por 3 y el resultado lo sumamos a la ecuación (1):

$$6x-3y=1$$

$$-6x+3y=-6$$

Es importante hacer notar que la suma de estas ecuaciones da como resultado $0 = -5$, lo cual es un absurdo; esto significa que el sistema no tiene solución.

Ejemplo 16

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -2x + 3y = 1 \ldots (1) \\ 4x - 6y = -2 \ldots (2) \end{cases}$$

Solución

Para la resolución de este sistema, primero utilizamos el método de suma-resta; esto es, la ecuación (1) se multiplica por 2 y el resultado lo sumamos a la ecuación (2):

$$-4x + 6y = 2$$
$$4x - 6y = -2$$

La suma nos da como resultado $0 = 0$, lo cual no es un absurdo, como en el ejemplo anterior, sino una identidad verdadera. Esto significa que el sistema tiene un número infinito de soluciones. Las soluciones son los números x y y, los cuales cumplen cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo de (1) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Esto es, si $x = 0$, entonces $y = \frac{1}{3}$; si $x = 2, y = \frac{5}{3}$; si $x = -1, y = -\frac{1}{3}$, y así sucesivamente.

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 a 19, resuelve cada una de las ecuaciones.

1. $7t - 3 = 18$
2. $2p + 4 = 5p - 7$
3. $3 - z = 18 - 8z$
4. $x - 5 = 13x - 63$
5. $4(w - 2) = 13 + w$
6. $5(x + 1) + 1 = 1 - 3x$
7. $\frac{1}{3}y + 3 = \frac{4}{3} - 2y$

8. $\frac{a+5}{2}+1=3a+2$

9. $\frac{3-k}{2}+1=\frac{4k+5}{3}$

10. $\frac{3-k}{2}+1=\frac{5+4k}{3}$

11. $\frac{3x-16}{3}+1=\frac{2x-1}{2}$

12. $\frac{1-w}{2}+1=\frac{6-2w}{4}$

13. $5\left(\frac{3-z}{4}\right)=10\left(\frac{z+1}{2}\right)+5$

14. $2\left(\frac{p+1}{9}\right)+2=4\left(\frac{p+2}{3}\right)+1$

15. $\frac{5y}{2}+\frac{1}{3}=2-\frac{y}{4}$

16. $2x-5=\frac{14x+3}{7}+5$

17. $3[4(t+1)+2]-4=12t+18$

18. $\frac{9w}{2}+\frac{1}{3}=2+9\left(\frac{w-\frac{10}{27}}{2}\right)$

19. $\frac{2}{5}-\frac{3z}{4}=\frac{1}{2}+\frac{4z}{5}$

20. Las escalas de grados Celsius (°C) y grados Fahrenheit (°F) están relacionadas mediante la ecuación $C=\frac{5}{9}(F-32)$. Determina:

a) Cuántos °C son 95 °F.

b) Cuántos °F son -10 °C.

c) Despeja °F.

21. La relación entre la temperatura del aire, T (medida en °F), y la altitud, h (medida en pies), está dada por la relación $T = -\frac{21}{2500}h + 60$. Encuentra la temperatura a 3 800 pies y la altura a la cual la temperatura es 32 °F (que equivale por cierto a 0 °C).

22. La compañía A renta un auto a \$750.00 por día, más \$1.50 por kilómetro recorrido, mientras que la compañía B ofrece el mismo auto por \$810.00 por día, más \$1.40 por kilómetro recorrido. Determina cuál compañía es más barata.

23. Encuentra el punto de equilibrio si las funciones de oferta y demanda son, respectivamente, $2p - 6q = 7$ y $p + 2q = 4$.

24. Una importante empresa maquiladora produce dos artículos para la industria automotriz: A y B. Cada unidad de A requiere 4 kg de material, mientras que cada unidad B requiere 5 kg para fabricarse. Si la empresa cuenta esta semana con 140 kg de material, encuentra una relación lineal que determine cuántas unidades de cada producto pueden hacerse esta semana.

25. Considera que un automóvil familiar tiene un valor de \$200 000.00 y se deprecia \$1 500.00 cada mes. ¿En cuántos meses tendría un valor de \$135 000.00?

26. Una empresa tiene costos fijos de \$60 000.00 mensuales, y cada producto que elabora le cuesta \$5.00. Si sus costos totales fueron de \$115 000.00 este mes, encuentra cuántos productos elaboró.

27. Si h representa la altura en centímetros de una persona, entonces P, su peso ideal en kilogramos está dado por la fórmula:

$$P = h - 100 - \frac{h - 150}{4}$$

   a) Calcula el peso ideal de una persona que mide 1.70 metros.

   b) Encuentra la estatura de una persona que tiene un peso ideal de 71 kilogramos.

28. Considera que una empresa de transporte cobra a cada pasajero una cantidad que es una función lineal del número de personas que transporta. Así, cuando transporta a 10 pasajeros, cada pasajero paga 100 pesos; cuando transporta a 25 personas, cada una paga 230 pesos. Encuentra la ecuación que dé el cobro, C, de la empresa en términos del número de pasajeros, x, que transporta.

29. Una compañía de renta de autos tiene una tarifa lineal en términos del número de kilómetros recorridos por día. Si se recorren 100 kilómetros, el alquiler del auto es de \$500.00, pero si se recorren 300, la tarifa es de \$1 200.00. Determina:

   a) La tarifa, T en pesos, en términos del número de kilómetros recorridos, x.

   b) ¿Cuántos kilómetros se pueden recorrer con \$1 000.00?

30. Una empresa tiene gastos fijos mensuales de \$5 700.00; mientras que producir cada unidad que elabora le cuesta \$150.00. Determina:

a) Los costos mensuales, C, de la empresa en términos de la cantidad, x, de unidades que produce al mes.

b) Si la empresa tiene \$10 000.00 destinados este mes para la producción, ¿cuántas unidades puede hacer?

En los ejercicios 31 a 42, resuelve cada sistema de ecuaciones lineales.

31. $\begin{cases} y = 3x - 10 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$

32. $\begin{cases} y = 4 - 2x \\ 5x + y = 7 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ x = -7 - y \end{cases}$

34. $\begin{cases} x = 2 - 3y \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + 7y = 17 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x - y = 4 + 4x - 2y \\ 7x + 3y = 3x + 1 - y \end{cases}$

38. $\begin{cases} 3(x - 1) + y = 6 \\ 4x + 2(y + 4) = 9 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ -8x + 6y = 3 \end{cases}$

40. $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$

41. $\begin{cases} -2x - y = 3 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 7x + 8y = 1 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases}$

En los ejercicios 43 a 51, resuelve cada ecuación.

43. $\dfrac{x}{x-3}+3=2$

44. $\dfrac{2x+1}{x+1}+2=\dfrac{4}{x+1}$

45. $\dfrac{2x}{2x-3}=\dfrac{3}{2x-3}$

46. $\dfrac{6x^2}{3x+4}=2x+2$

47. $\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{5}{x-2}$

48. $\sqrt{2x+1}-4=0$

49. $\sqrt{x^2+3x+10}=x+1$

50. $\sqrt{x^2+3x-1}=x+1$

51. $\sqrt{4x^2-3x-1}=2x+1$

2.2 Ecuaciones cuadráticas

En la sección anterior se estudiaron las ecuaciones lineales (o de primer grado). Ahora, en este punto, aumentamos un grado, con el fin de mostrar la solución y las aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas. Una *ecuación cuadrática* es una ecuación de la forma:

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

donde $a \neq 0$. Como se vio en el capítulo 1, el coeficiente se conoce como el *coeficiente principal* del polinomio ax^2+bx+c.

Para determinar su solución, se puede factorizar (véase la sección de productos notables del capítulo 1) o se puede utilizar la fórmula general que se desarrolla más adelante. Para determinar esta fórmula general, primero se requiere completar el cuadrado de un polinomio de segundo grado.

Completar el cuadrado consiste en llevar el polinomio de la ecuación (1) a la forma:

$$a(x-h)^2+k \tag{2}$$

Enseguida se presentan algunos ejemplos, al final de los cuales se determinan las fórmulas para h y k, en términos de los coeficientes a, b y c.

Ejemplo 17

Completar el cuadrado:

$$x^2 + 6x + 3$$

Solución

Para la resolución de este ejemplo, lo primero que debemos tener es que el coeficiente principal sea 1, que en este ejemplo ya ocurre, pero si no fuera así, lo primero que tendríamos que hacer es factorizar el coeficiente principal. El segundo paso consiste en sumar y restar un número elevado al cuadrado, que complete el cuadrado (como es al cuadrado, no importa el signo). Es importante hacer notar que cuando sumamos y restamos el mismo número, el polinomio no se altera, este sigue siendo el mismo. El número que hay que sumar y restar elevado al cuadrado es siempre el coeficiente de x entre 2. Así, en nuestro caso sumamos y restamos $\frac{6}{2} = 3$ al cuadrado:

$$x^2 + 6x + 3 = x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 3 = x^2 + 6x + (3)^2 - (3)^2 + 3$$

Nótese que los primeros tres términos del lado derecho de la igualdad forman un cuadrado perfecto (es decir, un binomio al cuadrado):

$$x^2 + 6x + (3)^2 = (x+3)^2$$

Esto siempre queda así: x más o menos el número que añadimos sin el cuadrado, y todo elevado al cuadrado. De esta manera, el signo siempre es el signo del coeficiente de x, en nuestro caso $+$. De esta forma, tenemos que:

$$x^2 + 6x + 3 = x^2 + 6x + (3)^2 - (3)^2 + 3 = (x+3)^2 - 9 + 3 = (x+3)^2 - 6$$

Una manera de comprobar es desarrollar $(x+3)^2 - 6$ y verificar que nos da el polinomio original.

Ejemplo 18

Completar el cuadrado de:

$$2x^2 - 20x + 51$$

Solución

Dado que el coeficiente principal no es 1, primero lo factorizamos:

$$2x^2 - 20x + 51 = 2\left[x^2 - 10x\right] + 51$$

Como se puede observar, el polinomio dentro de los corchetes ya tiene coeficiente principal 1, por lo que ahora le sumamos y restamos el coeficiente de x entre 2 elevado al cuadrado (como es al cuadrado, no importa el signo en este paso):

$$2\left[x^2-10x\right]+51=2\left[x^2-10x+\left(\frac{10}{2}\right)^2-\left(\frac{10}{2}\right)^2\right]+51$$

$$=2\left[x^2-10x+(5)^2-(5)^2\right]+51=2\left[x^2-10x+25-25\right]+51$$

Observa que los tres primeros términos del lado derecho de la igualdad forman un cuadrado perfecto:

$$2\left[x^2-10x+25-25\right]+51=2\left[(x-5)^2-25\right]+51$$

Como se puede notar, el signo menos dentro del paréntesis corresponde al signo del coeficiente de x dentro de los corchetes.

A continuación desarrollamos el paréntesis cuadrado y simplificamos:

$$2\left[(x-5)^2-25\right]+51=2(x-5)^2-50+51=2(x-5)^2+1$$

Por último, tenemos que $2x^2-20x+51=2(x-5)^2+1$, lo cual podemos comprobar al desarrollar y simplificar el lado derecho de la igualdad.

¡Inténtalo!

Ejemplo 19

Completar el cuadrado de:

$$-3x^2+24x-44$$

Solución

En primera instancia, es necesario tener coeficiente principal 1, por lo que factorizamos el -3:

$$-3x^2+24x-44=-3\left[x^2-8x\right]-44$$

El siguiente paso que debemos realizar, dentro del paréntesis cuadrado, es sumar y restar 16, que corresponde al coeficiente de x dividido entre 2 y elevado al cuadrado:

$$-3\left[x^2-8x\right]-44=-3\left[x^2-8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2\right]-44$$

$$=-3\left[x^2-8x+(4)^2-(4)^2\right]-44=-3\left[x^2-8x+16-16\right]-44$$

Con este proceso, los tres primeros términos dentro de los corchetes forman un cuadrado perfecto:

$$-3\left[x^2-8x+16-16\right]-44=-3\left[(x-4)^2-16\right]-44$$

Debemos recordar que el signo dentro del paréntesis redondo anterior corresponde al signo del coeficiente de x dentro de los corchetes con el que inciamos.

Por último, debemos desarrollar la ecuación al interior de los corchetes y simplificar:

$$-3\left[(x-4)^2-16\right]-44=-3(x-4)^2-3(-16)-44$$

$$=-3(x-4)^2+4=4-3(x-4)^2$$

Así tenemos:

$$-3x^2+24x-44=4-3(x-4)^2$$

Recuerda que puedes comprobar la igualdad anterior desarrollando el lado derecho y comprobando que es igual al lado izquierdo.

Ejemplo 20

Completar el cuadrado de:

$$5x^2-22x+25$$

Solución
Primero, factorizamos el coeficiente principal:

$$5x^2-22x+25=5\left[x^2-\frac{22}{5}x\right]+25$$

Luego, al interior del corchete, sumamos y restamos el cuadrado del coeficiente de x entre 2:

$$5\left[x^2-\frac{22}{5}x\right]+25=5\left[x^2-\frac{22}{5}x+\left(\frac{\frac{22}{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\frac{22}{5}}{2}\right)^2\right]+25$$

$$=5\left[x^2-\frac{22}{5}x+\left(\frac{11}{5}\right)^2-\left(\frac{11}{5}\right)^2\right]+25=5\left[x^2-\frac{22}{5}x+\frac{121}{25}-\frac{121}{25}\right]+25$$

$$=5\left[\left(x-\frac{11}{5}\right)^2-\frac{121}{25}\right]+25=5\left(x-\frac{11}{5}\right)^2-\frac{121}{5}+25$$

Por tanto:

$$5x^2-22x+25=5\left(x-\frac{121}{25}\right)^2+\frac{4}{5}$$

Ejemplo 21

Completar el cuadrado de:

$$6x-6x^2$$

Solución

Primero, factorizamos -6:

$$6x-6x^2=-6\left[x^2-x\right]$$

Enseguida, sumamos y restamos $\frac{1}{2}$, elevado al cuadrado, y simplificamos:

$$-6\left[x^2-x\right]=-6\left[x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$-6\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]=-6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(6)\left(\frac{1}{4}\right)=-6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

Ahora, ya es posible completar el cuadrado para el polinomio de la ecuación (1). Esto permitirá, por un lado, encontrar una fórmula para resolver la ecuación (1) y, por el otro lado, graficar las funciones cuadráticas.

Con base en este objetivo, se siguen los mismos pasos desarrollados en los ejemplos resueltos:

1. Lo primero es factorizar el coeficiente principal.
2. Luego, se debe agregar, elevada al cuadrado, la mitad del coeficiente de x.
3. El último paso es simplificar.

De acuerdo con estos tres pasos, se tiene:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x\right]+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2-\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2\right]+c$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-(a)\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Entonces:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \tag{3}$$

Si se compara con la forma (2): $ax^2+bx+c=a(x-h)^2+k$, se tiene:

$$h=-\frac{b}{2a} \text{ y } k=-\frac{b^2-4ac}{4a} \tag{4}$$

En este momento, ya es posible resolver la ecuación (1). Así, de acuerdo con la ecuación (3), la ecuación (1) equivale a resolver la siguiente ecuación:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

Como se puede observar, primero es necesario pasar el término constante al lado derecho:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Luego, es necesario dividir cada lado de la igualdad entre a:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Enseguida, se extrae la raíz cuadrada de cada lado de la ecuación y se simplifica:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Finalmente, se resta $\frac{b}{2a}$ de cada lado de la ecuación:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Al simplificar, se obtiene una fórmula que resalta por su importancia, la cual es conocida como *fórmula general* de la solución de la ecuación cuadrática (1):

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{5}$$

A las soluciones también se les conoce como *raíces* o ceros del polinomio ax^2+bx+c.

Es importante señalar que existen tres casos de soluciones de la ecuación (1), las cuales dependen del signo de la expresión dentro del radical, b^2-4ac, que se conoce como el *discriminante* de la ecuación (1) y se denota con la letra mayúscula delta: $\Delta = b^2-4ac$. Si el discriminante es positivo; esto es, $\Delta > 0$, la raíz cuadrada dentro de (5) tiene dos valores y, por tanto, la ecuación (1) tiene dos soluciones reales. Por otro lado, si el discriminante es cero, $\Delta = 0$, la ecuación (1) solo tiene una solución real, a saber, $x = -\dfrac{b}{2a}$. Por último, si el discriminante es negativo, $\Delta < 0$, la ecuación (1) no posee soluciones reales, pero sí tiene soluciones con números complejos, los cuales se estudian más adelante, en algunos ejemplos resueltos y problemas propuestos que se encuentran al final de esta sección.

Ejemplo 22

Resolver la siguiente ecuación:

$$x^2 - x - 20 = 2x - 2$$

Solución

En primera instancia, expresamos la ecuación con todos sus términos diferentes de cero de un lado de la igualdad. Logramos esto al restar $2x - 2$ de cada lado de la ecuación:

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

Para esta última ecuación, existen dos formas de resolución.

La primera solución consiste en factorizar el polinomio, lo cual resulta fácil en este ejemplo:

$$x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3).$$

Pero:

$$(x - 6)(x + 3) = 0 \Rightarrow x - 6 = 0 \text{ o } x + 3 = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ o } x = -3$$

que corresponden a las soluciones de la ecuación original.

La segunda forma de resolver la ecuación consiste en aplicar la fórmula general (5) con $a = 1, b = -3, c = -18$. Nótese que los coeficientes deben considerarse con todo y signo:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-18)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

Dado que el discriminante es positivo, tenemos dos soluciones, una que corresponde al signo más de la raíz y otra que corresponde al signo menos de la raíz: $x_1 = \dfrac{3+9}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ y $x_2 = \dfrac{3-9}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$.

Ahora, lo podemos comprobar al sustituir en la ecuación original y verificar que se obtiene una identidad (no obtener una identidad significa que el valor de x no es una solución de la ecuación).

Si $x = 6 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 2x - 2 \Rightarrow (6)^2 - (6) - 20 = 2(6) - 2 \Rightarrow 36 - 6 - 20 = 12 - 2 \Rightarrow 10 = 10$, por lo que $x = 6$ sí es una solución.

Si $x=-3 \Rightarrow x^2-x-20=2x-2 \Rightarrow (-3)^2-(-3)-20=2(-3)-2 \Rightarrow 9+3-20=-6-2$ $\Rightarrow -8=-8$, así que también $x=-3$ es solución.

Ejemplo 23

Resolver la siguiente ecuación:

$$2x^2-5x+1=0$$

Solución

En este caso, la factorización no es simple, por lo que utilizamos la fórmula general (5) con $a=2, b=-5$ y $c=1$:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(1)}}{2(2)}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$$

Como el discriminante es positivo, tenemos dos raíces reales:

$$x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4} \text{ y } x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$$

Entonces, comprobamos la primera raíz y dejamos la segunda como ejercicio:

$$x=\frac{5+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow 2x^2-5x+1=2\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)^2-5\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)+1$$

$$=2\left(\frac{25+10\sqrt{17}+17}{16}\right)-\frac{25+5\sqrt{17}}{4}+1$$

$$=\frac{42+10\sqrt{17}}{8}-\frac{25+5\sqrt{17}}{4}+1=\frac{21+5\sqrt{17}}{4}-\frac{25+5\sqrt{17}}{4}+1$$

$$=\frac{21+5\sqrt{17}-25-5\sqrt{7}+4}{4}=0$$

Ejemplo 24

Resolver la ecuación:

$$x^2+3=1-\sqrt{8}x$$

Solución

Primero, reacomodamos la ecuación restando $1-\sqrt{8}x$ a cada lado de la misma:

$$x^2+\sqrt{8}x+2=0$$

A continuación, utilizamos la fórmula general (5) con $a = 1$, $b = \sqrt{8}$ y $c = 2$:

$$x = \frac{-\sqrt{8} \pm \sqrt{\left(\sqrt{8}\right)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-\sqrt{8} \pm \sqrt{0}}{2} = -\frac{\sqrt{8}}{2}$$

Puesto que el discriminante $\Delta = 0$, la ecuación tiene una sola solución, la cual podemos reescribir como sigue:

$$x = -\frac{\sqrt{8}}{2} = -\frac{\sqrt{(4)(2)}}{2} = -\frac{\sqrt{4}\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Para su comprobación, sustituimos $x = -\sqrt{2}$ en la ecuación original:

$\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 3 = 1 - \left(\sqrt{8}\right)\left(-\sqrt{2}\right) \Rightarrow 2 + 3 = 1 + \left(\sqrt{(8)(2)}\right) \Rightarrow 5 = 1 + \sqrt{16} \Rightarrow 5 = 1 + 4 \Rightarrow 5 = 5$, lo que indica que $x = -\sqrt{2}$ es la solución.

Ejemplo 25

Resolver la ecuación:

$$3x^2 - 4x + 20 = x^2 + 4x - 6$$

Solución

Primero, reescribimos la ecuación y pasamos todos los términos del lado izquierdo. Esto es:

$$3x^2 - 4x + 20 = x^2 + 4x - 6 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 26 = 0$$

Como se puede notar, la ecuación se simplifica si dividimos cada término entre 2:

$$2x^2 - 8x + 26 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 13 = 0$$

En este caso, la factorización no es sencilla, así que recurrimos a la fórmula general (5) con $a = 1$, $b = -4$ y $c = 13$:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

Obsérvese que el discriminante tiene signo negativo. Esto implica que la ecuación no tiene soluciones reales, pero sí soluciones complejas. Para escribirlas, debemos recordar que $\pm\sqrt{-36} = \pm\sqrt{36}i = \pm 6i$, por lo que las soluciones son: $x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$. Es decir que $x_1 = 2 + 3i$ y $x_2 = 2 - 3i$ son las soluciones de la ecuación.

Como siempre, la comprobación consiste en sustituir en la ecuación original y comprobar que obtenemos una identidad.

Es importante resaltar que la diferencia entre las raíces complejas del ejemplo anterior es únicamente el signo del coeficiente de la i. Esto ocurre siempre que se tienen soluciones complejas.

Ejemplo 26

Una persona lanza verticalmente una pelota desde la ventana de un edificio. La posición de la pelota respecto al piso está dada por $x = -5t^2 + 3t + 2$, para $0 \leq t \leq 3$, con t en segundos y x en metros. Determinar en qué instante la pelota toca el suelo.

Solución

La pelota está en el suelo si $x = 0$, por lo que es necesario resolver la ecuación:

$$-5t^2 + 3t + 2 = 0$$

Para ello, utilizamos la fórmula general:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-5)(2)}}{2(-2)} = \frac{-3 \pm 7}{-4}$$

En este caso, las soluciones son $t = 2.5$ y $t = -1$. Dado que la restricción para el tiempo es $0 \leq t \leq 3$, concluimos que a los 2.5 segundos la pelota tocará el suelo.

Ejemplo 27

Un granjero desea cercar un terreno rectangular; dadas las condiciones del terreno, el ancho de este es 10 metros menor que el largo. Considérese que el área total del terreno es de 999 metros cuadrados. Encontrar las dimensiones del terreno.

Solución

Sean x metros la longitud del ancho del terreno. Entonces, el largo de este es $x + 10$.

Como el área del terreno es de 999 metros cuadrados, tenemos la ecuación $x(x + 10) = 999$, que reescribimos como $x^2 + 10x - 999 = 0$. Al resolver esta ecuación, obtenemos dos soluciones: $x = 27$, $x = -37$. En este caso, descartamos la solución negativa, dado que x representa una longitud y, por tanto, es positiva.

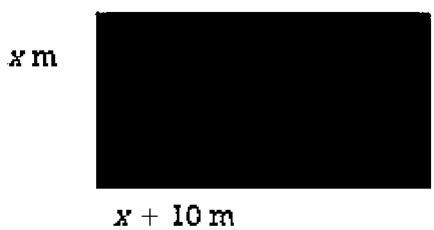


Figura 2.1

Las dimensiones del terreno son $x = 27$ metros de ancho por $27 + 10 = 37$ metros de largo.

Ejemplo 28

Encontrar dos números enteros consecutivos tales que su producto sea 342.

Solución

Sea x el primero de los números buscados. El siguiente es $x + 1$, y dado que su producto debe ser 342, tenemos la ecuación:

$$x(x + 1) = 342$$

Al resolver esta ecuación por factorización o fórmula general, nos da $x = 18$. Entonces, los números buscados son 18 y 19.

Números complejos

En el primer capítulo se definen los números complejos como el conjunto:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid i^2 = -1\}$$

Si $z = a + bi$ es un número complejo, su *parte real* es a y su *parte imaginaria* es b. El *conjugado* de z es el número complejo:

$$\overline{z} = a - bi$$

Como se observa de la expresión anterior, solo cambia el signo de la parte imaginaria en el conjugado.

En este apartado se definen y se presentan las operaciones de suma, diferencia, multiplicación y división de números complejos. Estas operaciones, suma o adición, resta o diferencia y multiplicación, se pueden tratar como operaciones con polinomios, donde la i hace las veces de la variable x y se debe recordar que $i^2 = -1$.

- Suma o adición de números complejos: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- Diferencia o resta de números complejos: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- Producto de números complejos: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$
- Cociente de números complejos: $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

Como se ve, la suma o adición de números complejos consiste simplemente en sumar partes reales y partes imaginarias.

En tanto, el producto se puede ver como sigue:

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di)$$

$$= ac + adi + bci + bd(i^2) = ac + adi + bci + bd(-1) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Para calcular el cociente de dos números complejos, es necesario multiplicar y dividir por el conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right)=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo 29

Calcular:

a) $(3+4i)+(2-5i)$

b) $(17-2i)-(11-6i)$

Solución

Sumamos la parte real más la parte real y la parte imaginaria más la parte imaginaria de cada número:

a) $(3+4i)+(2-5i)=(3+2)+(4i-5i)=5-i$

b) $(17-2i)-(11-6i)=(17-11)+(-2i+6i)=6+4i$

Ejemplo 30

Calcular:

a) $(3+2i)(5-3i)$

b) $(-1+4i)(-3-2i)$

c) $\left(2+\sqrt{3}i\right)^2$

Solución

Para los tres casos, primero desarrollamos los paréntesis y simplificamos:

a) $(3+2i)(5-3i)=3(5-3i)+2i(5-3i)=15-9i+10i-6\left(i^2\right)=15+i-6(-1)=21+i$

b) $(-1+4i)(-3-2i)=3+2i-12i-8\left(i^2\right)=11-10i$

c) $\left(2+\sqrt{3}i\right)^2=2^2+2(2)\left(\sqrt{3}i\right)+\left(\sqrt{3}i\right)^2=4+4\sqrt{3}i+3\left(i^2\right)=1+4\sqrt{3}i$

Ejemplo 31

Calcular:

a) $\dfrac{-24-10i}{1-i}$

b) $\dfrac{3-2i}{-2+3i}$

c) $\dfrac{4+i}{2+2i}(3-5i)$

Solución

Primero, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

a) $\dfrac{-24-10i}{1-i}=\dfrac{(-24-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{-14-34i}{2}=-7-17i$

b) $\dfrac{8-2i}{-2+3i}=\dfrac{(3-2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}=\dfrac{-12-5i}{13}=-\dfrac{12}{13}-\dfrac{5}{13}i$

Para el inciso c), primero efectuamos el producto y luego la división (aunque también es posible hacer primero la división y luego el producto):

c) $\dfrac{4+i}{2+2i}(3-5i)=\dfrac{(4+i)(3-5i)}{2+2i}=\dfrac{17-17i}{2+2i}=\dfrac{(17-17i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\dfrac{-68i}{8}=\dfrac{17}{2}i$

Ejemplo 32

Simplificar:

a) $(x-3i)(x+3i)$

b) $[x-(2+5i)][x-(2-5i)]$

Solución

Desarrollamos los paréntesis y simplificamos:

a) $(x-3i)(x+3i)=x^2+3xi-3xi-9(i^2)=x^2+9$

b) $[x-(2+5i)][x-(2-5i)]=x^2-(2-5i)x-(2+5i)x+(2+5i)(2-5i)$

$=x^2-2x+5xi-2x-5xi+29=x^2-4x+29$

Ejemplo 33

Comprobar que $2+\sqrt{3}i$ y $2-\sqrt{3}i$ y son raíces del polinomio x^2-4x+7.

Solución

Primero, sustituimos $x=2+\sqrt{3}i$ en el polinomio:

$$x^2-4x+7=\left(2+\sqrt{3}i\right)^2-4\left(2+\sqrt{3}i\right)+7=1+4\sqrt{3}i-8-4\sqrt{3}i+7=0,$$

por lo que sí es una raíz.

Luego, sustituimos $x = 2 - \sqrt{3}i$:

$x^2 - 4x + 7 = \left(2 - \sqrt{3}i\right)^2 - 4\left(2 - \sqrt{3}i\right) + 7 = 1 - 4\sqrt{3}i - 8 + 4\sqrt{3}i + 7 = 0$, por lo que comprobamos que el conjugado también es una raíz.

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 52 a 56, comprueba que los números dados son soluciones de las ecuaciones dadas.

52. $x = 2, x = -3; x^2 + x = 6$
53. $x = 2, x = \frac{5}{3}; 3x^2 - 11x + 10 = 0$
54. $x = 3i, x = -3i, x^2 + 9 = 0$
55. $x = \frac{1}{2}, x = -5; 2x^2 + 9x - 5$
56. $-\left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}\right); 3x^2 - x - \left(\frac{2}{3}\right)$

En los ejercicios 57 a 68, completa el cuadrado.

57. $x^2 - 4x + 29$
58. $x^2 + 6x + 16$
59. $x^2 - 10x - 2$
60. $x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)x + 1$
61. $x^2 - 3x + 2$
62. $x^2 - 12x$
63. $-x^2 - 14x - 19$
64. $-2x^2 - 2x$
65. $-3x^2 + 4x - 1$
66. $4x^2 - 20x + 17$
67. $6x^2 + 16x + 4$
68. $x^2 - 10x - 2$

En los ejercicios 69 a 84, resuelve la ecuación cuadrática.

69. $x^2 - 4x = 21$

70. $x^2 = 7 - 6x$

71. $-4x^2 - 24x - 31 = 0$

72. $x^2 = 2x + 6$

73. $3x^2 + 7x + 1 = 2x^2 + 13x - 24$

74. $(2x - 1)^2 - 3 = 2 - (x + 2)^2$

75. $(x + 1)^2 + 1 = 8 - (2 - x)^2$

76. $x^2 - x + \left(\frac{5}{2}\right) = 0$

77. $x^2 - 8x + 41 = 0$

78. $4x^2 + 6x + 11 = \left(x^2 + \left(\frac{5}{3}\right)\right) + 10$

79. $2x^2 - 16x + 33 = 0$

80. $x^2 - 12x + 38 = 0$

81. $x^2 - 10x + 25 = 0$

82. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

83. $9x^2 - 24x + 16 = 0$

84. $9x^2 - 42x + 49 = 0$

En los ejercicios 85 a 95, realiza las operaciones indicadas con números complejos.

85. $2i(3 + 7i)$

86. $(2 - 5i)(-2 + 4i)$

87. $(3 + 2i)(1 - 3i) - 8 + 8i$

88. $\left(\frac{8 + 4i}{5 + 6i}\right)$

89. $\left(\frac{1 + i}{-5 - 9i}\right)$

90. $\left(\frac{2}{i}\right) + \left(\frac{5 + i}{-2i}\right)$

91. $\left(\frac{3}{i + 2}\right) - \left(\frac{3 - i}{2i + 3}\right)$

92. $\left(\frac{2 + 3i}{1 - 3i}\right)(5 - 4i)$

93. $\left(\frac{3 - 2i}{3 + 4i}\right)(2 - i)$

94. $\left(\frac{i}{i+2}\right)-(2+i)(2-i)$

95. $\left(\frac{2i-4}{i+8}\right)-i(i-1)$

En los ejercicios 96 a 99, simplifica la expresión.

96. $(x-3i)(x+3i)$

97. $(x-(2-4i))(x-(2+4i))$

98. $(x-(4+7i))(x-(4-7i))$

99. Una empresa exporta x unidades de su producto a d dólares, donde $d = 1400 - 40x$. Encuentra cuántas unidades debe exportar la compañía para obtener ingresos mayores a \$20 000.

2.3 Otros tipos de ecuaciones (racionales, con radicales, con valores absolutos y reducibles a cuadráticas)

En esta sección se estudian algunos otros tipos de ecuaciones y su solución.

Ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales son ecuaciones donde aparecen uno o varios cocientes de polinomios. Por lo común, la forma de resolverlas es multiplicar cada término de la igualdad por el mínimo común múltiplo de los denominadores. Esta acción transforma la ecuación en una de tipo polinomial. En este libro solo se trabaja con ecuaciones polinomiales, lineales o cuadráticas. Asimismo, es preciso no olvidar que al haber una división en una ecuación polinomial, el denominador no puede ser cero, por lo que de entrada se descartan los valores donde se anulan el o los denominadores de la ecuación como posibles soluciones.

Ejemplo 34

Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{1-5x}{x+3} = -4$$

Solución

Como hay un cociente $x + 3 \neq 0$; es decir, $x = -3$ no puede ser una solución. Entonces, multiplicamos cada lado de la ecuación por $x + 3$ para eliminar el cociente:

$$\frac{1-5x}{x+3} = -4 \Rightarrow \frac{1-5x}{x+3}(x+3) = -4(x+3) \Rightarrow 1-5x = -4x-12$$

Luego, pasamos los términos con la incógnita x de un lado y los términos constantes del otro:

$$1-5x=-4x-12 \Rightarrow -x=-13 \Rightarrow x=13$$

Para comprobar el resultado, podemos sustituir este valor en la ecuación original:

$$\frac{1-5x}{x+3}=\frac{1-5(13)}{13+3}=\frac{-64}{16}=-4$$

Ejemplo 35

Resolver:

$$\frac{3x-1}{2x-2}=\frac{5}{2}$$

Solución

Dado que hay un cociente, el denominador no puede ser cero, por lo que $2x-2\neq 0$; esto es, $x\neq 1$.

Igual que en el ejemplo anterior, primero multiplicamos cada término de la ecuación por $2x-2$ y despejamos:

$$\frac{3x-1}{2x-2}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{3x-1}{2x-2}(2x-2)=\frac{5}{2}(2x-2)\Rightarrow 3x-1=5x-5\Rightarrow 3x-5x=-5+1\Rightarrow -2x=-4$$

Así, tenemos que la solución es $x=2$.

Ejemplo 36

Resolver la ecuación:

$$2+\frac{6x-7}{2x-3}=5$$

Solución

Primero, restamos 2 a cada lado de la ecuación:

$$2+\frac{6x-7}{2x-3}=5\Rightarrow\frac{6x-7}{2x-3}=3$$

Ahora, multiplicamos cada lado por $2x-3$, recordando que $x\neq\frac{3}{2}$, para que el denominador no se anule:

$$\frac{6x-7}{2x-3}=3\Rightarrow\frac{6x-7}{2x-3}(2x-3)=3(2x-3)\Rightarrow 6x-7=6x-9$$

Al restar $6x$ de cada lado obtenemos $-7=-9$, lo cual es absurdo y nos indica que la ecuación que nos ocupa *no* tiene solución.

Ejemplo 37

Resolver:

$$\frac{3}{x-1}=\frac{2x-5}{x-1}-3$$

Solución

En este caso, $x \neq 1$. Multiplicamos cada término de la igualdad por $x-1$:

$$\frac{3}{x-1}=\frac{2x-5}{x-1}-3 \Rightarrow \frac{3}{x-1}(x-1)=\frac{2x-5}{x-1}(x-1)-3(x-1) \Rightarrow 3=2x-5-3x+3 \Rightarrow 3=-x-2$$

Como se puede comprobar de esta última igualdad, es fácil observar que la solución es $x = -5$.

Ejemplo 38

Resolver:

$$\frac{3x-5}{x-1}=1-\frac{1+x}{x-1}$$

Solución

En primera instancia, multiplicamos cada término de la ecuación por $x-1$ con $x \neq 1$:

$$\frac{3x-5}{x-1}=1-\frac{1+x}{x-1} \Rightarrow \frac{3x-5}{x-1}(x-1)=1(x-1)-\frac{1+x}{x-1}(x-1) \Rightarrow 3x-5=x-1-(1+x)$$

$$\Rightarrow 3x-5=x-1-1-x \Rightarrow 3x-5=-2 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$$

Pero sabemos que $x = 1$ no puede ser solución porque anula el denominador. Concluimos que la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 39

Resolver:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}=1$$

Solución

En este caso, $x \neq 1$ y $x \neq 2$. Primero multiplicamos cada término de la ecuación por $(x-1)(x-2)$, para eliminar los denominadores:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}=1 \Rightarrow \frac{2}{x-1}(x-1)(x-2)+\frac{3}{x-2}(x-1)(x-2)=(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow 2(x-2)+3(x-1)=(x-1)(x-2) \Rightarrow 2x-4+3x-3=x^2-3x+2$$

$$\Rightarrow 0=x^2-8x+9$$

Luego, aplicamos la fórmula general:

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-4(1)(9)}}{2(1)}=\frac{8\pm\sqrt{28}}{2}=\frac{8\pm2\sqrt{7}}{2}=4\pm\sqrt{7}$$

Ejemplo 40

Resolver:

$$\frac{3x-6}{x^2+3x-10}=-1$$

Solución

Primero, igualamos el denominador con cero para identificar los valores que x no puede tomar en la solución:

$$x^2+3x-10=0\Rightarrow(x+5)(x-2)=0\Rightarrow x=-5,\ x=2$$

Ahora, multiplicamos cada término de la ecuación por $x^2+3x-10$, $x\neq 5$, $x\neq -2$:

$$\frac{3x-6}{x^2+3x-10}=-1\Rightarrow\frac{3x-6}{x^2+3x-10}\left(x^2+3x-10\right)=-1\left(x^2+3x-10\right)$$

$$\Rightarrow 3x-6=-x^2-3x+10\Rightarrow x^2+6x-16=0$$

De esta manera, la fórmula general nos da:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4(1)(-16)}}{2(1)}=\frac{-6\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-6\pm10}{2}=-3\pm5$$

La última ecuación tiene dos soluciones: $x=-8$ y $x=2$; sin embargo, la ecuación original solo tiene una solución: $x=-8$, porque $x=2$ anula el denominador.

Ejemplo 41

Resolver:

$$\frac{2x-6}{x^2-5x-6}+\frac{1}{x-6}=\frac{2}{x+1}$$

Solución

En primera instancia, notamos que:

$$x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$$

Enseguida, igualamos los denominadores con cero:

$$x^2-5x-6=0$$

Lo cual nos da $x = 6$ y $x = -1$. Estos son los valores de x que no pueden ser soluciones.

Por último, multiplicamos cada término de la ecuación por $(x - 6)(x + 1)$ con $x \neq 6$, $x \neq -1$:

$$\frac{2x-6}{x^2-5x-6}+\frac{1}{x-6}=\frac{2}{x+1}\Rightarrow\frac{2x-6}{x^2-5x-6}(x-6)(x+1)+\frac{1}{x-6}(x-6)(x+1)$$

$$=\frac{2}{x+1}(x-6)(x+1)\Rightarrow 2x-6+x+1=2x-12$$

$$\Rightarrow x=7$$

Ejemplo 42

Resolver:

$$\frac{4}{x-4}-\frac{1}{x+1}=\frac{3}{x-3}$$

Solución

Para eliminar los denominadores, multiplicamos cada término de la ecuación por $(x - 4)(x + 1)(x - 3)$ con $x \neq 4$, $x \neq -1$ y $x \neq 3$:

$$\frac{4}{x-4}-\frac{1}{x+1}=\frac{3}{x-3}\Rightarrow\frac{4}{x-4}(x-4)(x+1)(x-3)-\frac{1}{x+1}(x-4)(x+1)(x-3)$$

$$=\frac{3}{x-3}(x-4)(x+1)(x-3)\Rightarrow 4(x+1)(x-3)-(x-4)(x-3)=3(x-4)(x+1)$$

$$\Rightarrow 4x^2-8x-12-x^2+7x-12=3x^2-9x-12\Rightarrow 3x^2-x-24=3x^2-9x-12$$

$$\Rightarrow 8x=12$$

$$\Rightarrow x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

Ejemplo 43

Resolver:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-3}=\frac{3x+1}{x^2-x-6}$$

Solución

Nótese que $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, por lo que $x = 3$ y $x = -2$ no pueden ser soluciones de la ecuación. Como en los otros casos, siempre eliminamos el denominador. Aquí, lo hacemos multiplicando cada término de la ecuación por $(x - 3)(x + 2)$:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-3}=\frac{3x+1}{x^2-x-6}\Rightarrow\frac{1}{x+2}(x-3)(x+2)+\frac{2}{x-3}(x-3)(x+2)$$

$$=\frac{3x+1}{x^2-x-6}(x-3)(x+2)\Rightarrow x-3+2(x+2)=3x+1\Rightarrow 3x+1=3x+1$$

Esto es una identidad que se cumple para cualquier número real x, así que la solución consiste en cualquier número real distinto de 3 y -2.

Ejemplo 44

Si se tiene un rectángulo tal que al dividirlo en un cuadrado más un rectángulo más pequeño, el rectángulo más pequeño y el original tienen la misma proporción entre sus lados, esta proporción se conoce como la *razón áurea*. Dicha proporción se utiliza en muchas aplicaciones estéticas desde la antigüedad (por ejemplo, se dice que los primeros griegos ya la utilizaban). La razón áurea puede obtenerse si se considera un rectángulo de lados 1 y x. Entonces, el rectángulo más pequeño tiene lados $1 - x$ y x, por lo que las proporciones nos llevan a la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$$

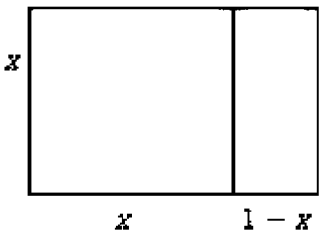


Figura 2.2

La solución positiva de esta ecuación se conoce como el número de oro. Encontrar este número.

Solución

Primero, multiplicamos la ecuación por x, y pasamos los términos del lado izquierdo:

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Acto seguido, aplicamos la fórmula general:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Pero solo tomamos la respuesta positiva, así que

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.6180339887$$

La razón áurea es el recíproco de este número que obtuvimos:

$$\textit{Razón áurea} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988$$

Ejemplo 45

La máquina A puede realizar un trabajo en un periodo de dos horas menos que la máquina B. Juntas ambas máquinas, pueden realizar el mismo trabajo en tres horas. Determinar cuánto tiempo le lleva a cada máquina terminar un trabajo.

Solución

Sea t (expresado en horas), el tiempo que le toma realizar el trabajo a la máquina A. Entonces, $t + 2$ es el tiempo que le toma realizar el mismo trabajo a la máquina B.

De esta manera, la máquina A realiza un trabajo en t horas $\Rightarrow \frac{1}{t}$ trabajo por hora.

En tanto, la máquina B realiza un trabajo en $t + 2$ horas $\Rightarrow \frac{1}{t+2}$ trabajo por hora.

Como ambas máquinas requieren tres horas para completar un trabajo, tenemos:

$$\left(\frac{1}{t}\right)3+\left(\frac{1}{t+2}\right)3=1$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $t=2-\sqrt{10}$ y $t=2+\sqrt{10}$. Por tanto, la máquina A realiza el trabajo en aproximadamente 5.16 horas y la máquina B en 7.16 horas.

Ecuaciones con radicales

Como su nombre lo indica, estas ecuaciones contienen una o más raíces (casi siempre raíces cuadradas) de la incógnita. La forma más común de resolverlas es elevando a la potencia de la raíz para eliminarla; no obstante, hay que recordar que al elevar al cuadrado pueden aparecer "soluciones extrañas", por lo que es indispensable comprobar las posibles soluciones, para asegurarnos de que en realidad lo son.

Ejemplo 46

Resolver la siguiente ecuación:

$$8-\sqrt{2x-3}=6$$

Solución

Primero, despejamos el radical. Así que sumamos $\sqrt{2x-3}$ a cada lado de la igualdad:

$$8-\sqrt{2x-3}=6\Rightarrow 8=6+\sqrt{2x-3}\Rightarrow 2=\sqrt{2x-3}$$

Luego, elevamos al cuadrado cada lado de la ecuación:

$$2=\sqrt{2x-3}\Rightarrow 2^2=\left(\sqrt{2x-3}\right)^2\Rightarrow 4=2x-3\Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

Ahora, sustituimos el valor que encontramos, para asegurarnos de que en realidad es la solución:

$$8-\sqrt{2x-3}=8-\sqrt{2\left(\frac{7}{2}\right)-3}=8-\sqrt{4}=8-2=6$$

Así que la solución es:

$$x=\frac{7}{2}$$

Ejemplo 47

Resolver la siguiente ecuación:

$$\sqrt{x+5}=\sqrt{3x-1}$$

Solución

Primero, elevamos al cuadrado cada lado de la igualdad:

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2=\left(\sqrt{3x-1}\right)^2 \Rightarrow x+5=3x-1 \Rightarrow x=3$$

Ahora, comprobamos sustituyendo este valor en la ecuación original:

$$\sqrt{x+5}=\sqrt{3x-1} \Rightarrow \sqrt{3+5}=\sqrt{3(3)-1} \Rightarrow \sqrt{8}=\sqrt{8}$$

Ejemplo 48

Resolver la ecuación:

$$\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}-2$$

Solución

Como siempre, primero elevamos al cuadrado cada lado de la ecuación:

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}-2\right)^2 \Rightarrow x-3=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-4\sqrt{2x+1}+4$$

$$\Rightarrow x-3=2x+5-4\sqrt{2x+1} \Rightarrow 4\sqrt{2x+1}=x+8$$

Enseguida, nuevamente elevamos al cuadrado cada lado de la ecuación:

$$\left(4\sqrt{2x+1}\right)^2=(x+8)^2 \Rightarrow 32x+16=x^2+16x+64=x^2-16x+48=0$$

Podemos factorizar esta última ecuación con facilidad:

$$x^2-16x+48=(x-4)(x-12)=0 \Rightarrow x=4,\ x=12$$

Siempre debemos comprobar las soluciones en la ecuación original:

- Para $x = 4$:

$$\sqrt{4-3} = \sqrt{2(4)+1} - 2 \Rightarrow \sqrt{1} = \sqrt{9} - 2 \Rightarrow 1 = 1$$

Por lo que sí es solución.

- Para $x = 12$:

$$\sqrt{12-3} = \sqrt{2(12)+1} - 2 \Rightarrow \sqrt{9} = \sqrt{25} - 2 \Rightarrow 3 = 3$$

Así que también es solución.

Ejemplo 49

Resolver la ecuación:

$$\sqrt{x+8} = \sqrt{2x-1} + 2$$

Solución

Primero, elevamos al cuadrado cada lado de la ecuación:

$$\left(\sqrt{x+8}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-1}+2\right)^2 \Rightarrow x+8 = 2x-1+4\sqrt{2x-1}+4$$

Luego, despejamos el radical y elevamos nuevamente al cuadrado cada lado de la igualdad:

$$-x+5 = 4\sqrt{2x-1} \Rightarrow (-x+5)^2 = \left(4\sqrt{2x-1}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 32x - 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 42x + 41 = 0$$

Para resolver esta última ecuación cuadrática, podemos utilizar la fórmula general o factorizar. Así:

$$x^2 - 42x + 41 = (x-1)(x-41) = 0$$

Cualquiera de estos caminos (la fórmula general o la factorización) nos conduce a las soluciones $x = 1$ y $x = 41$. Sin embargo, no hay dos soluciones de la ecuación original, ya que al sustituir en la misma tenemos:

- Si $x = 1 \Rightarrow \sqrt{1+8} = \sqrt{2(1)-1} + 2 \Rightarrow \sqrt{9} = \sqrt{1} + 2 \Rightarrow 3 = 3$, entonces sí es solución.
- Si $x = 41 \Rightarrow \sqrt{41+8} = \sqrt{2(41)-1} + 2 \Rightarrow \sqrt{49} = \sqrt{81} + 2 \Rightarrow 7 = 11$, entonces no es solución.

Así que la ecuación original solo tiene una solución:

$$x = 1$$

Ejemplo 50

Resolver la ecuación:

$$\sqrt{5x-2}=\sqrt{2x-3}+1$$

Solución

En primera instancia, despejamos un radical y elevamos cada lado de la igualdad al cuadrado:

$$\sqrt{5x-2}=\sqrt{2x-3}+1 \Rightarrow \left(\sqrt{5x-2}\right)^2=\left(\sqrt{2x-3}+1\right)^2$$

$$\Rightarrow 5x-2=2x-3+2\sqrt{2x-3}+1$$

Enseguida, despejamos el radical y nuevamente elevamos al cuadrado cada lado:

$$5x-2=2x-3+2\sqrt{2x-3}+1 \Rightarrow 3x=2\sqrt{2x-3} \Rightarrow (3x)^2=\left(2\sqrt{2x-3}\right)^2 \Rightarrow 9x^2=8x-12$$

$$\Rightarrow 9x^2-8x+12=0$$

Esta última ecuación no tiene soluciones reales, ya que su discriminante $\Delta = 8^2 - 4(9)(12) = -368$, es negativo. Por tanto, la ecuación original no tiene soluciones reales.

Ejemplo 51

Resolver la ecuación:

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{x-1}$$

Solución

Primero, multiplicamos cada lado de la ecuación por $(x-1)\sqrt{x+1}$:

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+1}}(x-1)\sqrt{x+1}=\frac{1}{x-1}(x-1)\sqrt{x+1} \Rightarrow 2x-2=\sqrt{x+1}$$

Enseguida, elevamos al cuadrado cada lado de la igualdad:

$$(2x-2)^2=\left(\sqrt{x+1}\right)^2 \Rightarrow 4x^2-8x+4=x+1 \Rightarrow 4x^2-9x+3=0$$

Luego, aplicamos la fórmula general:

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-4(4)(3)}}{2(4)}=\frac{9\pm\sqrt{33}}{8}$$

Ahora, verificamos si los valores obtenidos son soluciones de la ecuación original:

- Si $x = \frac{9+\sqrt{33}}{8}$, $\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{9+\sqrt{33}}{8}\right)+1}} = \frac{1}{\left(\frac{9+\sqrt{33}}{8}\right)-1} \Rightarrow 1.1861 = 1.1861$

  por lo que sí es solución.

- Si $x = \frac{9-\sqrt{33}}{8}$, $\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{9-\sqrt{33}}{8}\right)+1}} = \frac{1}{\left(\frac{9-\sqrt{33}}{8}\right)-1} \Rightarrow 2.597 = -0.71077$

  por lo que no es solución.

De esta manera, la ecuación original solo tiene una solución:

$$x = \frac{9+\sqrt{33}}{8}$$

Ejemplo 52

Resolver la ecuación:

$$\sqrt[3]{x^3 - x + 2} = x + 1$$

Solución

En este caso, para eliminar el radical, primero elevamos al cubo cada lado de la ecuación:

$$\left(\sqrt[3]{x^3 - x + 2}\right)^3 = (x+1)^3 \Rightarrow x^3 - x + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Luego, pasamos todos los términos de un lado:

$$0 = 3x^2 + 4x - 1$$

Enseguida, utilizamos la fórmula general:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

Por último, comprobamos:

Si $x = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$, $\sqrt[3]{\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)^3 - \left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right) + 2} = \left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right) + 1 \Rightarrow -0.54858 = -0.54858$

por lo que sí es solución.

Si $x=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$, $\sqrt[3]{\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)^{3}-\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)+2}=\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)+1 \Rightarrow 1.2153=1.2153$

por lo que también es solución.

Ecuaciones con valor absoluto

Sea a un número real, su *valor absoluto*, $|a|$, se define como:

$$|a|=\begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a<0 \end{cases}$$

Esto significa que el valor absoluto de un número positivo es igual al número y que el valor absoluto de un número negativo es menos el número y, por tanto, es positivo. Algunos ejemplos son: $|12|=12$, $|-2|=-(-2)=2$, $|-7.3|=7.3$, $|0|=0$, $|\sqrt{2}|=|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$.

Las propiedades de valor absoluto son:

- $|a| \geq 0$
- $|a|=0$, si y solo si $a=0$
- $|a|=|-a|$
- $|ab|=|a||b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, siempre que $b \neq 0$
- $|a|^{2}=a^{2}$

La última propiedad es el cuadrado del valor absoluto de un número y es igual al cuadrado del número, así que elevar al cuadrado, elimina el valor absoluto. Esto permite resolver algunas ecuaciones.

El valor absoluto de un número mide la distancia del número al origen. Como se trata de una distancia, el valor absoluto siempre es positivo para un número distinto de cero.

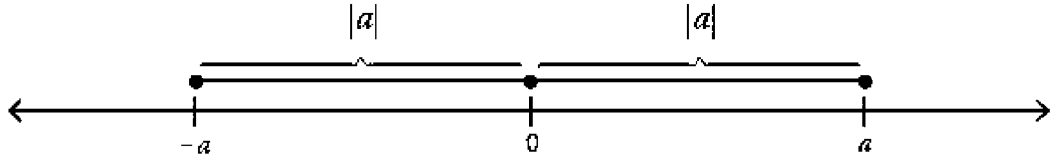


Figura 2.3

El valor absoluto de la diferencia de dos números, $|a-b|$, representa la distancia en la recta numérica entre estos números.

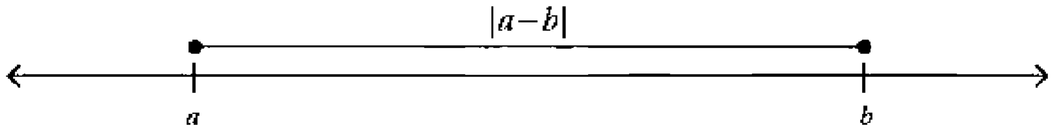


Figura 2.4

Lo anterior significa que una ecuación, como $|x|=3$, tiene dos soluciones: $x = 3$ y $x = -3$, dado que $|x|=3$ se interpreta como los números x cuya distancia al origen es 3. En general, se tiene que:

$$|x|=b,\ b\geq 0 \Rightarrow x=\pm b \tag{1}$$

Como se puede observar, b debe ser mayor o igual que cero, porque el valor absoluto siempre es mayor o igual que cero. También es importante hacer notar que, en general, se tienen dos soluciones (solo se tiene una solución si $b = 0$).

A continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 53

Resolver la ecuación:

$$|x-3|=4$$

Solución

Como sabemos, existen dos formas de resolver esta ecuación. La primera, directamente de (1), nos da:

$$|x-3|=4 \Rightarrow x-3=\pm 4$$

Con el signo +: $x-3=+4 \Rightarrow x=7$

Ahora, con el signo menos: $x-3=-4 \Rightarrow x=-1$

Así, tenemos las dos soluciones:

$$x=7 \text{ y } x=-1$$

La segunda forma de resolver esta ecuación es elevar al cuadrado cada lado de la ecuación. Así tenemos:

$$|x-3|^2=4^2 \Rightarrow (x-3)^2=4^2 \Rightarrow x^2-6x+9=16 \Rightarrow x^2-6x-7=0$$

La factorización de esta última ecuación cuadrática resulta fácil (recuérdese que también podemos utilizar la fórmula general):

$$x^2-6x-7=(x+1)(x-7)=0$$

Lo que nos conduce a las soluciones:

$$x = -1 \text{ y } x = 7$$

Como siempre, cuando comprobamos, sustituimos en la ecuación original y debemos obtener una identidad:

- Si $x = -1$, $|-1-3| = |-4| = 4$
- Si $x = 7$, $|7-3| = |4| = 4$

Ejemplo 54

Resolver la ecuación:

$$8 - 3|2x+1| = 1$$

Solución

Primero, despejamos el valor absoluto:

$$8 - 3|2x+1| = 1 \Rightarrow 8 - 1 = 3|2x+1| \Rightarrow |2x+1| = \frac{7}{3}$$

Ahora, utilizamos la ecuación (1), o también podemos elevar al cuadrado y resolver la ecuación cuadrática resultante:

$$|2x+1| = \frac{7}{3} \Rightarrow 2x+1 = \frac{7}{3} \text{ o } 2x+1 = -\frac{7}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3},\ -x = -\frac{5}{3}$$

Por último, comprobamos en la ecuación original:

Si $x = \frac{2}{3} \Rightarrow 8 - 3\left|2\left(\frac{2}{3}\right)+1\right| = 8 - 3\left|\frac{7}{3}\right| = 8 - 8\left(\frac{7}{3}\right) = 8 - 7 = 1$

Si $x = -\frac{5}{3} \Rightarrow 8 - 3\left|2\left(-\frac{5}{3}\right)+1\right| = 8 - 3\left|-\frac{7}{3}\right| = 8 - 3\left(\frac{7}{3}\right) = 8 - 7 = 1$

Ejemplo 55

Resolver la ecuación:

$$|5x - 8| = -2$$

Solución

La ecuación no tiene solución, puesto que el valor absoluto siempre es mayor o igual que cero, y no puede ser igual a un número negativo, como es el caso de -2.

Como se puede observar en este ejemplo, si elevamos al cuadrado cada lado de la ecuación obtenemos una ecuación cuadrática con dos soluciones:

$$|5x-8|^2=(-2)^2 \Rightarrow 25x^2-80x+64=4 \Rightarrow 25x^2-80x+60=0$$

$$x=\frac{80\pm\sqrt{80^2-4(25)(60)}}{2(25)}=\frac{80\pm 20}{50} \Rightarrow x=2,\ x=\frac{6}{5}$$

No obstante, ninguno de estos valores es una solución de la ecuación:

- Si $x=2$, $|5(2)-8|=2\neq -2$
- Si $x=\frac{6}{5}$, $\left|5\left(\frac{6}{5}\right)-8\right|=2\neq -2$

Ejemplo 56

Resolver la ecuación:

$$|4-3x|=x-1$$

Solución

Dado que $x-1$ es igual a un valor absoluto, este debe ser mayor o igual que cero, por lo que las soluciones deben ser mayores o iguales a 1: $x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$. Esto significa que de las soluciones que obtengamos, solo consideraremos aquellas que son mayores o iguales a 1.

De esta manera, primero elevamos al cuadrado cada lado de la ecuación, para eliminar el valor absoluto:

$$|4-3x|^2=(x-1)^2 \Rightarrow (4-3x)^2=(x-1)^2 \Rightarrow 16-24x+9x^2=x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow 8x^2-22x+15=0 \Rightarrow x=\frac{22\pm\sqrt{22^2-4(8)(15)}}{2(8)}=\frac{22\pm 2}{2(8)} \Rightarrow x=\frac{3}{2},\ x=\frac{5}{4}$$

Como podemos observar, las soluciones obtenidas son mayores que 1.

Ahora, realizamos la comprobación.

- Sí $x=\frac{3}{2}$, $\left|4-3\left(\frac{3}{2}\right)\right|=\frac{3}{2}-1 \Rightarrow \left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
- Si $x=\frac{5}{4}$, $\left|4-3\left(\frac{5}{4}\right)\right|=\frac{5}{4}-1 \Rightarrow \left|\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Ejemplo 57

Resolver la ecuación:

$$|x-3|=x-4$$

Solución

Las soluciones deben cumplir que $x-4\geq 0$, ya que esta expresión es igual a un valor absoluto. Primero elevamos al cuadrado cada lado de la ecuación:

$$|x-3|^2=(x-4)^2\Rightarrow (x-3)^2=(x-4)^2\Rightarrow x^2-6x+9=x^2-8x+16\Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

Este valor no es una solución, porque de antemano sabemos que las soluciones deben ser mayores o iguales a 4. Esto también se obtiene si comprobamos:

- Si $x=\frac{7}{2}\Rightarrow\left|\frac{7}{2}-3\right|=\frac{7}{2}-4\Rightarrow\left|\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, lo que es un absurdo.

Por tanto, concluimos que la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 58

Resolver la siguiente ecuación:

$$|x-1|=2+|x-4|$$

Solución

En este caso, primero elevamos al cuadrado cada lado de la ecuación, para eliminar un valor absoluto.

$$|x-1|^2=(2+|x-4|)^2\Rightarrow (x-1)^2=4+4|x-4|+(x-4)^2$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1=4+4|x-4|+x^2-8x+16\Rightarrow 6x-19=4|x+2| \qquad (2)$$

Luego, elevamos nuevamente al cuadrado cada lado de la ecuación:

$$(6x-19)^2=(4|x+2|)^2\Rightarrow 36x^2-228x+361=16x^2-128x+256\Rightarrow 20x^2-100+105=0$$

Con la fórmula general, obtenemos:

$$x=\frac{7}{2},\ x=\frac{3}{2}$$

Como siempre debemos comprobar si son soluciones de la ecuación original:

- Si $x=\frac{7}{2},\Rightarrow\left|\frac{7}{2}-1\right|=2+\left|\frac{7}{2}-4\right|\Rightarrow\left|\frac{5}{2}\right|=2+\left|-\frac{1}{2}\right|\Rightarrow\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$, esto significa que $x=\frac{7}{2}$ sí es solución.
- Si $x=\frac{3}{2}\Rightarrow\left|\frac{3}{2}-1\right|=2+\left|\frac{3}{2}-4\right|\Rightarrow\left|\frac{1}{2}\right|=2+\left|-\frac{1}{2}\right|\Rightarrow\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ esto es un absurdo, por lo que $x=\frac{3}{2}$ no es solución.

También es posible descartar $x = \frac{3}{2}$ como solución, porque la ecuación (2) requiere que $6x - 19 \geq 0$, lo cual no se cumple con este valor, pero sí se cumple con $x = \frac{7}{2}$.

Ecuaciones que se reducen a ecuaciones cuadráticas

Hasta aquí ya se han visto algunos ejemplos de ecuaciones racionales, ecuaciones con radicales y ecuaciones con valor absoluto; no obstante, existen otras ecuaciones en donde una sustitución de la variable original lleva a una ecuación cuadrática que se resuelve y luego se reinterpreta en términos de la variable original.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 59

Resolver la ecuación:

$$x^4 - 7x^2 - 18 = 0$$

Solución

En este acaso, primero podemos reducir a una ecuación cuadrática si hacemos $z = x^2$. Nótese que $z^2 = (x^2)^2 = x^4$ y, por tanto:

$$x^4 - 7x^2 - 18 = z^2 - 7z - 18$$

Así que la nueva ecuación que tenemos que resolver es la cuadrática:

$$z^2 - 7z - 18 = 0$$

Como podemos observar, esta es fácil factorizar (o también es posible utilizar la fórmula general):

$$z^2 - 7z - 18 = (z-9)(z+2) = 0 \Rightarrow z = 9,\ z = -2$$

Dado que z es positivo, por ser un número al cuadrado ($z = x^2$), descartamos la segunda solución. Por tanto, $z = 9$ o $x^2 = 9$, lo que nos lleva a las soluciones reales $x = 3$, $x = -3$ de la ecuación original.

Ahora, comprobamos:

- Si $x = 3 \Rightarrow x^4 - 7x^2 - 18 = 3^4 - 7(3)^2 - 18 = 81 - 63 - 18 = 0$
- Si $x = -3 \Rightarrow x^4 - 7x^2 - 18 = (-3)^4 - 7(-3)^2 - 18 = 81 - 63 - 18 = 0$

En este punto, es importante hacer la observación de que solo encontramos las soluciones reales. Pero, si se utiliza $z = -2$ se obtienen dos soluciones complejas.

Ejemplo 60

Resolver la ecuación:

$$x^6 - 6x^3 - 16 = 0$$

Solución

Dado que $x^6 = (x^3)^2$, sustituimos $z = x^3$:

$$x^6 - 6x^3 - 16 = z^2 - 6z - 16 = 0$$

La ecuación en la variable z tiene dos soluciones: $z = 8$ y $z = -2$, las cuales, traducidas en términos de x, nos dan las ecuaciones $x^3 = 8$ y $x^3 = -2$, y estas tienen las soluciones:

$$x = 2 \text{ y } x = -\sqrt[3]{2}$$

Ejemplo 61

Resolver la ecuación:

$$x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} - 24 = 0$$

Solución

En este caso, conviene sustituir $z = x^{\frac{1}{3}}$, así que $z^2 = x^{\frac{2}{3}}$:

$$x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} - 24 = z^2 + 2z - 24 = (z + 6)(z - 4) = 0$$

De esta manera, las soluciones son: $z = -6$ y $z = 4$.

El primero de estos valores nos da la ecuación $x^{\frac{1}{3}} = -6$, la cual se resuelve elevando cada lado de la igualdad al cubo: $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (-6)^3 \Rightarrow x = -216$

El segundo valor nos lleva a la ecuación $x^{\frac{1}{3}} = 4$, la cual, al elevar al cubo, nos da: $x = 64$.

Ejemplo 62

Resolver la ecuación:

$$6x - 5\sqrt{x} - 4 = 0$$

Solución

Una posibilidad para resolver esta ecuación es despejar el radical, elevar al cuadrado y resolver la cuadrática correspondiente, tal como lo vimos en la sección de ecuaciones con radicales. Asimismo, también es posible reconocer esta ecuación como una cuadrática si hacemos $z = \sqrt{x}$, así que $x = z^2$ y la ecuación es:

$$6x - 5\sqrt{x} - 4 = 0 \Rightarrow 6z^2 - 5z - 4 = 0$$

Cuyas soluciones se encuentran ya sea por factorización o por fórmula general:

$$z = \frac{4}{3} \text{ y } z = -\frac{1}{2}$$

En este caso, no consideramos la raíz negativa porque $z = \sqrt{x} > 0$.

Así pues, para la raíz positiva tenemos:

$$z = \sqrt{x} = \frac{4}{3}$$

Esto implica que:

$$x = \frac{16}{9}$$

Ahora, comprobamos al sustituir en la ecuación original:

Si $x = \frac{16}{9}$, entonces $6\left(\frac{16}{9}\right) - 5\sqrt{\frac{16}{9}} - 4 = \frac{32}{3} - 5\left(\frac{4}{3}\right) - 4 = 0$.

Ejemplo 63

Resolver la ecuación:

$$x^{-2} + 7x^{-1} + 12 = 0$$

Solución

En este caso, es conveniente hacer $z = x^{\ 1}$, con lo cual la ecuación es:

$$z^2 + 7z + 12 = 0$$

Como podemos observar, es fácil obtener que $z = -4$ y $z = -3$. Como $z = x^{-1} = \frac{1}{x}$, entonces tenemos las ecuaciones:

$\frac{1}{x} = -4$, la cual nos lleva a $x = -\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{x} = -3$, de la cual tenemos que $x = -\frac{1}{3}$.

Existe otra forma de resolver esta ecuación:

$$x^{-2} + 7x^{-1} + 12 = \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x} + 12 = 0$$

Esto es, si multiplicamos por x^2 obtenemos la ecuación:

$$1 + 7x + 12x^2 = 0$$

Cuyas soluciones son las que habíamos encontrado: $x = -\frac{1}{4}$ y $x = -\frac{1}{3}$.

La comprobación se deja al lector (véase el ejercicio 103).

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 100 a 107, verifica que los valores dados son soluciones de las ecuaciones dadas.

100. $x = 2, x = -3; x^2 + x = 6.$

101. $x = 2,\ x = \frac{5}{3};\ 3x^2 - 11x + 10 = 0$

102. $x = \frac{9}{4};\ \frac{\sqrt{x}}{x-2} = 6$

103. $x = -\frac{1}{4}$ y $x = -\frac{1}{3};\ x^{-2} + 7x^{-1} + 12 = 0$

104. $x = 64,\ x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} - 24 = 0$

105. $t = \left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{5},\ t = \left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{5} + \left(\frac{3}{2}\right);\ \left(\frac{3}{t}\right) + \left(\frac{3}{(t+3)}\right) = 1$

106. $x = \left(\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{5};\ \sqrt{x-1} = 2 - x$

107. $x = 2,\ |x-1| + |3-x| = 2$

En los ejercicios 108 a 121, resuelve la ecuación racional.

108. $\frac{x+1}{2x+1} = 5$

109. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$

110. $\frac{3}{x^2 + 5x - 2} = 1$

111. $\frac{x}{x-1} + 1 = \frac{1}{x+5}$

112. $\frac{3x-5}{2} = \frac{2}{3x-5}$

113. $\frac{1}{x^3 + 2x^2 + x - 4} = x^2 + 1$

114. $\frac{6x^2 + 8x - 3}{2x+1} = 3x - 2$

115. $\dfrac{3x^2 - x - 4}{3x - 4} = x + 1$

116. $\dfrac{-2x^2 + 5x + 42}{2x + 7} = x - 6$

117. $\dfrac{1}{5x - 1} - 4x = \dfrac{1}{5x - 1}$

118. $\dfrac{2}{x^2 + 1} + 3 = \dfrac{4}{2x^2 + 2}$

119. $x = \dfrac{2 - x}{x}$

120. Determina las longitudes de un rectángulo cuya área es 100 cm^2 y su largo (en centímetros) es 3 cm más que su ancho.

121. Encuentra la base y altura de un triángulo si su área es de 55 cm^2 y la altura es 2 cm mayor que su base.

En los ejercicios 122 a 132, resuelve la ecuación con radicales.

122. $\sqrt{(2x + 7)} = 3$

123. $\sqrt{(2 - x)} = 4$

124. $\dfrac{2}{\sqrt{10 - x}} = 5$

125. $\sqrt{2x - 5} = x$

126. $\sqrt{(9 - 2x)} = 3x$

127. $2 - \sqrt{x + 3} = x$

128. $\sqrt{x + 2} = 2 - \sqrt{x + 4}$

129. $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = 2$

130. $\sqrt[3]{x^3 - 2} = x - 2$

131. $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 3x + 1} = x + 1$

132. $\dfrac{x}{\sqrt{x - 3}} = 2$

En los ejercicios 133 a 145, resuelve la ecuación con valor absoluto.

133. $|x-3|=2$

134. $|2-4x|=8$

135. $2-3|2x+5|=-4$

136. $\dfrac{3}{|x-10|}=4$

137. $4-2|10x-1|=11$

138. $|2x-1|=|x+2|$

139. $|x+5|=|x-3|$

140. $|x+2|-2|x-1|=1$

141. $|3-2x|-|x+1|=2$

142. $\dfrac{1}{|x+3|}=|x+1|$

143. $\dfrac{|2x+1|}{|3-x|}=\dfrac{-2}{|6x+7|}$

144. $|3-x|=x$

145. $|2x+1|=x+2$

En los ejercicios 146 a 151, resuelve la ecuación reducible a cuadrática.

146. $x^4+13x^2+36=0$

147. $x^{\frac{2}{3}}+7x^{\frac{1}{3}}-18=0$

148. $x^6+19x^3-216=0$

149. $x^{-2}-13x^{-1}+42=0$

150. $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x}{x+4}$

151. $x^{-4}-4x^{-2}-45=0$

2.4 Desigualdades e intervalos

Desigualdades e intervalos

El primer capítulo presentó temas del conjunto de números positivos $\mathbb{R}^+$ y de desigualdades. Como se vio en ese capítulo, $a < b$ (que se lee: "a es menor que b"), también se puede representar como $b > a$, si $b-a > 0$. Asimismo, en el capítulo también se mencionó que los números reales se pueden representar con la recta numérica. En particular, si $a < b$, significa que en la recta numérica el número a está a la izquierda del número b (véase la figura 2.5).

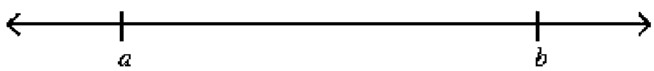


Figura 2.5

La desigualdad $x < b$ representa todos los números reales que son menores que b; esto es, los números que están a la izquierda de b en la recta numérica (véase la figura 2.6). Estos números se representan mediante un *intervalo abierto* $(-\infty, b)$.

Figura 2.6

Como se observa en este intervalo, la desigualdad es *estricta*, por lo que el número b no está incluido. De esta manera, la recta se dibuja con un círculo vacío. Para que b se incluya, la desigualdad debe ser menor o igual: $x \leq b$, lo cual se denota con el intervalo cerrado por la derecha $(-\infty, b]$ y este conjunto se dibuja en la recta numérica con un círculo lleno (véase la figura 2.7).

Figura 2.7

Es importante destacar que existen varios tipos de intervalos, los cuales se describen a continuación.

- $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ Intervalo infinito izquierdo abierto.

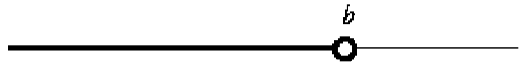


Figura 2.8

- $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$ Intervalo infinito izquierdo cerrado.

Figura 2.9

- $(a, \infty) = \{x \mid a < x\}$ Intervalo infinito derecho abierto.

Figura 2.10

- $[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$ Intervalo infinito derecho cerrado.

Figura 2.11

- $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ Intervalo (finito) abierto.

Figura 2.12

- $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ Intervalo (finito) cerrado.

Figura 2.13

- $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ Intervalo (finito) abierto por la izquierda y cerrado por la derecha.

Figura 2.14

- $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ Intervalo (finito) cerrado por la izquierda y abierto por la derecha.

Figura 2.15

En general, los intervalos representan números entre sus extremos y pueden incluir o no sus extremos, dependiendo, respectivamente, de si son intervalos cerrados o abiertos. Cuando no se incluyen los extremos, el intervalo se denota con paréntesis, mientras que cuando los extremos sí se incluyen se denota con corchetes cuadrados. Cuando el intervalo es infinito, ∞ y $-\infty$, siempre se representa con paréntesis redondo, esto se debe a que estos símbolos no son números.

Ejemplo 64

Describir y dibujar los siguientes intervalos:

a) $(1, 4)$

b) $[4, \infty)$

c) $(-\infty, 1)$

d) $(-\infty, 1)\cup(1, 4)\cup[4, \infty)$

Solución

a) Este intervalo es abierto, por lo que no incluye sus extremos, y consiste en los números que están entre sus extremos 1 y 4:

$$(1, 4)=\{x|1<x<4\}$$

Figura 2.16

b) Este intervalo representa a los números que son mayores o iguales que 4, incluyendo al 4 mismo:

$$[4, \infty)=\{x|4\leq x\}$$

Figura 2.17

c) En este caso, se trata de un intervalo abierto, por lo que el extremo no se incluye. Esto es, se trata de los números menores (a la izquierda) que 1:

$$(-\infty, 1)=\{x|x<1\}$$

Figura 2.18

d) La unión de los tres intervalos anteriores corresponde a todos los números reales, a excepción del 1:

$$(-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup [4, \infty) = \mathbb{R} - \{1\}$$

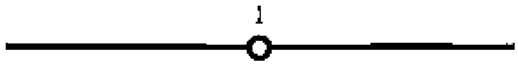


Figura 2.19

Ejemplo 65

Identificar el o los intervalos en la gráfica y representarlo(s) como un conjunto.

a)

Figura 2.20

b)

Figura 2.21

c)

Figura 2.22

Solución

a) Un número x a la derecha de -5, incluyendo al -5, se expresa por $x \geq -5$ o $-5 \leq x$, por lo que este intervalo es $[-5, \infty) = \{x | x \geq -5\}$.

b) Este intervalo representa los números entre -1 y 3, sin incluir el -1, pero incluyendo el 3. Un número x con estas características está a la derecha de -1 y a la izquierda de 3, por lo que cumple las desigualdades: $-1 < x \leq 3$. La gráfica representa el intervalo $(-1, 3] = \{x | -1 < x \leq 3\}$.

c) En este caso, se requiere la unión de dos intervalos para expresar la gráfica. Para la parte izquierda, el intervalo son los números menores o iguales a cero: $(-\infty, 0] = \{x | x \leq 0\}$. La parte derecha de la gráfica representa los números entre 2 y 6, incluido el 2, pero no el 6: $[2, 6) = \{x | 2 \leq x < 6\}$. El conjunto representado en la gráfica es la unión de estos intervalos: $(-\infty, 0] \cup [2, 6)$.

Ejemplo 66

Encontrar y dibujar el conjunto dado:

a) $[-1, 1] \cup (7, \infty)$

b) $[1, 9) \cap [4, \infty)$

c) $(-\infty, 8] \cap (2, \infty)$

d) $(-6, -3] \cup [-3, 0] \cup (0, 7]$

Solución

a) Esta unión representa los números entre -1 y 1, incluidos los extremos 1 y -1, más el conjunto de los números a la derecha de 7:

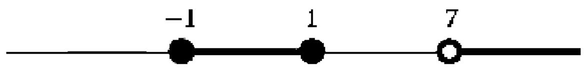


Figura 2.23

b) Esta intersección expresa los números entre 1 y 9, incluido el 1, que además están a la derecha de 4, lo que nos lleva a los números entre 4 y 9, incluido el 4 pero no el 9:

$$[1, 9) \cap [4, \infty) = [4, 9)$$

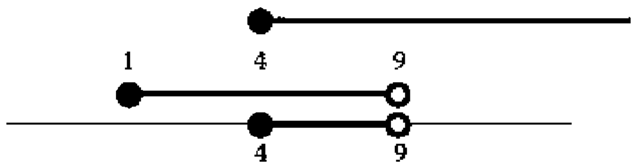


Figura 2.24

c) En este caso, la intersección representa los números que simultáneamente están a la izquierda de 8, incluyendo el 8, y a la derecha de 2, sin incluir el 2:

$$(-\infty, 8] \cap (2, \infty) = (2, 8]$$

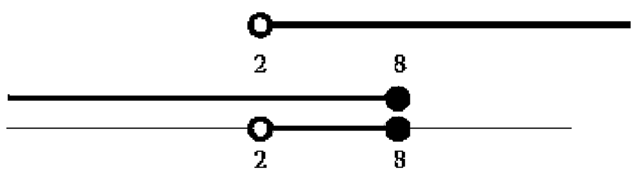


Figura 2.25

d) Este conjunto representa los números entre -6 y -3, más los números entre -3 y 0, más los números entre 0 y 7. Como podemos observar, -3, 0 y 7 sí se incluyen, solo -6 no se incluye:

$$(-6, -3] \cup [-3, 0] \cup (0, 7] = (-6, 7]$$

Figura 2.26

Resolución de desigualdades

Las desigualdades tienen las siguientes propiedades que permitirán resolverlas.

I. Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$ (si se suma la misma cantidad a cada lado de una desigualdad, esta no se altera).

II. Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a - c < b - c$ (si se resta la misma cantidad a cada lado de una desigualdad, esta no se altera).

III.

a) Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$ (si se multiplica por la misma cantidad *positiva* a cada lado de una desigualdad, esta no se altera).

b) Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$ (si se multiplica por la misma cantidad *negativa* a cada lado de una desigualdad, esta se invierte).

IV.

a) Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ (si se divide entre la misma cantidad *positiva* a cada lado de una desigualdad, esta no se altera).

b) Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ (si se divide entre la misma cantidad *negativa* a cada lado de una desigualdad, esta se invierte).

Las propiedades anteriores siguen siendo válidas si el símbolo $<$ se cambia por $\leq$.

Aquí es posible advertir que las primeras dos propiedades y los incisos a de las segundas dos propiedades, son las mismas que las de las ecuaciones. Por otro lado, los incisos b de III y IV, indican que hay que tener cuidado al multiplicar o al dividir una desigualdad por un número negativo. En resumen, para resolver una desigualdad se trata de la misma forma que al resolver una ecuación, solo que al multiplicar o dividir por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Adelante se ve cómo resolver desigualdades de varios tipos: lineales, cuadráticas, racionales y con valor absoluto.

Desigualdades lineales

Estas son de la misma forma que una ecuación lineal, donde aparecen polinomios de grado 1, pero con alguno de estos símbolos $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$, en lugar del signo $=$ de una ecuación. Las desigualdades también se conocen como *inecuaciones*.

El objetivo de resolver una desigualdad lineal siempre es despejar la variable, al sumar y/o restar y/o multiplicar y/o dividir cada lado de la desigualdad por la misma cantidad. La solución de una desigualdad lineal, a diferencia de una ecuación lineal, no consiste en un valor, sino en un conjunto con una infinidad de valores que representamos con un intervalo.

Ejemplo 67

Resolver la siguiente desigualdad:

$$2x - 4 > 8$$

Solución

Para la resolución de esta desigualdad, pensemos como si se tratara de la siguiente ecuación: $2x - 4 = 8$, pero conservamos el signo de desigualdad, $>$, a menos que multipliquemos o dividamos por un número negativo. Si este es el caso, la desigualdad debe invertirse.

Ahora, si la comparamos con la ecuación $2x - 4 = 8$, lo primero que debemos hacer es sumar 4 a cada lado. Entonces, hacemos esto en la desigualdad; sumamos a cada lado 4 y por la propiedad I, la desigualdad se conserva:

$$2x - 4 + 4 > 8 + 4$$

Al simplificar tenemos:

$$2x > 12$$

Ahora, dividimos cada lado de la desigualdad entre 2, que es positivo y por el inciso a de la propiedad IV, la desigualdad se conserva:

$$\frac{2x}{2} > \frac{12}{2}$$

Al simplificar, obtenemos que la solución de la desigualdad son todos los números x tales que $x > 6$. Como podemos notar, esto último corresponde al intervalo $(6, \infty)$.

Figura 2.27

Ejemplo 68

Resolver la inecuación:

$$8x+1\leq 11+3x$$

Solución

Primero, pasamos los términos con x al lado izquierdo, al restar $3x$ a cada lado de la desigualdad (por la propiedad I, la desigualdad se conserva):

$$8x+1-3x\leq 11+3x-3x\Rightarrow 5x+1\leq 11$$

Ahora, restamos 1 a cada lado de la inecuación (nuevamente por la propiedad I, la desigualdad se conserva):

$$5x+1-1\leq 11-1\Rightarrow 5x\leq 10$$

Finalmente, dividimos cada término de la desigualdad entre 5, que es positivo y por tanto no altera la desigualdad (propiedad IV, inciso a):

$$\frac{5x}{5}\leq\frac{10}{5}$$

Al simplificar, obtenemos $x\leq 2$. De esta forma, podemos ver que la solución es el intervalo $(-\infty, 2]$.

Figura 2.28

Existen varios caminos a seguir para obtener la solución anterior. Por ejemplo, podríamos haber comenzado pasando los términos con x al lado derecho, al restar $8x$ a cada lado de la desigualdad:

$$8x+1-8x\leq 11+3x-8x$$

Lo cual, al simplificar, nos da:

$$1\leq 11-5x$$

A continuación, restamos 11 de cada lado de la inecuación:

$$1-11\leq 11-5x-11\Rightarrow -10\leq -5x$$

Finalmente, dividimos entre -5, pero como es un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte (propiedad IV, inciso b):

$$\frac{-10}{-5}\geq\frac{-5x}{-5}$$

Esto nos lleva a $2\geq x$, que equivale a la solución que encontramos primero: es decir, el intervalo $(-\infty, 2]$.

Ejemplo 69

Resolver la desigualdad:

$$3(x-2)+4<\frac{x}{2}+1$$

Solución

Primero, multiplicamos cada término de la inecuación por 2; luego, desarrollamos el paréntesis y, por último, simplificamos:

$$2[3(x-2)+4]<2\left[\frac{x}{2}+1\right]\Rightarrow 6(x-2)+8<x+2\Rightarrow 6x-4<x+2$$

Después, restamos x y sumamos 4 a cada lado de la desigualdad:

$$6x-4-x+4<x+2-x+4\Rightarrow 5x<6$$

Por último, dividimos entre 5 cada lado de la inecuación manteniendo la desigualdad:

$$\frac{5x}{5}<\frac{6}{5}\Rightarrow x<\frac{6}{5}$$

Por tanto, la solución es el intervalo:

$$\left(-\infty,\frac{6}{5}\right)$$

Figura 2.29

Ejemplo 70

Resolver las inecuaciones:

$$-3\leq 3x+8<1$$

Solución

Debido a que se trata de dos desigualdades simultáneas, $-3\leq 3x+8$ y $3x+8<1$, primero resolvemos cada una por separado y luego intersecamos las soluciones:

$$-3\leq 3x+8 \quad \text{y} \quad 3x+8<1$$

$$-3-8\leq 3x+8-8 \quad \text{y} \quad 3x+8-8<1-8$$

$$-11\leq 3x \quad \text{y} \quad 3x<-7$$

$$\frac{-11}{3}\leq\frac{3x}{3} \quad \text{y} \quad \frac{3x}{3}<\frac{-7}{3}$$

$$\frac{-11}{3}\leq x \quad \text{y} \quad x<\frac{-7}{3}$$

Como podemos observar, ¡en cada desigualdad fueron los mismos pasos!, así que podríamos haberla resuelto como sigue:

$$-3 \leq 3x + 8 < 1$$

Luego, restamos 8 a cada lado de las inecuaciones:

$$-3-8 \leq 3x+8-8 < 1-8 \Rightarrow -11 \leq 3x < -7$$

Después, dividimos entre 3 cada término de las desigualdades:

$$\frac{-11}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{-7}{3} \Rightarrow -\frac{11}{3} \leq x < -\frac{7}{3}$$

La solución es el intervalo:

$$\left[-\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

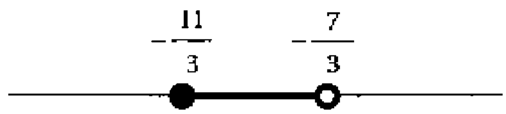


Figura 2.30

Ejemplo 71

Resolver las desigualdades:

$$2 + x \geq 5x - 6 \geq x - 2$$

Solución

Primero, restamos x a cada lado de las inecuaciones:

$$2 + x - x \geq 5x + 8 - x \geq x - 2 - x \Rightarrow 2 \geq 4x - 6 \geq -2$$

Ahora, sumamos 6 a cada lado de las desigualdades:

$$2+6 \geq 4x - 6 + 6 \geq -2 + 6 \Rightarrow 8 \geq 4x \geq 4$$

Enseguida, dividimos cada término entre 4:

$$\frac{8}{4} \geq \frac{4x}{4} \geq \frac{4}{4} \Rightarrow 2 \geq x \geq 1$$

Esto equivale a $1 \leq x \leq 2$, que corresponde al intervalo cerrado $[1, 2]$.

Figura 2.31

Ejemplo 72

Resolver las inecuaciones:

$$4-5x<2-3x\leq 7-4x$$

Solución

En este caso es conveniente que resolvamos las inecuaciones por separado, debido a que los pasos son distintos en cada desigualdad. La solución corresponde a la intersección de las soluciones de cada desigualdad.

Así, para la primera desigualdad, tenemos:

$$4-5x<2-3x\Rightarrow 4-5x+5x<2-3x+5x\Rightarrow 4<2+2x\Rightarrow 4-2<2+2x-2$$

$$\Rightarrow 2<2x\Rightarrow 1<x$$

La cual se expresa mediante el intervalo:

$$(1,\infty)$$

La segunda desigualdad se resuelve como sigue:

$$2-3x\leq 7-4x\Rightarrow 2-3x+4x\leq 7-4x+4x\Rightarrow 2+x\leq 7\Rightarrow 2+x-2\leq 7-2\Rightarrow x\leq 5$$

Lo que nos lleva al intervalo:

$$(-\infty,5]$$

La solución es la intersección de los intervalos obtenidos:

$$(1,\infty)\cap(-\infty,5]$$

La intersección se refiere a los números que hay en común en estos intervalos:

$$(1,\infty)\cap(-\infty,5]=(1,5]$$

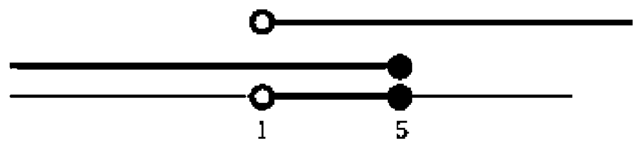


Figura 2.32

Ejemplo 73

Resolver las siguientes desigualdades:

a) $3x-1\leq 3+x\leq 3-x$

b) $3x-1\leq 3+x\leq -2+2x$

Solución

a) En este caso, primero resolvemos por separado cada inecuación:

i) $3x-1\leq 3+x \Rightarrow 3x-1-x+1\leq 3+x-1-x \Rightarrow 2x\leq 4 \Rightarrow x\leq 2$

Así, la primera desigualdad tiene como solución el intervalo:

$$(-\infty,\ 2]$$

ii) $3+x\leq 3-x \Rightarrow 3+x+x-3\leq 3-x+x-3 \Rightarrow 2x\leq 0 \Rightarrow x\leq 0$

De esta manera, la segunda desigualdad tiene como solución el intervalo:

$$(-\infty,\ 0]$$

La solución de ambas desigualdades corresponde a la intersección de los intervalos obtenidos:

$$(-\infty,\ 2]\cap(-\infty,\ 0]=(-\infty,\ 0]$$

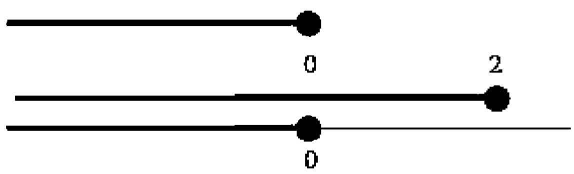


Figura 2.33

b) Resolvemos por separado, pero la primera desigualdad es la misma del inciso **a**.

i) $3x-1\leq 3+x \Rightarrow (-\infty,\ 2]$

ii) $3+x\leq -2+2x \Rightarrow 3+x-x+2\leq -2+2x-x+2 \Rightarrow 5\leq x$

Esto corresponde al intervalo:

$$[5,\ \infty)$$

Finalmente, intersecamos los intervalos obtenidos en cada desigualdad:

$$(-\infty,\ 2]\cap[5,\ \infty)=\varnothing$$

Esto significa que no hay solución.

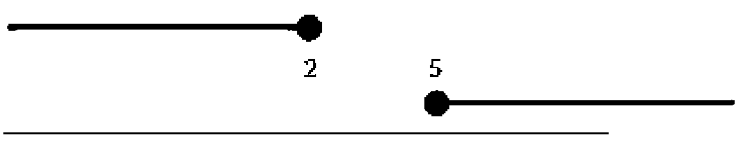


Figura 2.34

Ejemplo 74

Resolver las siguientes desigualdades:

a) $2(x-1) > \frac{6x+1}{3} + 4$

b) $2(x-1) > \frac{6x+1}{3} - 4$

Solución

a) $2(x-1) > \frac{6x+1}{3} + 4 \Rightarrow 3[2(x-1)] > 3\left[\frac{6x+1}{3} + 4\right] \Rightarrow 6(x-1) > 6x+1+12$

$\Rightarrow 6x - 6 > 6x + 13$

Al restar $6x$ de cada lado de la desigualdad, obtenemos $-6 > 13$, lo cual es un absurdo.

Esto significa que la desigualdad no tiene solución; en otras palabras, el conjunto solución es el conjunto vacío: $\varnothing$.

b) $2(x-1) > \frac{6x+1}{3} - 4 \Rightarrow 3[2(x-1)] > 3\left[\frac{6x+1}{3} - 4\right] \Rightarrow 6(x-1) > 6x+1-12$

$\Rightarrow 6x - 6 > 6x - 11$

Al restar $6x$ de cada lado de la desigualdad, obtenemos $-6 > -11$, lo cual es verdadero. Esto nos indica que cualquier número es solución, el conjunto solución es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Desigualdades cuadráticas

Una desigualdad cuadrática siempre contiene un término ax^2 con $a = 0$. Por tanto, una desigualdad cuadrática siempre puede reescribirse en alguna de las siguientes formas:

a) $ax^2 + bx + c < 0$

b) $ax^2 + bx + c \leq 0$

c) $ax^2 + bx + c > 0$

d) $ax^2 + bx + c \geq 0$

Para resolver cualquiera de las desigualdades anteriores, primero se calculan las raíces del polinomio cuadrático. Esto divide la recta numérica en tres, dos o un intervalos. Después, se evalúa con algún punto en cada intervalo, para determinar el signo en dicho intervalo. Por último, se eligen el o los intervalos que satisfagan la inecuación.

Ejemplo 75

Resolver la desigualdad:

$$3x^2 - 10x - 10 \geq 2x + 5$$

Solución

Primero, pasamos los términos del lado izquierdo:

$$3x^2 - 12x - 15 \geq 0$$

Si dividimos cada término entre 3, la desigualdad no se altera:

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0$$

Entonces, factorizamos el polinomio cuadrático como:

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

Como podemos observar, sus raíces son $x = 5$ y $x = -1$, las cuales dividen la recta numérica en tres intervalos cerrados, porque la desigualdad no es estricta.

Entonces, sustituimos en la expresión cuadrática un valor arbitrario en cada intervalo (que no sea un extremo del intervalo):

Tabla 2.1

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$(-\infty, -1]$	-2	$(-2)^2 - 4(-2) - 5 = 10$	$+$
$[-1, 5]$	0	$(0)^2 - 4(0) - 5 = -5$	$-$
$[5, \infty)$	6	$(6)^2 - 4(6) - 5 = 7$	$+$

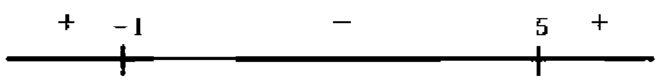


Figura 2.35

Como se nos pide encontrar los valores en los que el polinomio es mayor o igual que cero, la solución es el conjunto:

$$(-\infty, -1] \cup [5, \infty)$$

Ejemplo 76

Resolver la inecuación:

$$x^2 - 10x + 32 < 10x - x^2$$

Solución

Primero, pasamos los términos del lado izquierdo y dividimos entre 2:

$$2x^2 - 20x + 32 < 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 < 0$$

Las raíces de la expresión cuadrática son $x = 2$ y $x = 8$, las cuales dividen en tres intervalos (abiertos, porque la desigualdad es estricta) la recta numérica.

Luego, sustituimos un valor de cada intervalo en el polinomio cuadrático.

Tabla 2.2

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$(-\infty, 2)$	0	$(0)^2 - 10(0) + 16 = 16$	+
$(2, 8)$	3	$(3)^2 - 10(3) + 16 = -5$	−
$(8, \infty)$	9	$(9)^2 - 10(9) + 16 = 7$	+

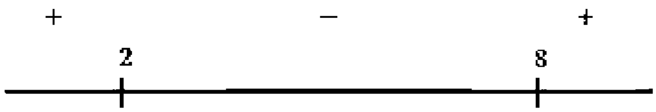


Figura 2.36

Como necesitamos los valores en los que el polinomio es menor que cero, la solución es el conjunto:

$$(2, 8)$$

Ejemplo 77

Resolver la siguiente desigualdad:

$$-x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

Solución

Las raíces del polinomio cuadrático son:

$$x = -1 + \sqrt{2} \text{ y } x = -1 - \sqrt{2}$$

Estos valores dividen la recta numérica en tres intervalos, para cada uno de los cuales evaluamos el polinomio de la desigualdad.

Tabla 2.3

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$\left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right]$	-3	$-(-3)^2-2(-3)+1=-2$	$-$
$\left[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right]$	0	$-(0)^2-2(0)+1=1$	$+$
$\left[-1+\sqrt{2}, \infty\right)$	2	$-(2)^2-2(2)+1=-7$	$-$

Como necesitamos tener los valores de x, que hagan la expresión cuadrática mayor o igual a cero, concluimos que la solución es el intervalo:

$$\left[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right]$$

Ejemplo 78

Resolver las siguientes desigualdades:

a) $x^2+2x+5\geq 0$

b) $x^2+2x+5<0$

Solución

Como el polinomio cuadrático tiene discriminante, $\Delta = 2 - 4(1)(5) < 0$, sus raíces son complejas. Esto significa que no tiene raíces reales. Por tanto, en este caso la recta numérica no se divide en intervalos, pero igual debemos evaluar:

Tabla 2.4

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$(-\infty, \infty)$	0	$(0)^2+2(0)+5=5$	$+$

Lo que significa que esta expresión cuadrática siempre es positiva.

a) Como aquí se nos pide encontrar dónde es mayor o igual que cero, la solución es el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

b) Como aquí se nos pide encontrar dónde es menor que cero, la solución es el conjunto vacío $\varnothing$.

Ejemplo 79

Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $x^2-6x+9>0$

b) $x^2-6x+9\leq 0$

Solución

En este caso, solo hay una raíz del polinomio cuadrático, $x=3$, la cual divide la recta numérica en dos intervalos:

Tabla 2.5

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$(-\infty, 3)$	0	$(0)^2-6(0)+9=9$	+
$(3, \infty)$	4	$(4)^2-6(4)+9=1$	+

a) Como aquí necesitamos encontrar los valores donde el polinomio es estrictamente mayor que cero, la solución son los números reales, excepto el número 3:

$$\mathbb{R}-\{3\}$$

La cual también se expresa como:

$$(-\infty, 3)\cup(3, \infty)$$

b) Como en este caso se nos piden los valores en los que la expresión cuadrática es menor o igual que cero, la solución es el número $x = 3$, porque ahí es donde la expresión cuadrática se anula.

Desigualdades con valor absoluto

En esta sección se estudian las desigualdades del tipo $|ax+b|<c$, $|ax+b|\leq c$, $|ax+b|>c$ y $|ax+b|\geq c$, para $c > 0$.

Para resolverlas, existen varios caminos. El primero, consiste en utilizar alguno de los siguientes resultados que surgen fácilmente de la interpretación del valor absoluto como una distancia.

(I) $|ax+b|<c \Leftrightarrow -c<ax+b<c$

(II) $|ax+b|\leq c \Leftrightarrow -c\leq ax+b\leq c$

(III) $|ax+b|>c \Leftrightarrow ax+b>c$ o $ax+b<-c$

(IV) $|ax+b|\geq c \Leftrightarrow ax+b\geq c$ o $ax+b\leq -c$

La segunda forma de resolver una inecuación con valor absoluto, consiste en elevar al cuadrado cada lado, para obtener una desigualdad cuadrática como las que se vieron en la sección anterior.

A continuación se dan algunos ejemplos.

Ejemplo 80

Resolver la desigualdad:

$$|2x-3|<5$$

Solución

Primero, utilizamos el resultado (I) anterior:

$$|2x-3|<5 \Leftrightarrow -5<2x-3<5 \Rightarrow -5+3<2x-3+3<5+3 \Rightarrow -2<2x<8$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2}<\frac{2x}{2}<\frac{8}{2} \Rightarrow -1<x<4$$

Por tanto, la solución es el intervalo:

$$(-1,4)$$

Otra forma de resolver esta desigualdad, consiste en elevar al cuadrado cada lado de la inecuación:

$$(|2x-3|)^2<5^2 \Rightarrow (2x-3)^2<5^2 \Rightarrow 4x^2-12x+9<25 \Rightarrow 4x^2-12x-16<0 \Rightarrow x^2-3x-4<0$$

Esta última inecuación se resuelve como en la sección anterior. Esto es, las raíces del polinomio cuadrático, $x=-1$ y $x=4$, dividen la recta numérica en tres intervalos y observamos el signo en cada uno de ellos:

Tabla 2.6

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$(-\infty,-1)$	-2	$(-2)^2-3(-2)-4=6$	+
$(-1,4)$	0	$(0)^2-3(0)-4=-4$	–
$(4,\infty)$	5	$(5)^2-3(5)-4=6$	+

La solución es el intervalo donde la expresión cuadrática es negativa:

$(-1,4)$ que coincide con el resultado que encontramos anteriormente.

Ejemplo 81

Resolver la siguiente desigualdad:

$$|1-4x| \leq 2$$

Solución

Primero, recurrimos a la propiedad (II):

$$|1-4x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 1-4x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -4x \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{-4} \geq x \geq \frac{1}{-4}$$

Como podemos observar, en el último paso las desigualdades cambian de sentido por haberse dividido entre -4, que es un número negativo.

La desigualdad $\frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{1}{4}$ es equivalente a $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$. Por tanto, la solución es el intervalo:

$$\left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

Por una de las propiedades del valor absoluto tenemos que $|1-4x| = |4x-1|$. Así que la solución también puede obtenerse como sigue:

$$|1-4x| = |4x-1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 4x-1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 4x \leq 3 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$$

Recordemos que también es posible elevar al cuadrado y resolver la desigualdad cuadrática resultante como en la sección anterior.

Ejemplo 82

Resolver la inecuación:

$$|3x-2| \geq 4$$

Solución

En este caso, utilizamos el resultado (IV) anterior:

$$|3x-2| \geq 4 \Rightarrow 3x-2 \geq 4 \text{ o } 3x-2 \leq -4 \Rightarrow 3x \geq 6 \text{ o } 3x \leq -2 \Rightarrow x \geq \frac{6}{3} = 2 \text{ o } x \leq -\frac{2}{3}$$

La "o" entre ambas desigualdades significa que los conjuntos solución se unen. Por tanto, la solución de la desigualdad es:

$$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [2, \infty)$$

Figura 2.37

Ejemplo 83

Encontrar el conjunto solución de:

$$|8x+11|>15$$

Solución

De acuerdo con el resultado (III), tenemos:

$$|8x+11|>15 \Rightarrow 8x+11>15 \text{ u } 8x+11<-15 \Rightarrow 8x>4 \text{ u } 8x<-26 \Rightarrow x>\frac{4}{8} \text{ o } x<-\frac{26}{8}$$

$$\Rightarrow x>\frac{1}{2} \text{ o } x<-\frac{13}{4}$$

El conjunto solución es la unión de los intervalos encontrados:

$$\left(-\infty, -\frac{13}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Figura 2.38

Ejemplo 84

Resolver las siguientes desigualdades:

a) $|x+6|<-3$

b) $|x+6|\geq -3$

Solución

a) En este caso, no es posible utilizar el resultado (I), como en el ejemplo 80, porque el número a la derecha del valor absoluto es negativo. Por la definición de valor absoluto, para cualquier valor de x (real), $|x+6|$ es un número mayor o igual que cero, por lo que nunca puede ser menor o igual que un número negativo, como lo es el -3. De esta manera, concluimos que la desigualdad no tiene solución, el conjunto solución es el conjunto vacío: $\varnothing$.

b) En este caso, observamos, igual que en el inciso anterior, que ninguno de los resultados (I) a (IV) se puede utilizar, dado que el número a la derecha es negativo en nuestro caso. Sabemos que para cualquier valor de x, la expresión $|x+6|$ es mayor o igual que cero, por lo que siempre es mayor que un número negativo, en este caso el -3. En otras palabras, esta desigualdad se cumple para cualquier número real x, por lo que el conjunto solución es el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 85

Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $|4-x| > -6$

b) $|4-x| \leq -6$

Solución

Lo primero que debemos observar en este caso es que los resultados (I) a (IV) no se pueden aplicar, debido al signo negativo del número a la derecha de las desigualdades. En segundo término, advertimos que para cualquier valor real de x, la expresión $|4-x|$ es mayor o igual que cero.

a) La desigualdad tiene como solución cualquier número real, porque la cantidad positiva o cero, $|4-x|$, siempre es mayor que cualquier número negativo. De esta manera, el conjunto solución es el intervalo:

$$(-\infty, \infty)$$

b) La desigualdad no tiene solución, porque un número mayor o igual que cero no puede ser menor que un número negativo.

Ejemplo 86

Resolver las siguientes desigualdades:

a) $|2x-6| > 0$

b) $|2x-6| \geq 0$

c) $|2x-6| \leq 0$

d) $|2x-6| < 0$

Solución

La expresión $|2x-6|$ es mayor o igual que cero para cualquier valor de x. De hecho, podemos ser un poco más precisos: es cero solo para $x = 3$, como deducimos al resolver $|2x-6| = 0 \Rightarrow 2x-6 = 0 \Rightarrow x = 3$. Entonces, si $x \neq 3$, la expresión $|2x-6|$ es estrictamente positiva.

a) La desigualdad $|2x-6|>0$ se cumple si $x\neq 3$, el conjunto solución es:

$$(-\infty,3)\cup(3,\infty)$$

b) La desigualdad $|2x-6|\geq 0$ se cumple para cualquier número real x. Por tanto, el conjunto solución es el intervalo: $(-\infty,\infty)$

c) La desigualdad $|2x-6|\leq 0$ se cumple solo para la igualdad con cero, que sabemos tiene como conjunto solución un número: $x=3$.

d) La desigualdad $|2x-6|<0$ nunca se cumple, ya que como mencionamos antes, la expresión $|2x-6|$ siempre es mayor o igual que cero, el conjunto solución es el conjunto vacío: $\varnothing$.

Otras desigualdades

La técnica propuesta para resolver desigualdades cuadráticas, se puede generalizar fácilmente para resolver desigualdades dadas por polinomios de mayor grado o funciones racionales mayores, menores, mayores o iguales y menores o iguales que cero. La clave es tener las raíces de cada polinomio. Cuando esto sea posible, la solución de la desigualdad se encuentra al dividir, mediante las raíces, la recta numérica en intervalos y determinar el signo del polinomio en cada intervalo, tal como se hizo al resolver desigualdades cuadráticas.

Ejemplo 87

Resolver las siguientes desigualdades:

a) $(x-3)(x+1)(x-1)(x+2)\geq 0$

b) $(x-3)(x+1)(x-1)(x-2)<0$

Solución

Como el polinomio ya está factorizado, sus raíces ya están determinadas: $x=3$, $x=-1$, $x=1$ y $x=-2$. Estas raíces dividen la recta numérica en cinco intervalos (cerrados, porque la desigualdad no es estricta para el inciso a y abiertos para el inciso b). Entonces, debemos calcular el signo del polinomio para un valor en cada intervalo, que no sea el extremo del mismo.

Tabla 2.7

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$(-\infty,-2]$	-3	$(-3-3)(-3+1)(-3-1)(-3+2)=48$	+

$[-2, -1]$	-1.5	$(-1.5-3)(-1.5+1)(-1.5-1)(-1.5+2)=-2.8$	$-$
$[-1, 1]$	0	$(0-3)(0+1)(0-1)(0+2)=6$	$+$
$[1, 3]$	2	$(-3-3)(-3+1)(-3-1)(-3+2)=-12$	$-$
$[3, \infty)$	4	$(-3-3)(-3+1)(-3-1)(-3+2)=90$	$+$

a) La solución de esta desigualdad corresponde a la unión de los intervalos (cerrados), donde el signo es positivo:

$$(-\infty, -2]\cup[-1, 1]\cup[3, \infty)$$

b) Para este caso, elegimos los intervalos (abiertos) con signo negativo:

$$(-2, -1)\cup(1, 3)$$

Ejemplo 88

Resolver la desigualdad:

$$x^3 \leq 7x+6$$

Solución

Primero, acomodamos la desigualdad como:

$$x^3-7x-6\leq 0$$

Ahora, factorizamos el polinomio del lado izquierdo de la desigualdad:

$$x^3-7x-6=(x-3)(x+2)(x+1)$$

Así que sus raíces son $x=3, x=-2$ y $x=-1$, las cuales dividen la recta numérica en cuatro intervalos, en los cuales determinamos el signo:

Tabla 2.8

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$(-\infty, -2]$	-3	$(-3-3)(-3+2)(-3+1)=-12$	$-$
$[-2, -1]$	-1.5	$(-1.5-3)(-1.5+2)(-1.5+1)=1.125$	$+$
$[-1, 3]$	0	$(0-3)(0+2)(0+1)=-6$	$-$
$[3, \infty)$	4	$(4-3)(4+2)(4+1)=30$	$+$

Entonces, la solución es el conjunto:

$$(-\infty, -2]\cup[-1, 3]$$

Ejemplo 89

Resolver las siguientes desigualdades:

a) $\dfrac{x+3}{x-2} \leq 0$

b) $\dfrac{x+3}{x-2} > 0$

Solución

Las raíces del numerador y denominador son, respectivamente, $x = -3$ y $x = 2$, las cuales dividen la recta numérica en tres intervalos. En el caso del cociente, el denominador no puede ser cero, por lo que los intervalos donde esté su raíz, $x = 2$, deben ser abiertos. Los otros intervalos son cerrados porque la desigualdad no es estricta. De manera similar a los ejemplos anteriores, evaluamos en un punto en cada intervalo para determinar el signo:

Tabla 2.9

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$(-\infty, -3]$	-4	$\dfrac{-4+3}{-2-2} = \dfrac{1}{4}$	+
$[-3, 2)$	0	$\dfrac{0+3}{0-2} = -\dfrac{3}{2}$	−
$(2, \infty)$	3	$\dfrac{3+3}{3-2} = 6$	+

a) La solución es el intervalo:

$$[-3, 2)$$

b) El conjunto solución es:

$$(-\infty, -3)\cup(2, \infty)$$

Los intervalos son abiertos porque la desigualdad es estricta.

Ejemplo 90

Resolver las siguientes desigualdades:

a) $\dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 3} > 0$

b) $\dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 3} \leq 0$

Solución

Las raíces del numerador son $x = -2$ y $x = 3$, y la raíz del denominador es $x = \dfrac{3}{2}$. Estos números dividen en cuatro intervalos la recta numérica. Como siempre, evaluamos en un punto interior del intervalo para determinar el signo:

Tabla 2.10

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$(-\infty, -2)$	-3	$\dfrac{(-3)^2-(-3)-6}{2(-3)-3}=-\dfrac{2}{3}$	$-$
$\left(-2, \dfrac{3}{2}\right)$	0	$\dfrac{(0)^2-(0)-6}{2(0)-3}=2$	$+$
$\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$	2	$\dfrac{(2)^2-(2)-6}{2(2)-3}=-4$	$-$
$(3, \infty)$	4	$\dfrac{(4)^2-(4)-6}{2(4)-3}=\dfrac{6}{5}$	$+$

a) De la tabla, podemos observar que el conjunto solución es:

$$\left(-2, \frac{3}{2}\right) \cup (3, \infty)$$

Los intervalos son abiertos porque la desigualdad es estricta.

b) La desigualdad no es estricta, pero solo se incluyen las raíces del numerador (intervalo cerrado), ya que la raíz del denominador no puede incluirse, porque indetermina la expresión. Por tanto, la solución es el conjunto:

$$(-\infty, -2] \cup \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

Ejemplo 91

Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x+1}{x-2}<3$

b) $\dfrac{x+1}{x-2}\geq 3$

Solución

a) Lo primero que debemos tomar en cuenta es tener una desigualdad con cero de un lado, así que restamos 3 a cada lado y simplificamos:

$$\frac{x+1}{x-2}<3 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}-3<3-3 \Rightarrow \frac{x+1-3(x-2)}{x-2}<0 \Rightarrow \frac{7-2x}{x-2}<0$$

Las raíces son $x=\dfrac{7}{2}$ y $x=2$. En la tabla presentamos los intervalos y su signo. Los intervalos son abiertos porque la desigualdad es estricta.

Tabla 2.11

Intervalo	Valor de x	Sustitución	Signo en el intervalo
$(-\infty, 2)$	0	$\dfrac{7-2(0)}{(0)-2}=-\dfrac{7}{2}$	–
$\left(2, \dfrac{7}{2}\right)$	3	$\dfrac{7-2(3)}{(3)-2}=1$	+
$\left(\dfrac{7}{2}, \infty\right)$	4	$\dfrac{7-2(4)}{(4)-2}=-\dfrac{1}{2}$	–

Como podemos observar de la tabla 2.11, la solución es:

$$(-\infty, 2)\cup\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$$

b) En este caso, el procedimiento es similar. Primero, buscamos un cero de un lado de la desigualdad:

$$\frac{x+1}{x-2}\geq 3 \Rightarrow \frac{7-2x}{x-2}\geq 0$$

Así que la misma tabla sirve para los signos, la diferencia es que los intervalos son cerrados en $\dfrac{7}{2}$ y abiertos en 2.

Entonces, el conjunto solución es:

$$\left(2, \frac{7}{2}\right]$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 152 a 156 describe y dibuja los intervalos.

- **152.** $(1.8, \infty)$
- **153.** $(-\infty, 2]$
- **154.** $(2, 2.7]$
- **155.** $\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right)$
- **156.** $(-2, 2)$

En los ejercicios 157 a 165, dibuja y simplifica el conjunto dado.

- **157.** $(1.8, \infty)\cup(-\infty, 1.8]$
- **158.** $(-2, 2)\cap[0, \infty)$
- **159.** $(-3, 5]\cap[-1, 8]$
- **160.** $(-\infty, 3)\cup(-2, \infty]$
- **161.** $(0, 2)\cap[3, \infty)$
- **162.** $(-3, 5]\cup[-3, -1]\cup(1, 8)$
- **163.** $\{(-\infty, 3)\cup(-2, \infty]\}\cap(0, 4)$
- **164.** $(0, 2)\cap[-17, \infty)$
- **165.** $(-\infty, 5]\cup(-\infty, 3]$

En los ejercicios 166 a 176, resuelve la desigualdad lineal.

- **166.** $6 + 2x > 5$
- **167.** $2 - 5x \leq -5$
- **168.** $2 - 3x \geq 1 + 2x$
- **169.** $5(2+x) < \left(\frac{3x+1}{2}\right)$
- **170.** $2(1+3x) \geq 6x + 7$
- **171.** $\left(\frac{12x+1}{4}\right) < 3x + 5$
- **172.** $\left(\frac{2x+6}{2}\right) \leq \left(\frac{3x+1}{4}\right) + 1$
- **173.** $2(2+(5x+1)) \geq \left(\frac{x}{3}\right) - 3$

174. $\left(\frac{x}{4}\right)+3<\left(\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{x}{2}\right)$

175. $\left(\frac{3x}{4}\right)\geq\left(\frac{2x}{3}\right)+1$

176. $8(2-3x)-15\geq 0$

En los ejercicios 177 a 186, resuelve la inecuación cuadrática.

177. $x^2+4x-5<0$

178. $x^2-10x+24\geq 0$

179. $2x^2+3x+20\leq 3x^2+6x-8$

180. $\left(\frac{x^2}{3}\right)+2x>\left(\frac{x^2}{6}\right)+1$

181. $x^2-2x+11>0$

182. $x^2-4x+6\leq 0$

183. $9x^2+30x+25>0$

184. $9x^2-72x+144\leq 0$

185. $(2x+1)^2+1>4x^2+3x-1$

186. $x^2+x<-2$

En los ejercicios 187 a 199, resuelve la desigualdad con valor absoluto.

187. $|6x-4|\leq 17$

188. $|3-2x|>3$

189. $|x+2|+1\geq 4$

190. $|6x-1|+1<4$

191. $5-2|4x+3|\leq 6$

192. $4-3|3x-1|\geq 2$

193. $|x-1|<|5x+3|$

194. $|6x-7|\geq|3x-1|$

195. $\left(\frac{|x-9|}{2}\right)\leq|x+2|+1$

196. $|3x-8|\leq 0$

197. $|2-5x|>0$

198. $|9x-18|+4\geq 2$

199. $|2x+6|+17\leq 4$

En los ejercicios 200 a 210, encuentra el conjunto solución de la desigualdad.

200. $x^3-x^2-9x+9<0$

201. $x^3-3x^2-4x+12\geq 0$

202. $\left(\dfrac{x+9}{x-8}\right)\leq 0$

203. $\left(\dfrac{2x+6}{x-7}\right)\geq 0$

204. $\left(\dfrac{x+1}{2x-5}\right)+1<3$

205. $\left(\dfrac{x-2}{1-3x}\right)-2>4$

206. $x^3-5x^2-2x+30\leq 6$

207. $(x-1)(x-3)(x+2)(x+1)>0$

208. $\left(\dfrac{x^2-4}{x+1}\right)\leq 0$

209. $\left(\dfrac{2x-6}{x^2-4x-5}\right)\geq 0$

210. $\left(\dfrac{x^2-10x+24}{x^2-1}\right)>0$

211. Una microempresa vende x unidades de su producto a p pesos, donde $p = 1\,400 - 40x$. Encuentra cuántas unidades debe vender la microempresa para obtener ingresos mayores a $12 000.00.

Capítulo 3

Funciones y gráficas

Al final de este capítulo el alumno será capaz de:

- Conocer el plano cartesiano.
- Estudiar analítica y geométricamente el concepto de recta.
- Comprender el concepto de función.
- Graficar funciones básicas.
- Realizar operaciones con funciones.
- Encontrar funciones inversas.

Introducción

Las funciones son el concepto base del cálculo, así que un curso de *precálculo* es, en esencia, el estudio profundo de las funciones y todas las ideas y los conceptos que surgen alrededor de ellas. Muchas situaciones en la vida cotidiana se pueden modelar mediante una función, de ahí su gran importancia. Por ejemplo, en economía, la oferta y la demanda se representan con función (figura 3.1). Este capítulo es una introducción a las funciones y a sus gráficas, pues en capítulos posteriores se estudian diferentes tipos de funciones utilizando los conocimientos desarrollados en este capítulo.

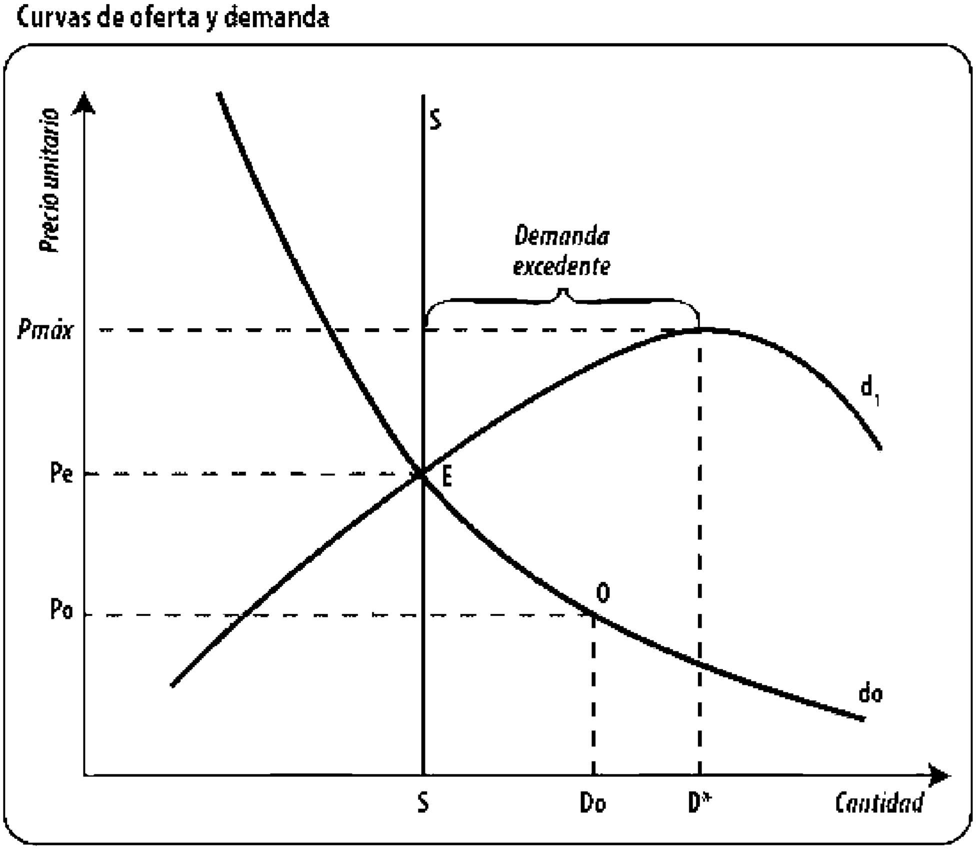


Figura 3.1 En economía, la oferta y la demanda son ejemplos de funciones.
Fuente: http://igomezc.blogspot.com/2010_09_01_archive.html

3.1 El plano cartesiano y gráficas de ecuaciones

Antes de comenzar el estudio propio de las funciones, es pertinente presentar el plano cartesiano y aprender a graficar ecuaciones en él. El plano cartesiano debe su nombre a su creador, el matemático y filósofo francés René Descartes (1595-1650). El plano cartesiano es una herramienta que a partir de aquí se usa en forma constante a lo largo de todo el libro.

El plano cartesiano (también llamado plano de coordenadas rectangulares) consiste en dos rectas reales perpendiculares; una horizontal, llamada eje x o eje de las abscisas, y otra vertical, llamada eje y o eje de las ordenadas. Ambas rectas se cruzan en un punto llamado *origen,* el cual se sitúa donde se encuentra el cero de ambas rectas. Al origen se le suele representar con la letra mayúscula O. El plano cartesiano (que de aquí en adelante solo se denominará como plano) se divide en cuatro cuadrantes, los cuales quedan separados por los ejes x y y, como se ve en la figura 3.2.

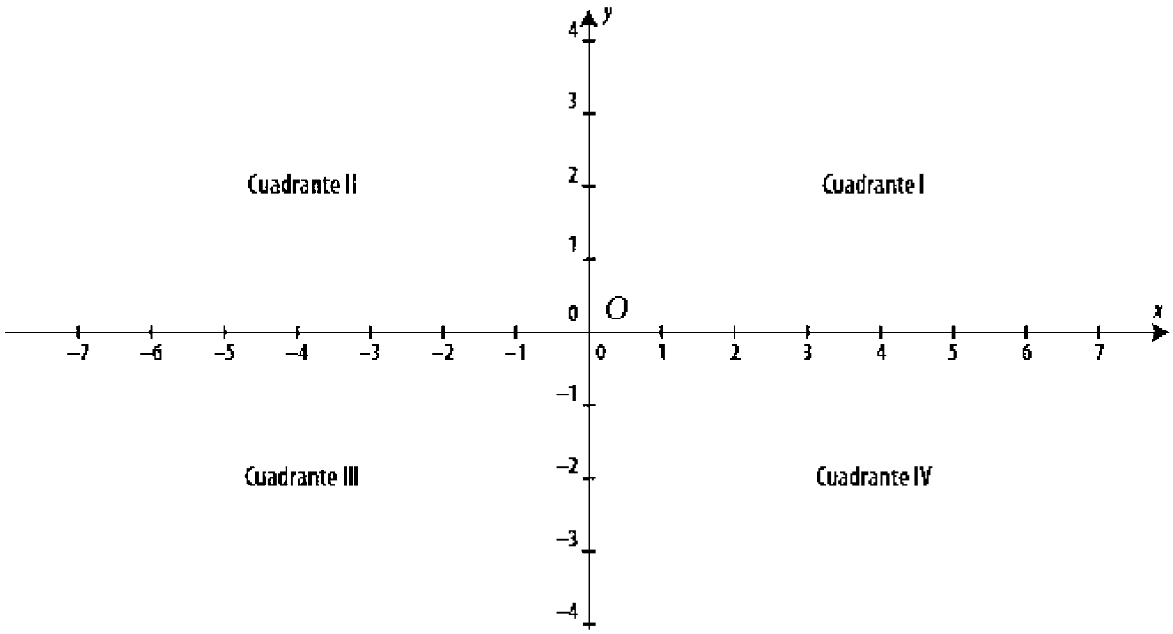


Figura 3.2 El plano cartesiano y sus cuadrantes.

En el plano se pueden ubicar puntos, cada uno de los cuales tiene dos coordenadas, la coordenada x y la coordenada y.

Por ejemplo el punto $(3, -2)$ tiene coordenada x (o abscisa) igual a 3 y coordenada y (u ordenada) igual a -2.

Ejemplo 1

Ubicar los puntos $A(-4, 3)$, $B(0, -2)$ y $C(2, -3)$ en el plano cartesiano.

Solución

De acuerdo con las coordenadas, los puntos dados se ubican en el plano como se muestra en la figura 3.3. Como podemos apreciar en la figura, el punto A está en el cuadrante II; el B no está en ningún cuadrante, ya que se halla sobre el eje y negativo, y el punto C se ubica en el cuadrante IV.

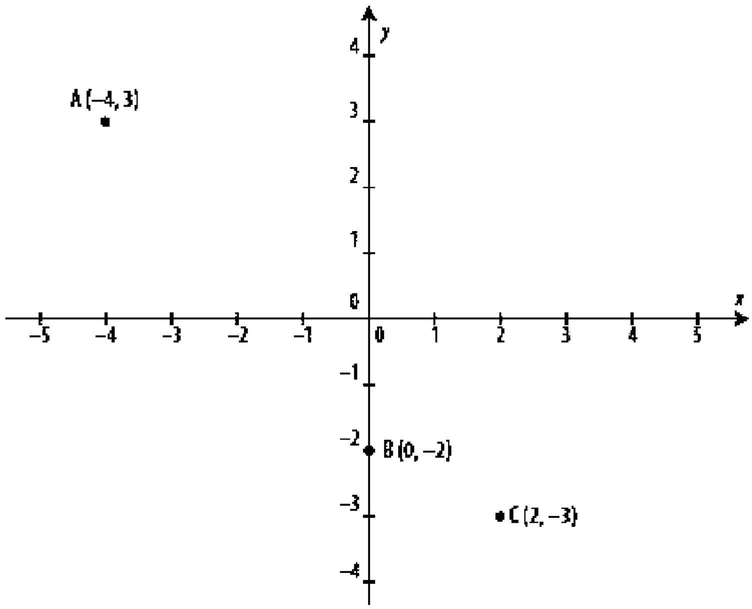


Figura 3.3 Posición de los puntos $A(-4, 3)$, $B(0, -2)$ y $C(2, -3)$ en el plano cartesiano.

Distancia entre dos puntos

Ahora, se obtendrá una fórmula que mide la distancia entre dos puntos en el plano. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera en el plano, para obtener la distancia entre ellos, primero se introduce un tercer punto, $C(x_2, y_1)$, para formar el triángulo rectángulo ABC, el cual se muestra en la figura 3.4. En esta figura, puede verse que el cateto $\overline{AC}$ mide $x_2 - x_1$ y el cateto $\overline{BC}$ mide $y_2 - y_1$. Entonces, por el teorema de Pitágoras, se tiene que la hipotenusa $\overline{AB}$, que es la distancia entre los puntos A y B, mide:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Esta es la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos cualesquiera A y B.

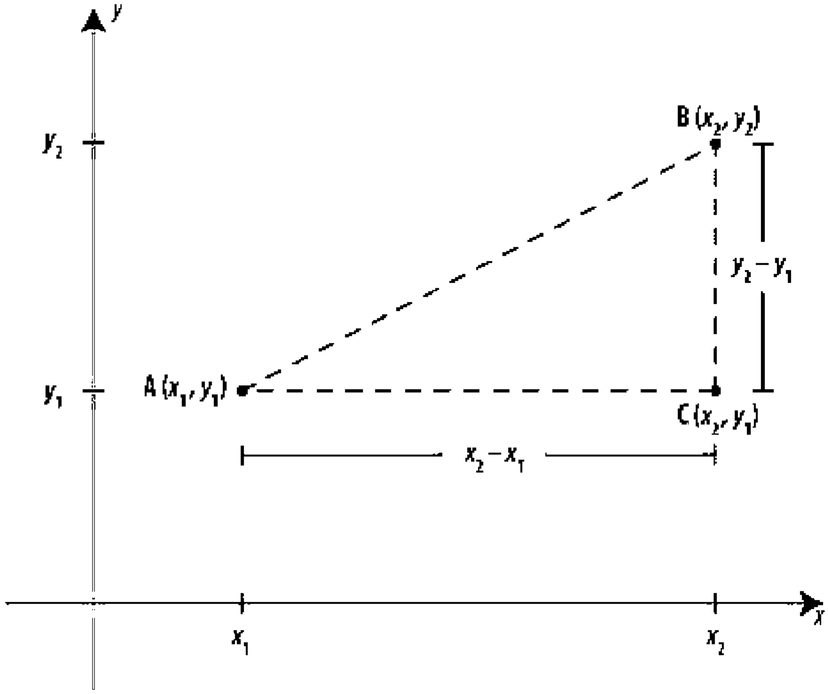


Figura 3.4 Determinación de la fórmula de la distancia entre dos puntos.

Ejemplo 2

Determinar la distancia entre los puntos $A(-4, 3)$ y $B(-2, -7)$.

Solución

Primero, aplicamos la fórmula que se acaba de deducir, se tiene que:

$$\overline{AB} = \sqrt{[-2-(-4)]^2 + (-7-3)^2} = \sqrt{2^2 + (-10)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104}$$

Se puede simplificar ese resultado si se observa que:

$$\sqrt{104} = \sqrt{4 \cdot 26} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{26} = 2\sqrt{26}$$

Para tener una idea más precisa del resultado, podemos aproximar el mismo con una calculadora. Entonces, obtenemos:

$$\overline{AB} = 2\sqrt{26} \approx 10.2$$

Punto medio

En algunos problemas de geometría es importante saber localizar el punto que se encuentra exactamente a la mitad de dos puntos. En este caso, de nuevo se consideran dos puntos cualesquiera en el plano, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, como se muestra en la figura 3.5. A partir de ahora, al punto medio entre A y B se le llamará $M(x, y)$. Por tanto, resulta indispensable encontrar fórmulas para las coordenadas del punto M, que se encuentren en términos de las coordenadas de los puntos A y B. En la figura 3.5 se puede observar que las distancias $x - x_1$ y $x_2 - x$ son iguales, ya que se supone que el punto M está exactamente a la mitad entre A y B. Entonces, se igualan esas distancias y se despeja x. Así:

$$x - x_1 = x_2 - x$$

$$x + x = x_2 + x_1$$

$$2x = x_1 + x_2$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Esta es la fórmula para obtener la coordenada x (abscisa) del punto medio. Ahora, usando el mismo razonamiento se puede obtener la fórmula para la coordenada y (ordenada), que es:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

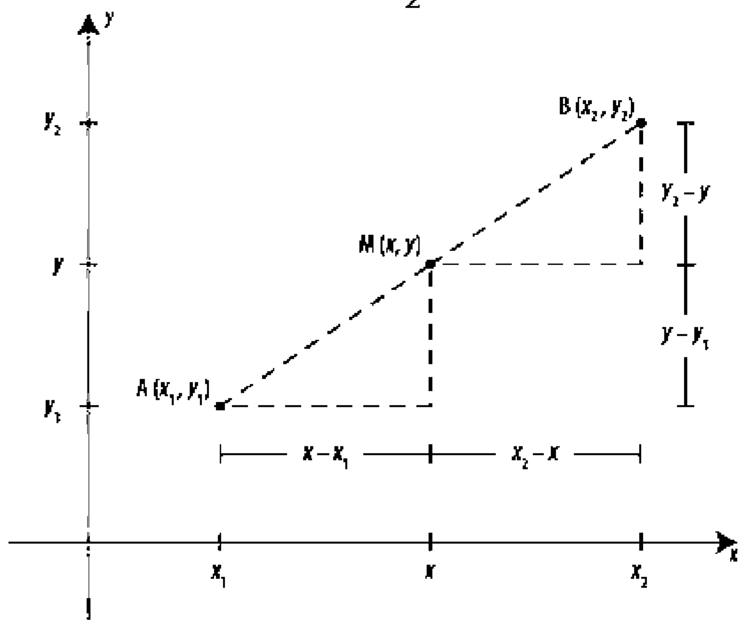


Figura 3.5 Determinación de la fórmula del punto medio entre dos puntos A y B.

Ejemplo 3

Encontrar el punto medio entre los puntos $A(5, 7)$ y $B(-2, 4)$.

Solución

Usamos las fórmulas para determinar el punto medio, se tiene que:

$$x=\frac{5+(-2)}{2}=\frac{5-2}{2}=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{7+4}{2}=\frac{11}{2}$$

Así, el punto medio M es:

$$M\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$$

Gráficas de ecuaciones

En el plano no solo es posible ubicar puntos, sino también se pueden graficar ecuaciones. Para trazar la gráfica de una ecuación, existen varios métodos; en esta sección se estudia el método más simple, el cual consiste en obtener puntos de la ecuación y luego unirlos (para formar la gráfica). Este método se conoce como tabulación.

Ejemplo 4

Trazar la gráfica de la ecuación $2y = x$.

Solución

Antes que nada, necesitamos hacer notar que únicamente podemos graficar en el plano (al menos por ahora) ecuaciones que tengan solo las variables x y y, que son las variables asociadas a los ejes del plano cartesiano. (En cursos posteriores de cálculo multivariable se estudian gráficas en tres dimensiones.)

Para obtener los puntos de la ecuación, siempre debemos tener alguna de las variables despejada. En este caso, en nuestra ecuación, la x ya está despejada, entonces debemos darle algunos valores a la y, y con la ecuación obtenemos los valores correspondientes para la x.

Luego, realizamos una tabla como la siguiente:

y	x
-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6

Entonces, interpretamos los valores de la tabla. Así, como ejemplo, retomamos el primer renglón de valores. Este nos dice que si $y = -3$, entonces:

$$x = 2y = 2(-3) = -6$$

Estos dos números forman un punto en el plano, el punto es $(-6, -3)$. Entonces, tenemos en total siete puntos en la tabla. Ahora, vamos a ubicar esos puntos en el plano y a unirlos con una línea, como se muestra en la figura 3.6. Como podemos observar, la gráfica resultante es una línea recta.

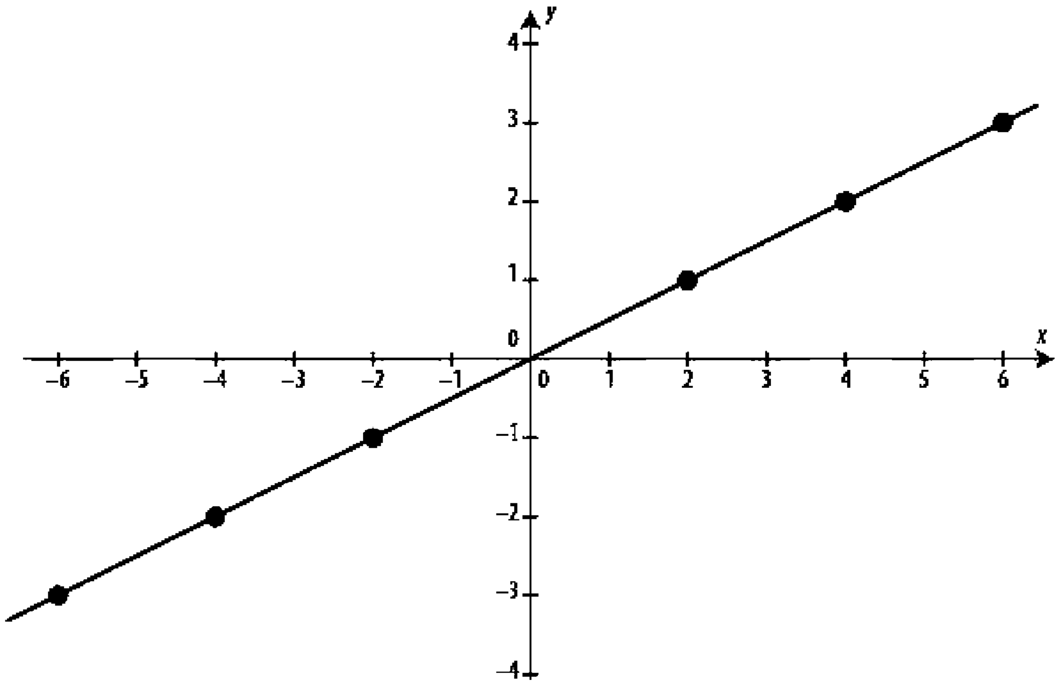


Figura 3.6 Gráfica de los puntos dados en la tabla anterior.

En este ejemplo fueron suficientes siete puntos para visualizar la forma de la gráfica; pero, en otros casos, pueden ser necesarios muchos más puntos para tener una idea precisa de cómo es la gráfica. Por tanto, este método no es muy eficiente para gráficas más complicadas. Más adelante se estudian otras técnicas de graficación.

Ejemplo 5

Graficar la ecuación $y = \sqrt{x+4} - 1$ usando el método de tabulación estudiado antes.

Solución

Como en este caso la variable y es la que está despejada, necesitamos darle valores a la variable x y luego obtendremos los valores correspondientes para y usando la ecuación dada. Alguien podría preguntarse: ¿qué valores debo asignarle a x? Por lo general, es recomendable empezar a asignar valores cercanos al origen, en este ejemplo vamos a darle valores enteros a x desde -5 hasta 5. Entonces, la tabla quedaría de la siguiente manera:

x	y
-5	No existe
-4	-1
-3	0
-2	$\sqrt{2}-1\approx 0.41$
-1	$\sqrt{3}-1\approx 0.73$
0	1
1	$\sqrt{5}-1\approx 1.24$
2	$\sqrt{6}-1\approx 1.45$
3	$\sqrt{7}-1\approx 1.65$
4	$\sqrt{8}-1\approx 1.83$
5	2

Es importante resaltar que cuando $x=-5$, $y=\sqrt{-5+4}-1=\sqrt{-1}-1$, pero este número no existe en los números reales. De hecho, para cualquier valor en el cual $x<-4$, la y no existe.

Al ubicar los puntos en el plano como en la figura 3.7, podemos ver que en este caso la gráfica no es una línea recta, más bien es una curva que va creciendo poco a poco, mientras x se hace más grande.

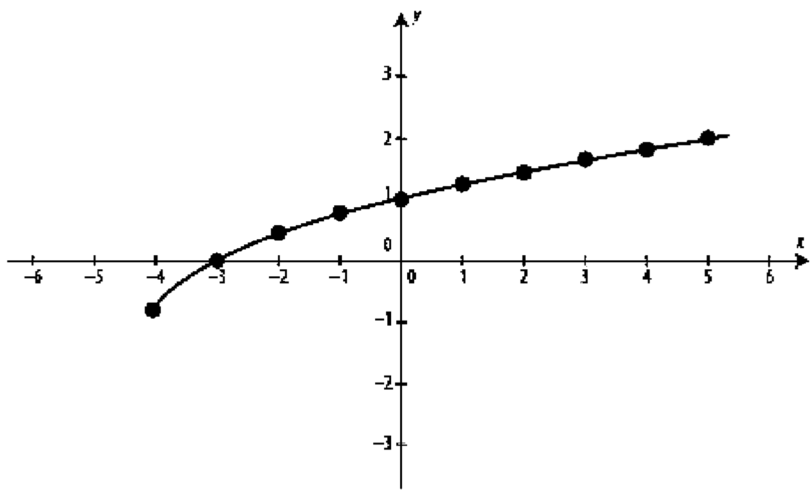


Figura 3.7 Gráfica de los puntos dados en la tabla anterior.

Intersecciones con los ejes

En la gráfica de una ecuación, existen algunos puntos importantes llamados intersecciones o cruces con los ejes, que son los puntos donde la gráfica toca o cruza a los ejes x y y. En el ejemplo anterior, estos puntos aparecen en la tabla. Así, el cruce con el eje x es el punto $(-3, 0)$ y el cruce con el eje y es el punto $(0, 1)$. Es importante hacer notar que los cruces en x tienen ordenada $y = 0$; y los cruces en y tienen abscisa $x = 0$. En general, una ecuación puede tener más de un cruce con el eje x o con el eje y, o puede no tener ningún cruce con los ejes.

Ejemplo 6

Encontrar las intersecciones con los ejes de la ecuación

$$3y = \frac{4}{x-1}$$

Solución

Como se mencionó antes del ejemplo, los cruces en x tienen ordenada $y = 0$. Por tanto, en este caso, en la ecuación sustituimos la y por 0, y queda:

$$3(0) = \frac{4}{x-1}$$

Luego despejamos x:

$$0 = \frac{4}{x-1}$$

$$0(x-1) = 4$$

$$0 = 4$$

Como podemos ver, al intentar despejar x, resulta una igualdad que no es verdadera, esto significa que la ecuación no tiene solución para x. Por consiguiente, esto nos indica que no hay cruce con el eje x.

Ahora, como vimos antes, los cruces en y tienen ordenada $x = 0$, así que esta vez sustituimos x por 0 en la ecuación y despejamos y:

$$3y = \frac{4}{0-1}$$

$$3y = \frac{4}{-1}$$

$$3y = -4$$

$$y = \frac{-4}{3}$$

De esta manera, podemos observar que el cruce con el eje y es en el punto:

$$\left(0, -\frac{4}{3}\right)$$

En este caso, no graficaremos esta ecuación, porque con el método de tabulación necesitaríamos muchos puntos para trazar una gráfica precisa. Más adelante se estudian otras técnicas para graficar este tipo de ecuaciones.

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 a 4, halla la distancia entre los dos puntos, así como su punto medio.

1. $A(5, 4), B(7, 2)$
2. $A(-9, 1), B(-3, -4)$
3. $A(6, -5), B\left(0, \frac{1}{2}\right)$
4. $A\left(-\frac{2}{3}, 1\right), B(2, 2)$
5. Demuestra que los puntos $A(1, -1), B(-2, -3)$ y $C\left(2, -\frac{23}{4}\right)$ son los vértices de un triángulo isósceles.
6. Demuestra que los puntos $A(1, 2), B(-2, -2)$ y $C\left(-5, \frac{1}{4}\right)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. (**Pista**: *usa el teorema de Pitágoras.*)

En los ejercicios 7 a 16, traza la gráfica de la ecuación usando el método de tabulación y determina las intersecciones con los ejes.

7. $y = -x + 3$
8. $y = 4$
9. $x = 3(y + 1)$
10. $y = \sqrt{2x}$
11. $y = x^2 - 1$
12. $x = -y^2$
13. $y = (x + 1)^3$
14. $2y = \sqrt[3]{x}$
15. $y = |x| + 1$
16. $x = |y^2 - 1|$

3.2 Rectas

En esta sección se estudia un tipo de ecuaciones particular y la manera de realizar sus gráficas, las cuales son muy utilizadas debido a que con estas se pueden modelar diversas situaciones de la vida cotidiana, además de que constituyen un concepto fundamental en el estudio del cálculo diferencial: las rectas.

En el ejemplo 4 de la sección 3.1 se graficó una recta cuya ecuación es $2y = x$. La ecuación de una recta puede contener tanto a x como a y, o solo a x, o solo a y; pero dichas variables siempre deben estar elevadas a la potencia 1. Por ejemplo, la ecuación $y = x^2 + 2$, no es una recta porque x está elevada al cuadrado.

Una característica muy importante de una recta es su pendiente, la cual constituye una medida de su inclinación. La pendiente de una recta se representa con la letra m y se define como:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Donde el símbolo Δ representa un *cambio*; de esta manera, la pendiente es el cociente del cambio en y, respecto del cambio en x, que hay entre dos puntos cualesquiera de una recta (véase la figura 3.8).

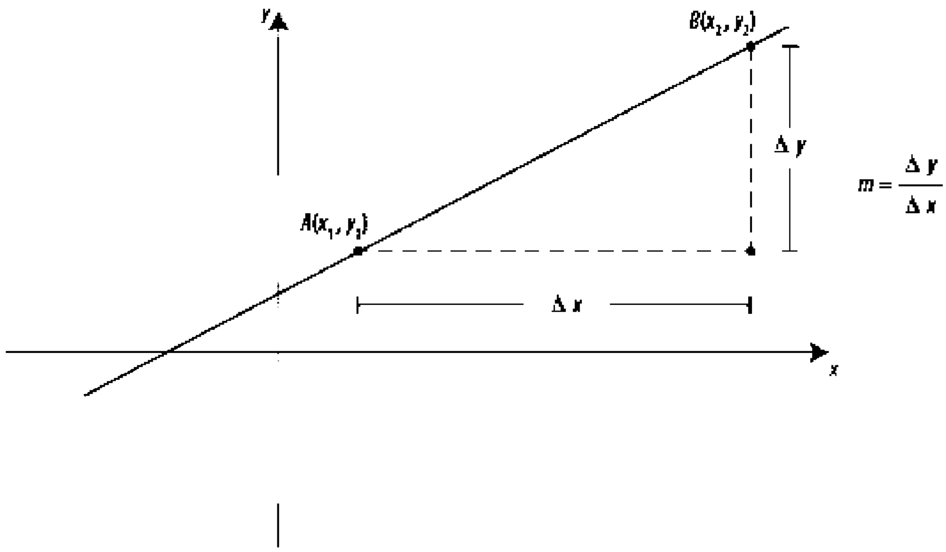


Figura 3.8 Definición de la pendiente de un recta.

Entonces, de acuerdo con los términos de las coordenadas de dos puntos que están sobre una recta, como los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la figura 3.8, la pendiente puede escribirse como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 7

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 9)$ y $B(2, 5)$.

Solución

En este caso, primero tomamos el punto A como el primer punto, es decir (x_1, y_1), y el punto B como el segundo punto, es decir (x_2, y_2), y luego aplicamos la fórmula de la pendiente. Así, tenemos que:

$$m = \frac{5-9}{2-(-3)} = \frac{-4}{2+3} = \frac{-4}{5}$$

El valor de esta pendiente significa que al moverse del punto A al punto B sobre la recta, hubo un cambio en x de 5 unidades y un cambio en y de -4 unidades, tal como podemos observar en la figura 3.9. En este caso, que el cambio en y sea negativo significa que al moverse de A a B, el desplazamiento en y es hacia abajo. Pero, si el cambio en y hubiera sido positivo, el desplazamiento habría sido hacia arriba. De forma análoga, los cambios positivos y negativos en x implican desplazamientos hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente, cuando se pasa de un punto a otro sobre la recta.

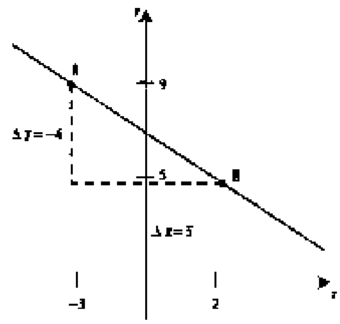


Figura 3.9

El valor de la pendiente m es independiente de cuál de los dos puntos se tome como punto A y cuál se tome como punto B. Esto es, el resultado siempre será el mismo.

Existen diversas formas en las que se puede escribir la ecuación de una recta, a continuación se listan las más importantes.

Tabla 3.1 Formas de la ecuación de una recta

Forma general	$Ax + By + C = 0$
Forma punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente-ordenada al origen	$y = mx + b$

En los siguientes ejemplos se ve cómo y cuándo usar estas formas de la ecuación de una recta.

Ejemplo 8

Escribir la ecuación de la recta $2x - y + 3 = 0$ en la forma pendiente-ordenada al origen.

Solución

En este caso, la ecuación está en la forma general, porque está igualada a cero. Podemos decir que esta forma es, en cierto sentido, la más elegante, aunque no es la más útil.

Como podemos notar, en la forma pendiente-ordenada al origen, la y está despejada; entonces, eso es todo lo que tenemos que hacer (despejar y), y nos queda:

$$y = 2x + 3$$

De esta manera ya tenemos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

Pero, ¿por qué se llama así? Su nombre se debe a que en esta forma podemos apreciar la pendiente de la recta, que es m, y la intersección de la recta con el eje y, que es b. También conocida como **ordenada al origen**.

Así, en este ejemplo podemos observar que $m = 2$ y $b = 3$.

Ejemplo 9

Graficar la ecuación de la recta del ejemplo 8.

Solución

Como ya sabemos graficar ecuaciones con el método de tabulación, pero en este caso vamos a utilizar la pendiente para trazar la gráfica de esta recta.

De esta manera, del ejemplo 8 tenemos que el cruce de la gráfica con el eje y es $b = 3$. Entonces, ubicamos el punto $(0, 3)$ en el plano. A partir de este punto, vamos a encontrar otros puntos usando la pendiente.

En este caso, sabemos que $m = 2$, aunque también podemos escribir que $m = \frac{2}{1}$, y como $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, entonces podemos decir que $\Delta y = 2$ y $\Delta x = 1$. Esto significa que a partir del punto $(0, 3)$, debemos desplazarnos dos unidades hacia arriba y una unidad a la derecha, lo cual nos lleva al punto $(1, 5)$.

Si hacemos lo mismo a partir del punto $(1, 5)$, ahora llegamos al punto $(2, 7)$, y así podemos seguir ubicando puntos.

Pero, la pendiente de esta recta también puede escribirse como:

$$m = \frac{-2}{-1}$$

De esta forma, tanto Δy como Δx son negativos, e interpretado de esta forma, esto significa que por cada unidad que nos desplacemos a la izquierda, tenemos que desplazarnos también dos unidades hacia abajo. Esto nos lleva al punto $(-1, 1)$ si se parte del cruce en y.

Ahora, al repetir el proceso, llegamos al punto $(-2, -1)$. Como hasta aquí ya tenemos cinco puntos en el plano, podemos considerar que estos son suficientes para unirlos con una línea recta y podemos trazar la gráfica (véase la figura 3.10).

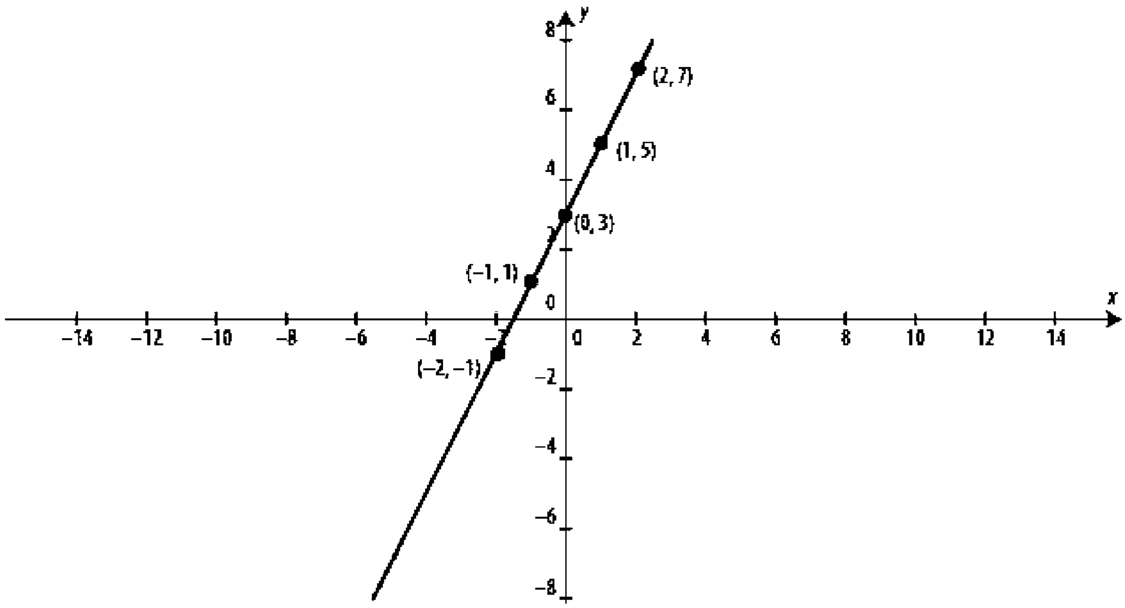


Figura 3.10 Gráfica de la recta $y = 2x + 3$.

Ejemplo 10

Escribir la ecuación en forma general de la recta que pasa por el punto $(2, 1)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{3}$.

Solución

En esta ocasión, el objetivo es escribir la ecuación de la recta en su forma general; no obstante, los datos que tenemos son solo un punto por el que pasa la recta y su pendiente. Por consiguiente, con esta información podemos usar la forma punto-pendiente, que se llama así precisamente porque solemos emplearla cuando conocemos cualquier punto por el que pasa la recta y su pendiente.

En la forma punto-pendiente, $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde (x_1, y_1) representa el punto por el que pasa la recta, y como siempre, m representa la pendiente.

Como en este ejemplo $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ y $m = -\frac{1}{3}$, entonces escribimos la ecuación en forma punto-pendiente y tenemos:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

Como podemos observar, esta ya es la ecuación de la recta; sin embargo, se nos pide expresarla en la forma general, que es cuando está igualada a cero, entonces debemos manipularla algebraicamente. Así tenemos que:

$$3(y-1)=-(x-2)$$

$$3y-3=-x+2$$

$$x+3y-3-2=0$$

$$x+3y-5=0$$

Y listo, ya tenemos la ecuación en su forma general.

Rectas paralelas y perpendiculares

Dos o más rectas son paralelas entre sí, si tienen la misma pendiente; por ejemplo, las rectas $y=-x+3$ y $y=-x-1$ son paralelas, porque la pendiente de ambas es $m=-1$. Como se recordará, en estas ecuaciones es posible ver rápidamente la pendiente, porque están escritas en forma pendiente-ordenada al origen. Las rectas que son paralelas nunca se tocan, como se ve en la figura 3.11, donde están graficadas las dos rectas que se acaban de citar como ejemplo.

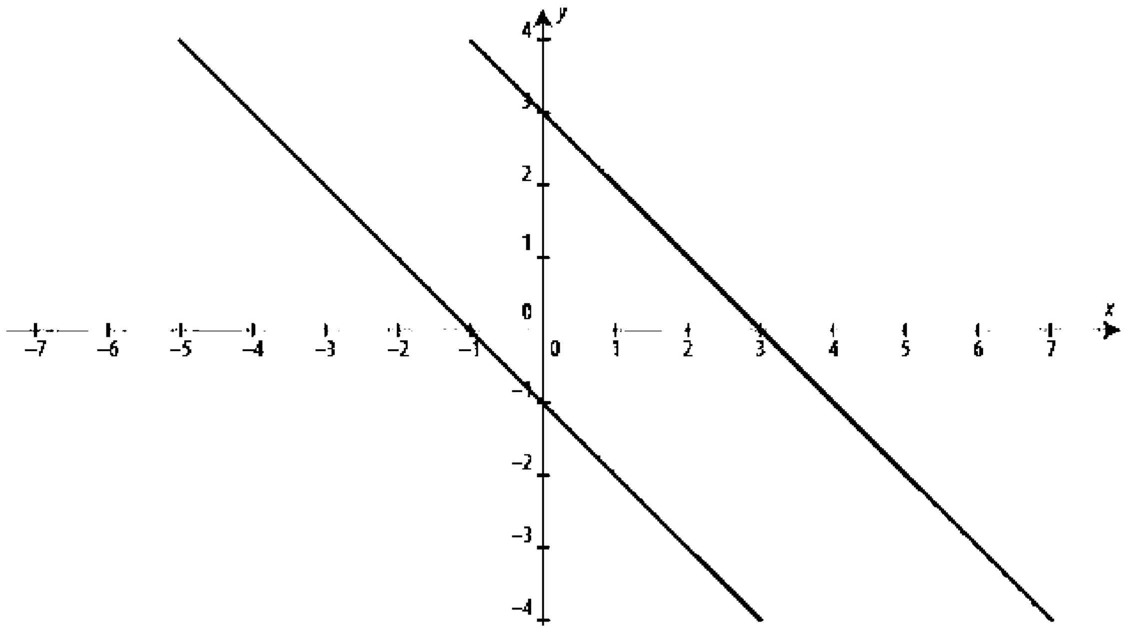


Figura 3.11 Gráfica de las rectas $y=-x+3$ (arriba) y $y=-x-1$ (abajo).

Dos rectas son perpendiculares entre sí, si el producto de sus pendientes es igual a -1. Es decir, si una recta tiene pendiente m_1 y otra recta tiene pendiente m_2, para que sean perpendiculares debe cumplirse que $m_1 m_2=-1$; es decir, $m_2=\frac{-1}{m_1}$.

Ejemplo 11

Determinar si las rectas $4x + 3y - 4 = 0$ y $6x - 8y + 1 = 0$ son perpendiculares.

Solución

En este caso, para saber si las rectas son perpendiculares, primero debemos obtener las pendientes de ambas rectas escribiendo sus ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen.

Así, para la primera recta:

$$4x + 3y - 4 = 0$$

$$3y = -4x + 4$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

De esta manera, tenemos que:

$$m_1 = -\frac{4}{3}$$

Ahora, realizamos el mismo procedimiento para la segunda recta:

$$6x - 8y + 1 = 0$$

$$-8y = -6x - 1$$

$$y = \frac{6}{8}x + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$$

Para la segunda recta tenemos que:

$$m_2 = \frac{3}{4}$$

Entonces, $m_1 m_2 = -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right) = -1$; por tanto, podemos afirmar que ambas rectas son perpendiculares (véase la figura 3.12).

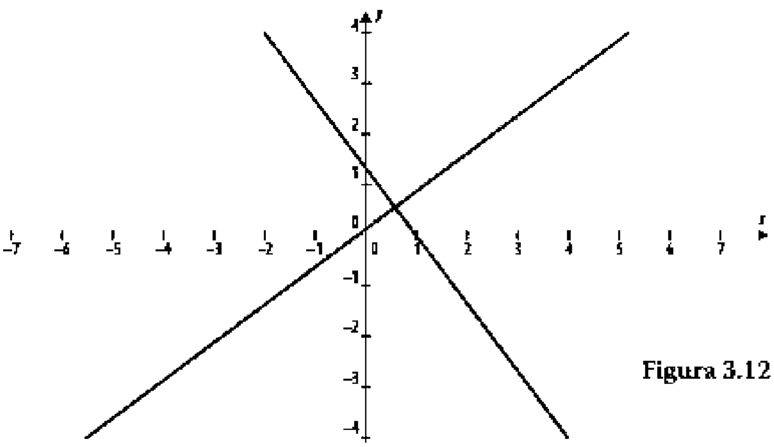


Figura 3.12 Gráfica de las rectas $y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ y $y = \frac{3}{4}x +$

Ejemplo 12

Determinar la ecuación en forma general de la recta que pasa por el punto $(-1, 6)$ y es paralela a la recta $6x - 2y = 9$.

Solución

Como la recta que buscamos es paralela a la recta que se da en el planteamiento, sus pendientes deben ser iguales. De esta manera, primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma pendiente-ordenada al origen, para poder obtener su pendiente. Así:

$$6x - 2y = 9$$

$$-2y = -6x + 9$$

$$y = 3x - \frac{9}{2}$$

Entonces, la pendiente de la recta dada es $m = 3$, la cual debe ser la misma pendiente para la recta que se quiere.

Como también tenemos el dato de un punto por el que pasa la recta, usamos la forma punto-pendiente para escribir su ecuación:

$$y - 6 = 3(x + 1)$$

Por último, hacemos un poco de álgebra para obtener la forma general:

$$y - 6 = 3x + 3$$

$$3x - y + 9 = 0$$

Rectas horizontales y verticales

¿Cuál es la ecuación de la recta horizontal que cruza el eje y, en $y = 3$? Para escribir su ecuación, primero es necesario conocer su pendiente. Para tal efecto, primero se pueden tomar dos puntos cualesquiera sobre esta recta, por ejemplo los puntos $A(1, 3)$ y $B(4, 3)$, y aplicar la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{3-3}{4-1} = \frac{0}{3} = 0$$

Una vez que se tiene la pendiente, se escribe la ecuación en la forma punto-pendiente usando el punto A:

$$y - 3 = 0(x - 1)$$

$$y - 3 = 0$$

Entonces, se tiene que la pendiente de una recta horizontal es cero, y se puede escribir la ecuación resultante como: $y - 3 = 0$. En forma pendiente-ordenada al origen queda:

$$y = 3$$

donde la gráfica de la recta cruza al eje y en $y = 3$.

Esta última ecuación indica que no importa cuánto valga x, y siempre será igual a 3, lo cual es cierto puesto que todos los puntos que están sobre esta recta tienen ordenada igual a 3.

Enseguida, es necesario realizar el mismo análisis para una recta vertical; por ejemplo, la recta vertical que cruza el eje x en $x = 3$.

Ahora, se toman dos puntos cualesquiera sobre la recta; por ejemplo, $A(3, 5)$ y $B(3, -2)$, y se halla la pendiente:

$$m = \frac{-2-5}{3-3} = \frac{-7}{0}$$

Pero, como se sabe que la división entre cero está indefinida, esto lleva a la conclusión de que una recta vertical no tiene pendiente.

Es importante resaltar que no debe confundirse el hecho de que la pendiente de una recta sea cero (rectas horizontales) con el hecho de que no exista la pendiente (rectas verticales). Pues, aunque una recta vertical no tenga pendiente, sí tiene ecuación. Así, en la recta que hasta ahora se ha citado como ejemplo, todos los puntos sobre esta tienen abscisa x igual a 3, por tanto esa resulta ser la ecuación: $x = 3$. La cual, en su forma general, se escribe como:

$$x - 3 = 0$$

Resulta importante destacar que la ecuación de una recta vertical no se puede escribir en la forma pendiente-ordenada al origen ni en la forma punto-pendiente, debido a que precisamente no hay pendiente.

Aplicaciones de las rectas

Los siguientes ejemplos ilustran cómo se pueden usar las rectas para modelar situaciones reales.

Ejemplo 13

Una empresa dedicada a la producción de lácteos vende un determinado tipo de leche a 10 pesos el litro. Cada semana, la empresa vende alrededor de 6 millones de litros de este tipo de leche. Un estudio de mercado calculó que si la empresa eleva el precio a 14 pesos el litro, solo venderá alrededor de 3 millones de litros por semana.

a) Hallar una ecuación que modele esta situación y que dé la cantidad de litros vendidos por semana de acuerdo con el precio fijado, suponiendo que la relación entre estas dos variables es lineal.

b) Si el precio del litro fuera de 11 pesos, ¿cuántos litros por semana se venderían?

c) ¿Qué conviene más a la empresa, dejar el precio en 10 pesos o cambiarlo a 11 pesos?

Solución

a) Para la solución de este inciso, podemos usar la ecuación de una recta, con el fin de modelar esta situación, ya que en el planteamiento se nos dice que podemos suponer que la relación entre el precio y la cantidad de litros es lineal, lo cual significa que la ecuación que relaciona a estas variables debe ser una recta. Para escribir dicha ecuación, primero debemos tener claras las variables. Esto es, nosotros queremos que el precio sea la variable *independiente*, porque de acuerdo con el precio que pongamos, la ecuación debe darnos la cantidad correspondiente de litros que se venden por semana.

En la forma pendiente-ordenada al origen de una recta, $y = mx + b$, x es la **variable independiente** y y es la **variable dependiente,** porque de acuerdo con el valor que le demos a x, la ecuación nos dará el valor de y. Entonces, para nuestro ejemplo, x debe representar el precio y y debe representar la cantidad de litros vendidos por semana. Sin embargo, en este ejemplo no usaremos las variables x y y, sino que las cambiaremos por p, para el precio, y l para la cantidad de litros vendidos por semana. De esta manera, la ecuación queda como sigue:

$$l = mp + b$$

En este caso, solo se nos da la información acerca de las cantidades de litros por semana que se venden con respecto a dos precios distintos; es decir, tenemos dos puntos, el punto $A(10, 6)$ (que dice que se venden 6 millones de litros a 10 pesos el litro) y el punto $B(14, 3)$ (que dice que se venden 3 millones de litros a 14 pesos el litro), donde la abscisa corresponde a p, el precio, y la ordenada corresponde a l, la cantidad de litros vendidos por semana (medida en millones). Con estos datos, podemos obtener la pendiente con la fórmula que ya conocemos, la cual hemos adaptado con las nuevas variables que elegimos:

$$m = \frac{l_2 - l_1}{p_2 - p_1} = \frac{3 - 6}{14 - 10} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Ahora, usando el punto A y la pendiente obtenida, escribimos la ecuación en forma punto-pendiente y finalmente la convertimos a la forma pendiente-ordenada al origen:

$$l - 6 = -\frac{3}{4}(p - 10)$$

$$l = -\frac{3}{4}p + \frac{30}{4} + 6$$

$$l = -\frac{3}{4}p + \frac{27}{2}$$

b) Si fijamos el precio en 11 pesos, la cantidad de litros vendidos por semana (en millones) será de:

$$l = -\frac{3}{4}(11) + \frac{27}{2} = -\frac{33}{4} + \frac{27}{2} = \frac{21}{4} = 5.25$$

Esto significa que si el litro de leche costara 11 pesos el litro, la empresa vendería 5.25 millones de litros a la semana.

c) Dado que el litro de leche se vende a un precio de 10 pesos, la empresa obtiene ingresos semanales de $10(6) = 60$ millones de pesos. Mientras que si la vendiera a un precio de 11 pesos el litro, el ingreso sería de $11(5.25) = 57.75$ millones de pesos. En apariencia, al menos en términos del ingreso, es mejor seguir vendiendo el litro de leche a un precio de 10 pesos. No obstante, habría que considerar otras variables, como el costo de producción, para poder tomar una decisión acertada. Sin embargo, este modelo constituye un buen parámetro de cara a una decisión importante para la empresa. Se deja como ejercicio para el lector calcular el ingreso, si el litro de leche se vendiera a un precio de 14 pesos.

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 17 a 26 escribe la ecuación, en forma general, de la recta que cumpla las condiciones dadas y traza su gráfica.

17. Pasa por $(4, -7)$, pendiente 3.

18. Pasa por $(-2, -3)$, pendiente -1.

19. Pasa por $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, pendiente $-\frac{2}{3}$.

20. Pasa por $\left(2, -\frac{3}{4}\right)$, pendiente 2.

21. Pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(-2, 0)$.

22. Pasa por los puntos $(7, -3)$ y $\left(0, \frac{2}{5}\right)$.

23. Tiene pendiente $-\frac{5}{6}$ y cruza al eje y en -3.

24. Tiene pendiente 9 y cruza al eje x en -1.

25. Tiene cruce en y en 6 y cruce en x en 3.

26. Tiene pendiente 1 y pasa por el punto medio entre los puntos $(4, 5)$ y $(3, 3)$.

En los ejercicios 27 a 32 escribe la ecuación, en forma pendiente-ordenada al origen, de la recta que cumple las condiciones dadas.

27. Pasa por $(2, 6)$ y es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

28. Pasa por $(1, -1)$ y es paralela a la recta $5x - y + 3 = 0$.

29. Pasa por $(4, -2)$ y es perpendicular a la recta $x - 2y + 5 = 0$.

30. Pasa por $(-3, 8)$ y es perpendicular a la recta $3x + 4y = 0$.

31. Pasa por $(-5, 3)$ y es paralela al eje x.

32. Pasa por $(4, 1)$ y es paralela al eje y.

33. Un bebé promedio pesa al nacer alrededor de 3 kg y al cumplir 12 meses de vida pesa alrededor de 8 kg.

a) Escribe una ecuación que dé el peso p del bebé de acuerdo con su edad t (en meses), suponiendo que la relación entre peso y edad es lineal.

b) ¿Cuál sería el peso del bebé al cumplir los 6 meses y medio de vida?

34. Una empresa adquirió equipo de oficina con un valor de 30 mil pesos. Al paso del tiempo, el equipo se depreciará, es decir, irá perdiendo su valor. Así, se estima que el valor del equipo después de 5 años será de 8 mil pesos.

a) Escribe una ecuación que dé el valor v del equipo de acuerdo con el tiempo t (en años) después de su compra, suponiendo que la depreciación es lineal.

b) ¿Cuál será el valor del equipo tres años después de ser adquirido?

c) ¿En qué momento el valor del equipo sería de cero pesos?

3.3 Definición de función

A partir de este momento se inicia el análisis y tratamiento de la idea más fundamental en el estudio del cálculo: las funciones.

Una función constituye *una regla* que asigna a cada elemento de un conjunto llamado dominio, solo un elemento de otro conjunto llamado rango o imagen.

Considérese como ejemplo la función "elevar al cuadrado". Esta función le asignará a cada número del dominio, su cuadrado; es decir, al 1 le asignará el 1, al 2 le asignará el 4, al -3 le asignará el 9, etcétera. ¿Cuáles son todos los elementos del dominio de esta función? Pues son todos los números que se puedan elevar al cuadrado; esto es, todos los números reales. ¿Cuáles son todos los elementos del rango? En este caso, son solo los números reales positivos y el cero, ya que cualquier número elevado al cuadrado da como resultado un número positivo o el cero. En notación de intervalos, se puede decir que el dominio para esta función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo $[0, \infty)$.

Esta función, "elevar al cuadrado", puede representarse con una ecuación. Si al dominio se le asigna la variable x y al rango se le asigna la variable y, entonces la ecuación de esta función sería:

$$y = x^2$$

Donde x representa cualquier número del dominio y y es el número del rango que le corresponde a dicho número del dominio. Es decir, si $x=\sqrt{2}$, entonces $y=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, o si $x=\frac{1}{3}$ entonces $y=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

En una función siempre hay una variable independiente y una variable dependiente. Por lo general, x siempre es la variable independiente y y es la variable dependiente. Tomando como ejemplo nuevamente la misma función, "elevar al cuadrado", x constituye la variable independiente, porque x puede tomar cualquier valor del dominio y de acuerdo a ese valor entonces y tomará su cuadrado. En una función, la variable dependiente siempre es la que representa al rango y la variable independiente es la que representa al dominio.

Ejemplo 14

Hallar el dominio y el rango de la función "obtener la raíz cuadrada" representada por la ecuación $y=\sqrt{x}$.

Solución

Nuevamente, como casi siempre sucede, en este caso x es la variable independiente y y es la variable dependiente. Entonces, el dominio son los valores que x puede tomar, es decir, cualquier número que tenga raíz cuadrada. Por tanto, después de realizar un análisis, podemos decir que el dominio serán todos los reales positivos y el cero, porque no es posible sacarle raíz cuadrada a un número negativo; de esta forma, el dominio de esta función es el intervalo $[0, \infty)$. Asimismo, podemos afirmar que el rango serán todos los números que dan como resultado la raíz cuadrada de los números del dominio, es decir, también son todos los reales positivos y el cero. Por tanto, en este caso el rango es igual al dominio; esto es: el intervalo $[0, \infty)$.

Ahora, se retoma la función "elevar al cuadrado". En este caso, ya se sabe que su ecuación es $y = x^2$, sin embargo, cuando se habla de funciones, hay una forma distinta de escribir las ecuaciones. De esta manera, esta ecuación, $y = x^2$, también puede escribirse como:

$$y(x) = x^2$$

Donde $y(x)$ no indica multiplicación.

En notación de funciones, $y(x)$ significa que la variable y *depende* de la variable x. Pero esta ecuación suele escribirse como:

$$f(x) = x^2$$

Donde f toma el papel de y. Asimismo, f también sirve como el nombre de la función. Aunque a esta función se le había llamado "elevar al cuadrado", esa es en realidad la regla matemática que dicta cómo asignar los valores del rango a los valores del dominio. Pero, en vez de f también se le podría dar el nombre de g, y así la ecuación de la función sería $g(x) = x^2$, lo cual no cambia la regla de "elevar al cuadrado", sino que lo único que cambiaría sería el nombre de la función.

A manera de ejemplo, ¿cómo se calcula el volumen de un cubo? Como ya es sabido, la fórmula para el cálculo del volumen de un cubo de lado a es $V = a^3$. Pues esta es una función que se puede escribir como $V(a) = a^3$, donde V es el volumen, la cual constituye la variable dependiente, y a es la medida de la arista, la cual constituye la variable independiente. Cuando aquí se hace referencia a "la función", en realidad se está haciendo referencia a la variable dependiente. Por ejemplo, en la función anterior del volumen de un cubo, si se pregunta: ¿cuándo esta función es mayor que 8?, en realidad se está preguntando: ¿cuándo el volumen es mayor que 8?

Al plantear la pregunta con la palabra "cuándo", en realidad se está haciendo referencia a lo siguiente: ¿con qué valores de la arista el volumen será mayor que 8? Después de un momento de análisis, se puede decir que esto sucede cuando $a > 2$.

Entonces, al plantear la pregunta: ¿cuándo será negativa la función $f(x) = x^2$? Lo que en realidad se está preguntando es: ¿cuándo será negativa f?, o ¿cuándo serán negativos los valores del rango? Es claro que esta función nunca será negativa, puesto que como ya se dijo antes, su rango es el intervalo $[0, \infty)$.

Ejemplo 15

Determinar el dominio y el rango de la función $f(x) = -|x|$, así como establecer cuándo es mayor que -1.

Solución

Como ya vimos antes, el dominio son todos los valores que puede tomar la variable independiente, es decir, x. En este caso son todos los reales, ya que cualquier número tiene valor absoluto. En tanto, para obtener el rango debemos observar que al obtener el valor absoluto de un número, el resultado siempre será positivo o cero; por tanto, enseguida debemos multiplicar ese resultado por -1. Así, finalmente tenemos que los valores del rango, o bien los valores de la función, siempre serán negativos o cero. Entonces, tenemos que el dominio es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo $(-\infty, 0]$.

Ya sabemos que los valores de la función son los reales negativos y el cero, así que los únicos valores de la función que sean mayores que -1 serán los valores del rango que estén en el intervalo $(-1, 0]$. La pregunta es: ¿para qué valores del dominio obtendremos este intervalo en el rango? La respuesta nos la dará resolver la desigualdad $-|x| > -1$. De la sección de desigualdades en el capítulo 2, sabemos que la solución es el intervalo $(-1, 1)$. Entonces, la función será mayor que -1 cuando $-1 < x < 1$.

Ejemplo 16

Hallar el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Solución

En este caso, tenemos una raíz cuadrada, al igual que en el ejemplo 14. Sabiendo que solo podemos obtener raíces cuadradas de números positivos o del cero, la condición que debe cumplirse es que $1 + x^2 \geq 0$. De nuestro estudio de desigualdades del capítulo 2, sabemos que la solución de esta desigualdad es el intervalo $[-1, 1]$ y, por tanto, este intervalo es el dominio de la función.

Ejemplo 17

Hallar el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{x}{4-x}$$

Solución

Como podemos observar, esta función es una suma de fracciones. Recuérdese que una fracción siempre estará indefinida cuando el denominador sea cero, porque no se puede dividir entre cero. Por tanto, los únicos números que no pueden estar en el dominio son los números que hagan cero a los denominadores. En el caso de la primera fracción, ese número es el 3 y en la segunda es el 4. Por tanto, el dominio escrito en notación de intervalos es:

$$(-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (4, \infty)$$

Evaluación de funciones

Evaluar una función no es más que encontrar el valor de la función para determinado valor de la variable independiente. Por ejemplo, si se tiene la función $g(x) = x^3 - 1$, evaluar la función en 2 significa determinar el valor de la función cuando $x = 2$; en otras palabras, es determinar el valor del rango que le corresponde al valor del dominio $x = 2$. Esto se escribe así: $g(2) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$; y se lee de la siguiente manera: "g evaluada en 2 es igual a 7".

Ejemplo 18

Si $h(x) = \frac{x-1}{x+3}$, evaluar: $h(1)$, $h(-1)$, $h(-3)$ y $h(a^2)$.

Solución

En este caso, solo sustituimos el valor indicado en todas las x de la función:

$$h(1)=\frac{1-1}{1+3}=\frac{0}{4}=0$$

$$h(-1)=\frac{-1-1}{-1+3}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$h(-3)=\frac{-3-1}{-3+3}=\frac{-4}{0}$$

$$h(a^2)=\frac{a^2-1}{a^2+3}$$

Como se puede observar, la tercera evaluación se trata de una división entre cero, la cual sabemos que es indefinida; esto significa que la función no existe cuando $x=-3$. Lo que significa que esto excluye al número -3 del dominio de esta función.

Modelado de funciones

Aquí se estudia la manera de construir funciones a partir del planteamiento de determinado problema. El objetivo será encontrar la función a partir de un planteamiento dado.

Ejemplo 19

Sea p el perímetro de un triángulo equilátero. Escribir una fórmula que dé el área, A, del triángulo en función de p.

Solución

La fórmula del área de un triángulo de base, b, y altura, h, es: $A=\frac{bh}{2}$. Como es sabido, esta es la fórmula que nos permite calcular el área de un triángulo cualquiera, en función de su base y altura, pero nosotros queremos que el área esté en función del perímetro para el caso particular de un triángulo equilátero. De esta manera, lo primero que tenemos que hacer es expresar tanto la base como la altura en términos del perímetro y luego sustituir estas expresiones en la fórmula original. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero cualquiera con perímetro p, como se muestra en la figura 3.13.

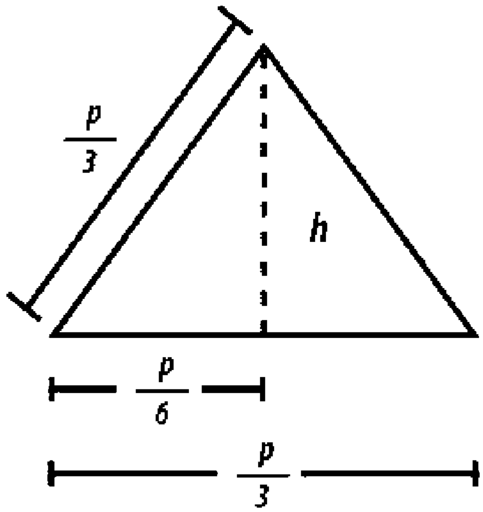


Figura 3.12 Triángulo equilátero de perímetro p.

Como podemos notar en la figura, la base del triángulo mide lo mismo que cualquiera de los lados del triángulo, es decir, un tercio del perímetro, ya que el triángulo es equilátero y todos sus lados miden lo mismo. Entonces, podemos escribir:

$$b = \frac{p}{3}$$

Ahora, enfoquémonos en el triángulo rectángulo que se forma al dividir el triángulo equilátero a la mitad. En este caso, los catetos de este triángulo rectángulo miden h y $\frac{p}{6}$, y su hipotenusa mide $\frac{p}{3}$. Siendo así, por el teorema de Pitágoras podemos escribir:

$$h^2 + \left(\frac{p}{6}\right)^2 = \left(\frac{p}{3}\right)^2$$

Luego, simplificamos y despejamos h:

$$h^2 = \frac{p^2}{9} - \frac{p^2}{36} = \frac{3p^2}{36}$$

$$h = \sqrt{\frac{3p^2}{36}} = \frac{\sqrt{3}p}{6}$$

Una vez que ya tenemos b y h en términos de p, solo sustituimos sus expresiones en la fórmula del área:

$$A(p) = \frac{\frac{p}{3}\left(\frac{\sqrt{3}p}{6}\right)}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}p^2}{18}}{2} = \frac{\sqrt{3}p^2}{36}$$

Ejemplo 20

Se desea construir una pecera rectangular sin tapa. Determinar:

a) Una fórmula que dé el área de todo el vidrio necesario para su construcción, en función del ancho de la base, si se quiere que el área de la base sea de 800 cm^2 y su altura sea de 30 cm.

b) ¿Cuál es el área del vidrio necesario si el ancho de la base es de 40 cm?

Solución

a) Lo primero que debemos hacer es escribir la fórmula que nos permita determinar esta área en términos de las variables necesarias. La figura 3.14 nos ayudará.

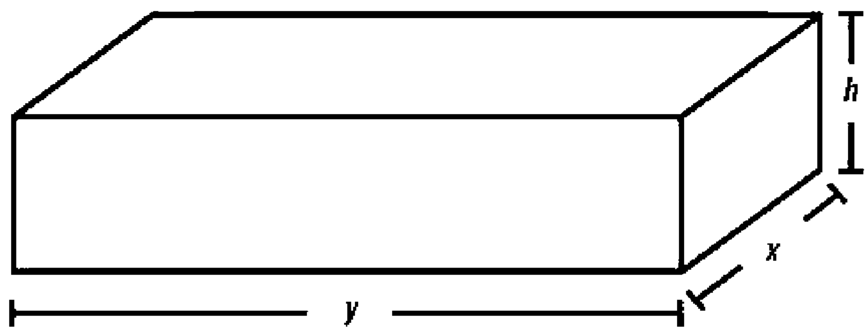


Figura 3.14 Prisma cuadrangular de largo y, ancho x y altura h.

Entonces el área total será la suma de las áreas de las cinco caras de la pecera, donde estas caras son rectángulos. Por tanto, en este caso, la fórmula del área es:

$$A = xy + 2xh + 2yh$$

Como ya sabemos, el área de la base debe ser 800 cm^2. De esta manera, tenemos que:

$$xy = 800$$

De esta ecuación podemos despejar y, así que:

$$y = \frac{800}{x}$$

Asimismo, sabemos que $h = 30$.

Ahora, debemos sustituir estas expresiones para y y para h en la fórmula que ya se estableció para calcular el área. Así:

$$A = xy + 2xh + 2yh$$

$$A(x) = 800 + 2x(30) + 2\left(\frac{800}{x}\right)30$$

Luego, simplificamos y nos queda:

$$A(x) = 800 + 60x + \frac{48\,000}{x}$$

b) Si el ancho de la pecera es de 40 cm, entonces el área será:

$$A(40) = 800 + 60(40) + \frac{48\,000}{40} = 800 + 2\,400 + 1\,200 = 4\,400 \text{ cm}^2$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 35 a 40, encuentra el dominio y el rango de la función.

35. $f(x) = 3x + 2$

36. $g(x) = x^2 + 1$

37. $h(x) = |x| - 2$

38. $f(x) = \sqrt{x+3}$

39. $F(x) = \sqrt{x} + 3$

40. $G(x) = \sqrt[3]{x}$

En los ejercicios 41 a 48, halla el dominio de la función.

41. $f(x) = \sqrt{3x+2}$

42. $g(x) = \sqrt[3]{3x+2}$

43. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

44. $T(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$

45. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{-x}} + \dfrac{x}{x^2 - 9}$

46. $g(x) = \sqrt[4]{x^2 + 2x - 3}$

47. $H(t) = \dfrac{5}{\sqrt{t^2 + 8t}}$

48. $f(z) = \dfrac{\sqrt{5-z}}{z^2 + 1}$

49. Escribe una fórmula que dé el área, A, de un cuadrado en función de su perímetro, P.
50. Escribe una fórmula que dé el perímetro, P, de un círculo en función de su área, A.
51. Escribe una fórmula que dé el volumen, V, de una esfera en función de su circunferencia, C.
52. Se va a construir una caja sin tapa a partir de una pieza rectangular de cartón de 16 cm de ancho y 20 cm de largo, cortando esquinas cuadradas de lado x y doblando las "pestañas" resultantes hacia arriba. Escribe una fórmula que dé el volumen de la caja en función de x y determina cuál sería el volumen de la caja si $x = 2$ cm.
53. Escribe una fórmula que dé el área total, A, de un cilindro en función de su altura, h, si su radio, r, es de 10 cm.
54. Un cilindro de radio r está inscrito en una esfera de radio $2r$. Escribe una fórmula que dé el volumen del cilindro en función de r.

3.4 Gráficas de funciones

Hasta aquí ya se ha estudiado cómo graficar ecuaciones, y en la sección anterior se vio que una función tiene una ecuación. Por esta razón, una función también se puede representar con una gráfica.

Todas las funciones con las que se trabajará, serán funciones de x; es decir, x siempre será la variable independiente, o al menos la variable independiente siempre se graficará en el eje de las abscisas. En este sentido, no cualquier gráfica será la gráfica de una función. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación $x = y^2$, que se muestra en la figura 3.15, *no* es una función de x, porque para cada valor de x hay dos valores de y; lo cual no puede suceder en una función si x va a representar al dominio. Como se recordará, en una función *a cada elemento del dominio le corresponde solo un elemento del rango.*

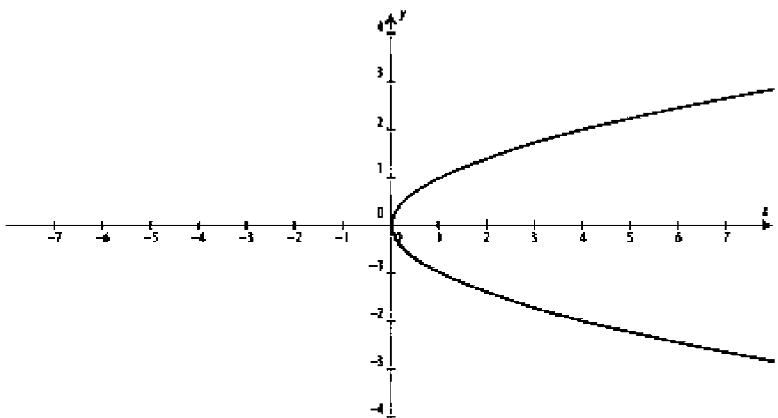


Figura 3.15

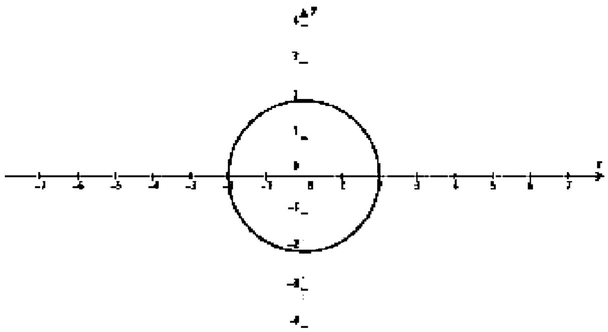
Sin embargo, esta gráfica podría considerarse una función de y, es decir, donde y sea la variable independiente y x la variable dependiente. Pero, como ya se dijo antes, para este libro (y en general para el estudio de funciones) las funciones siempre deberán tener como variable independiente a x (o a cualquier variable asociada al eje de las abscisas).

Es importante resaltar aquí que existe una prueba visual para identificar la gráfica de una función, que se conoce con el nombre de *Prueba de la Recta Vertical*, la cual dice que si una gráfica puede ser cruzada por cualquier recta vertical más de una vez, entonces esta no es una función.

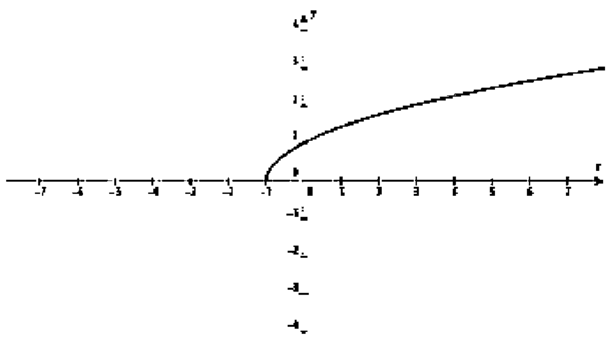
Ejemplo 21

Determinar si las siguientes gráficas son funciones.

a)



b)



c)

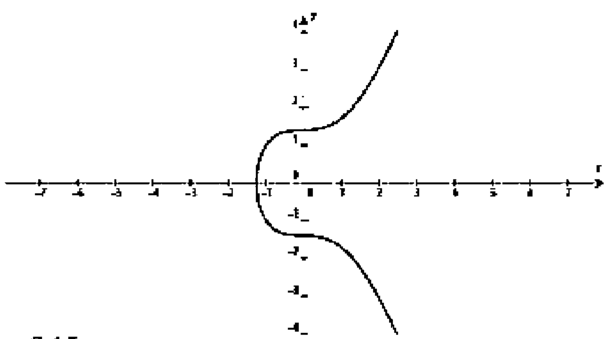


Figura 3.15

Solución

De estas tres gráficas, la primera y la tercera pueden ser cruzadas más de una vez por alguna recta vertical, como se muestra en la figura 3.17; por tanto, estas no son funciones. Sin embargo, esto no pasa en la segunda gráfica, la cual no puede ser cruzada más de una vez por ninguna recta vertical, así que esta sí es una función.

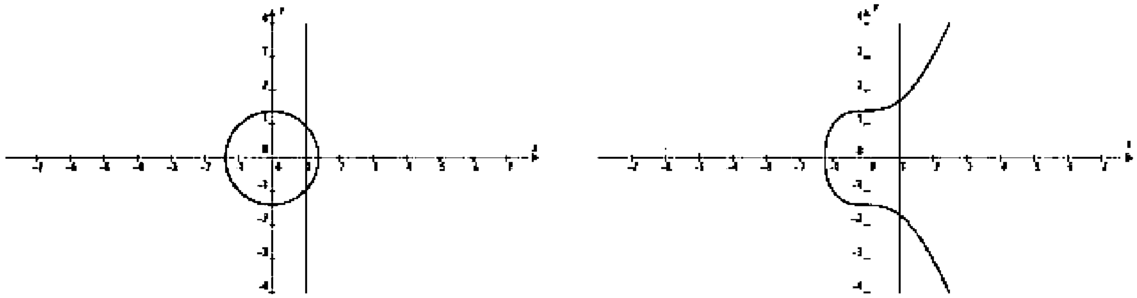


Figura 3.17 Gráficas de curvas que *no* son funciones.

En la sección 3.1 se estudió cómo realizar gráficas de ecuaciones simples usando el método de tabulación. Pero aquí se emplea otro método para graficar funciones con ecuaciones más complicadas.

A continuación se presentan las gráficas de algunas funciones básicas que se pueden graficar tabulando. Así, a partir de estas funciones básicas se elaborarán las gráficas de funciones más elaboradas. Se recomienda aprender de memoria estas gráficas y entender sus propiedades básicas.

$$f(x) = x$$

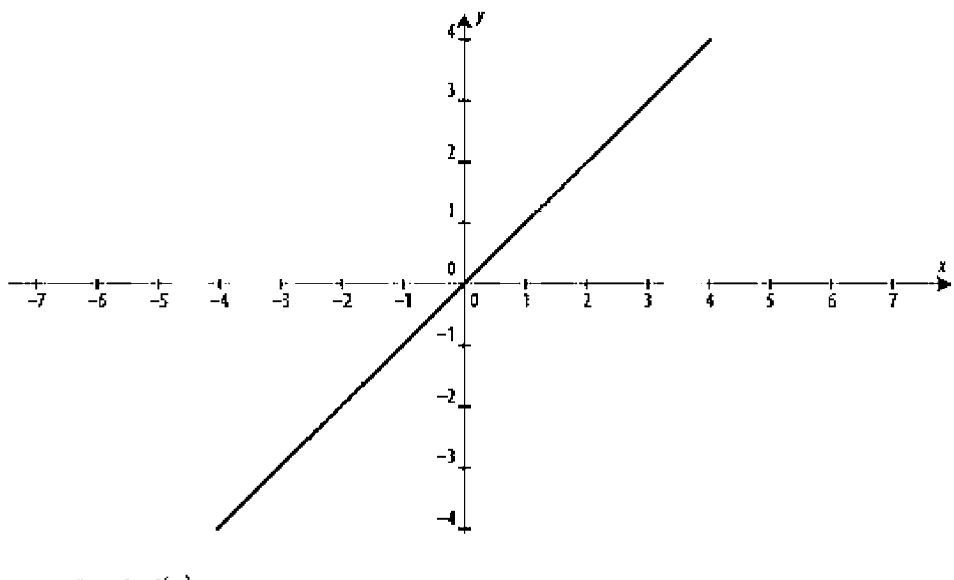


Figura 3.18 Gráfica de $f(x) = x$.

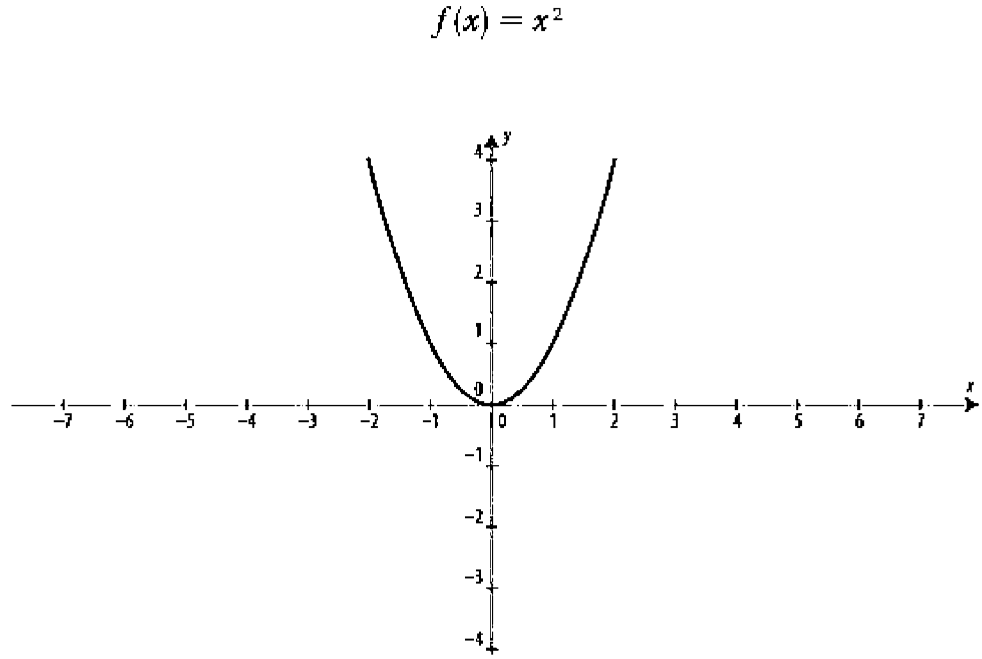


Figura 3.19 Gráfica de $f(x) = x^2$.

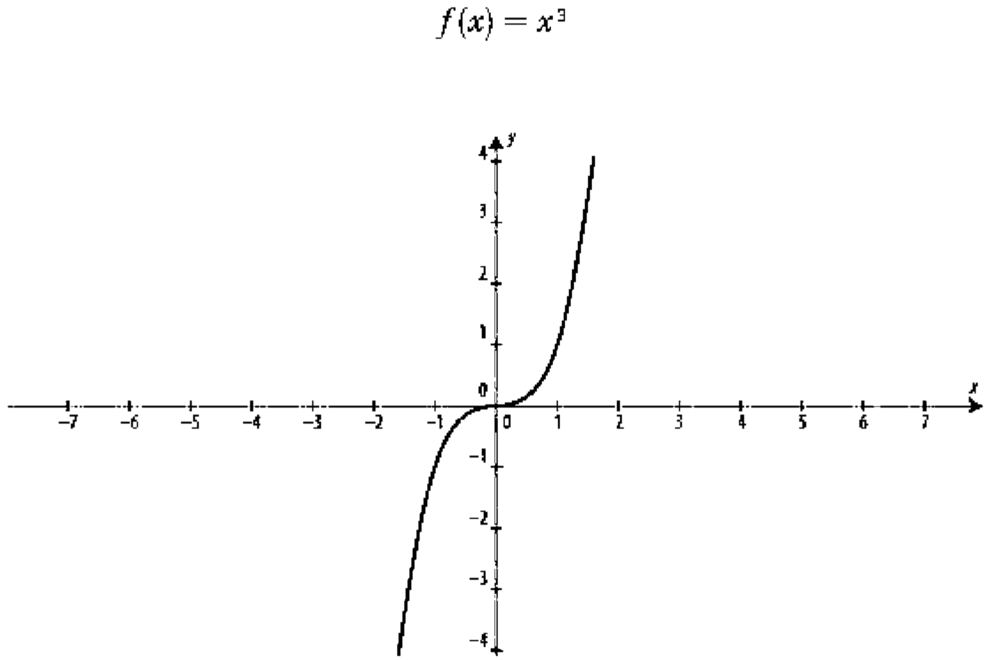


Figura 3.20 Gráfica de $f(x) = x^3$.

$f(x)=\sqrt{x}$

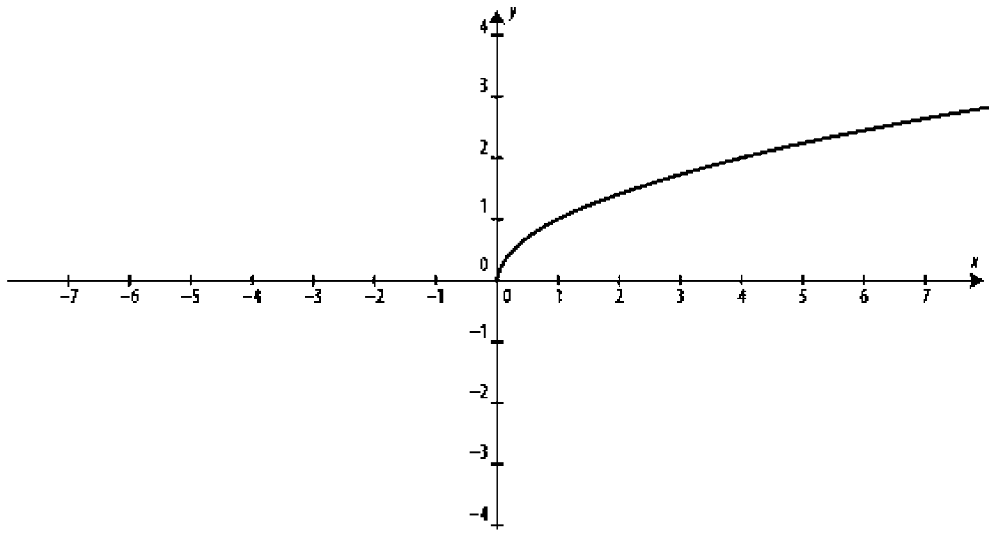


Figura 3.21 Gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$.

$f(x)=\sqrt[3]{x}$

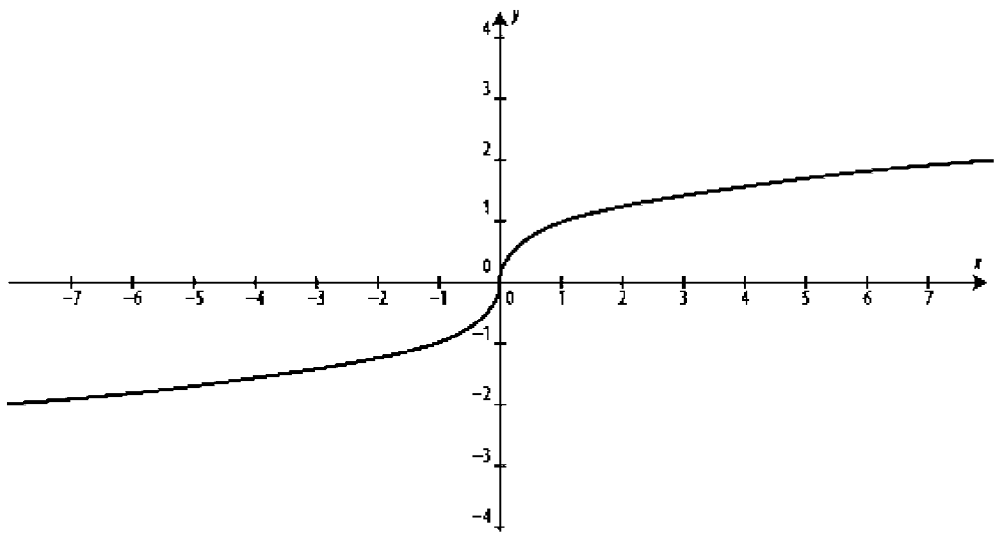


Figura 3.22 Gráfica de $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Graficación con transformaciones

Ahora es momento de estudiar la graficación de funciones mediante el método de transformaciones.

Como su nombre lo indica, este método consiste en partir de la gráfica de una función básica y transformarla. Las transformaciones que se utilizan en este método son estiramientos, encogimientos, reflexiones y desplazamientos. La tabla 3.2 resume estas transformaciones. Acto seguido se presentan algunos ejemplos para ilustrar su uso.

Tabla 3.2 Transformaciones de funciones

Transformación	Efecto sobre la gráfica de $f(x)$
1. $af(x)$ $a>1$	Se estira verticalmente en un factor de a.
2. $af(x)$ $0<a<1$	Se encoge verticalmente en un factor de a.
3. $f(ax)$ $a>1$	Se encoge horizontalmente en un factor de $\frac{1}{a}$.
4. $f(ax)$ $0<a<1$	Se estira horizontalmente en un factor de $\frac{1}{a}$.
5. $-f(x)$	Se refleja con respecto al eje x.
6. $f(-x)$	Se refleja con respecto al eje y.
7. $f(x)+a$ $a>0$	Se desplaza hacia arriba a unidades.
8. $f(x)-a$ $a>0$	Se desplaza hacia abajo a unidades.
9. $f(x+a)$ $a>0$	Se desplaza hacia la izquierda a unidades.
10. $f(x-a)$ $a>0$	Se desplaza hacia la derecha a unidades.
11. $\lvert f(x)\rvert$	La parte negativa de la función se refleja hacia arriba.
12. $f(\lvert x\rvert)$	La parte de la gráfica que está en el dominio positivo se copia hacia la parte negativa.

Ejemplo 22

Trazar la gráfica de la función:

$$f(x)=2x^2+1$$

Solución

En este caso, lo primero que tenemos que hacer es partir de la gráfica de la función básica:

$$f(x)=x^2$$

Luego, nuestra función se graficará con dos transformaciones: una debido al 2, que multiplica, y la otra por el 1, que suma. Cabe hacer notar aquí que el orden de las transformaciones es muy importante. Esto es, primero debemos hacer las transformaciones tomando en cuenta el orden de las operaciones que indica la ecuación de la función. En nuestro ejemplo, al valor de x^2 primero se le multiplicará por 2 y después se le sumará 1. Entonces, primero aplicaremos la transformación 1 de nuestra tabla, lo cual implica estirar la gráfica de $f(x) = x^2$ en un factor de 2. El efecto de esta transformación se aprecia en la figura 3.23.

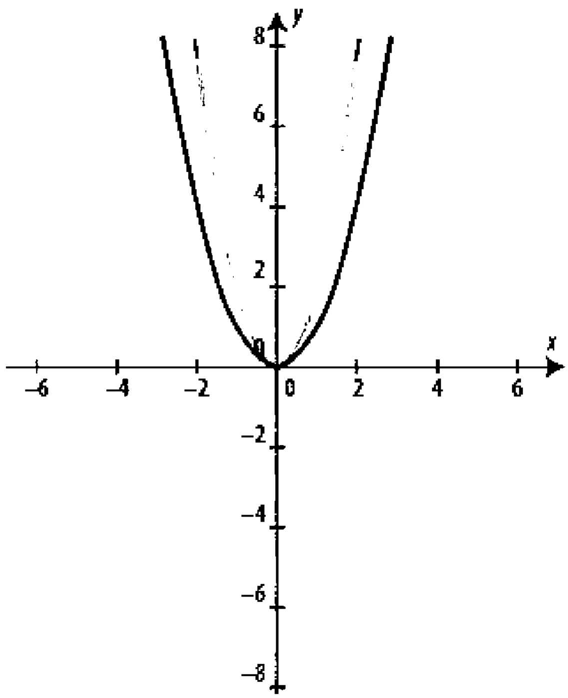


Figura 3.23 Gráficas de $f(x) = x^2$ (curva negra) y de $f(x) = 2x^2$ (curva gris).

Como se puede observar de la figura 3.23, la gráfica de $f(x) = x^2$ es la curva negra, mientras que la gráfica de $f(x) = 2x^2$ es la curva gris. Nótese que todos los puntos de la gráfica básica $f(x) = x^2$ se recorrieron al doble con respecto a su coordenada y. De esta manera, por ejemplo, el punto $(1, 1)$ ahora es el punto $(1, 2)$ y el punto $(2, 4)$ ahora es el punto $(2, 8)$; el único punto que no se movió fue el $(0, 0)$ porque su coordenada y es 0 y el doble de 0 es 0. Entonces, decimos que la gráfica de $f(x) = x^2$ se estiró al doble verticalmente; por tanto, el resultado es la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$.

Pero, aún falta aplicar otra transformación, debido al 1 que se suma en la ecuación $f(x) = 2x^2 + 1$, que es la transformación 7 de nuestra tabla, así lo que haremos será desplazar la gráfica de $f(x) = 2x^2$ un lugar hacia arriba, que nos da como resultado la gráfica final, que está marcada en gris claro en la figura 3.24.

Ahora, cada punto de la gráfica de $f(x) = 2x^2$ se movió hacia arriba una unidad; por ejemplo, el punto $(0, 0)$ ahora es el punto $(0, 1)$ y el punto $(-1, 2)$ ahora es el punto $(-1, 3)$; es decir, a la coordenada y de cada punto se le sumó 1.

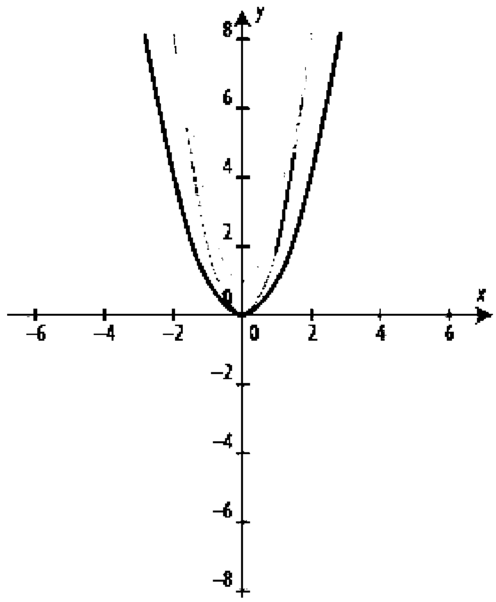


Figura 3.24 Gráficas de $f(x) = x^2$ (curva negra), de $f(x) = 2x^2$ (curva gris intermedia) y de $f(x) = 2x^2 + 1$ (curva gris clara o superior).

Ejemplo 23

Trazar la gráfica de la función:

$$f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{2x}$$

Solución

En este caso tenemos tres transformaciones, la primera debida al 2 que multiplica a x, la segunda por el $\frac{1}{3}$ que multiplica a la función $\sqrt{2x}$ y la tercera por el signo – (menos) que multiplica a la función $\frac{1}{3}\sqrt{2x}$.

Por tanto, partimos de la función básica $f(x) = \sqrt{x}$. Entonces, la primera transformación que debemos realizar es la número 3 de nuestra tabla para considerar el 2 que multiplica a x dentro de la raíz; el efecto será encoger horizontalmente la gráfica de $\sqrt{x}$ en un factor de $\frac{1}{2}$, lo cual se muestra en la figura 3.25.

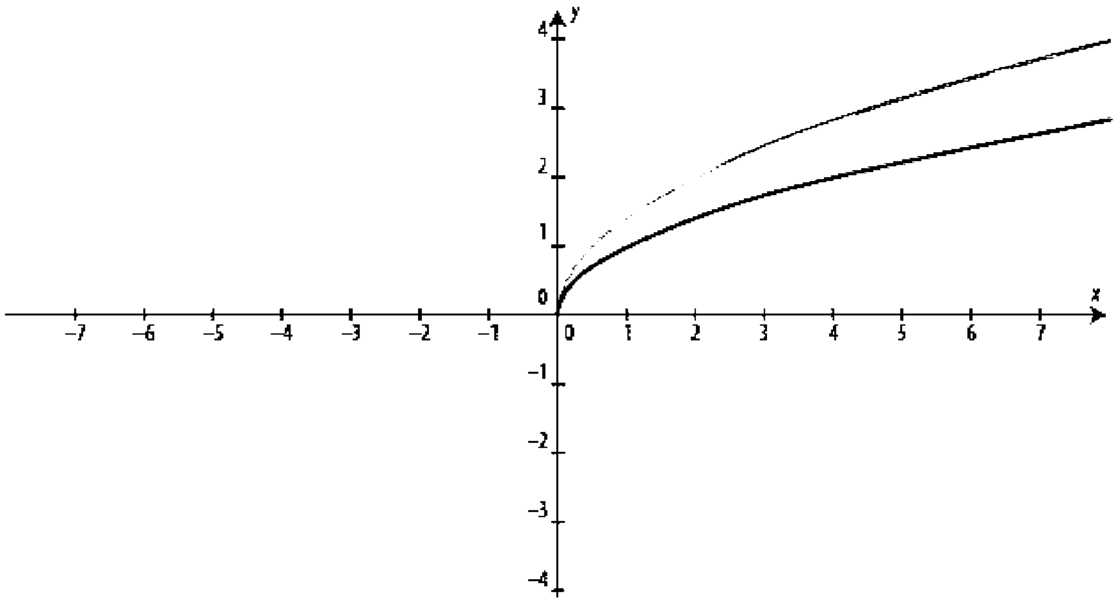


Figura 3.25 Gráficas de $f(x)=\sqrt{x}$ (curva inferior) y de $f(x)=\sqrt{2x}$ (curva superior).

La gráfica inferior corresponde a la de $\sqrt{x}$ y la gráfica superior corresponde a la de $\sqrt{2x}$. Como podemos observar, cada punto de la gráfica de $\sqrt{x}$ se recorrió horizontalmente a la mitad, con respecto a su coordenada x; de esta manera, el punto $(1, -1)$ cambió al punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y el punto $(4, 2)$ cambió al punto $(2, 2)$. Es decir, la coordenada x de cada punto de la gráfica de $\sqrt{x}$ se multiplicó por $\frac{1}{2}$, para obtener los nuevos puntos de la gráfica de $\sqrt{2x}$; esto es, se produjo un encogimiento horizontal de la gráfica.

La siguiente transformación, debida a $\frac{1}{3}$ que multiplica a $\sqrt{2x}$, es la número 2 de nuestra tabla; por tanto, el efecto será un encogimiento vertical de la gráfica de $\sqrt{2x}$, en un factor de $\frac{1}{3}$. Esto implica multiplicar la ordenada de cada punto de la gráfica de $\sqrt{2x}$ por $\frac{1}{3}$, lo cual resulta en la gráfica inferior (gris claro) que se muestra en la figura 3.26.

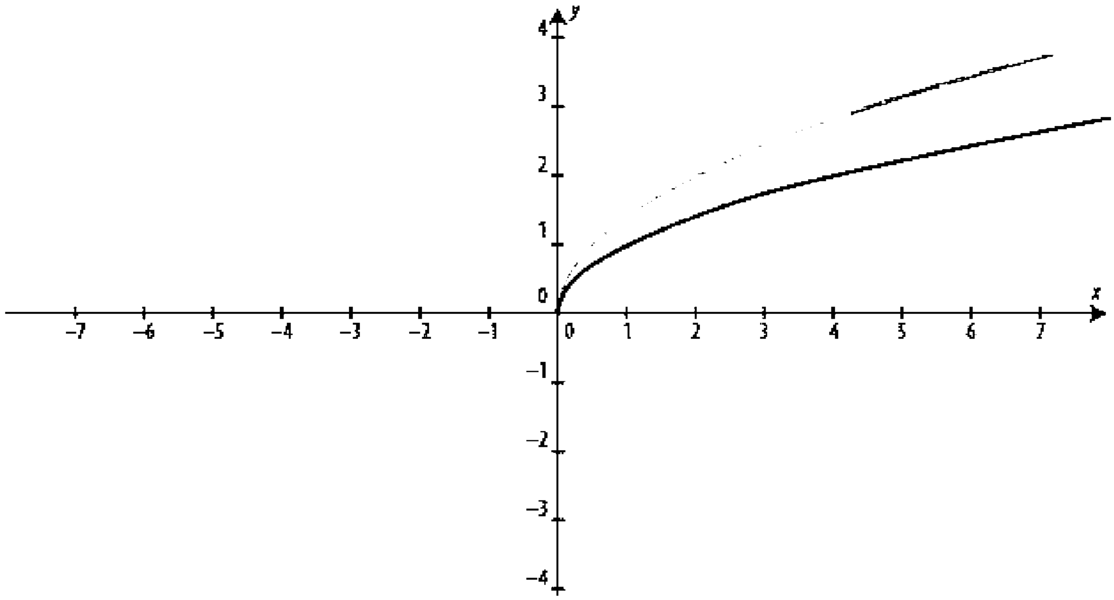


Figura 3.26 Gráficas de $f(x)=\sqrt{x}$ (curva intermedia) de $f(x)=\sqrt{2x}$ (curva superior) y de $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{2x}$ (curva inferior).

Como podemos comprobar, el punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ de $\sqrt{2x}$, ahora es el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, y el punto $(2, 2)$ en la gráfica de $\sqrt{2x}$, ahora es el punto $\left(2, \frac{2}{3}\right)$. Esto es un encogimiento vertical, como si la gráfica hubiera sido aplastada hacia el eje x.

Hasta aquí hemos notado que un estiramiento o un encogimiento vertical tiene un efecto en la ordenada de los puntos de una gráfica, mientras que un estiramiento o un encogimiento horizontal tiene un efecto sobre la abscisa de los puntos de la gráfica.

Aún falta la transformación debida al signo menos que multiplica a $\frac{1}{3}\sqrt{2x}$, que es la transformación 5 de nuestra tabla (se refleja con respecto al eje x); por tanto, el efecto es un reflejo de la gráfica de $\frac{1}{3}\sqrt{2x}$ con respecto al eje x. De esta manera, la gráfica final de $f(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{2x}$ se muestra en el cuadrante IV en la figura 3.27.

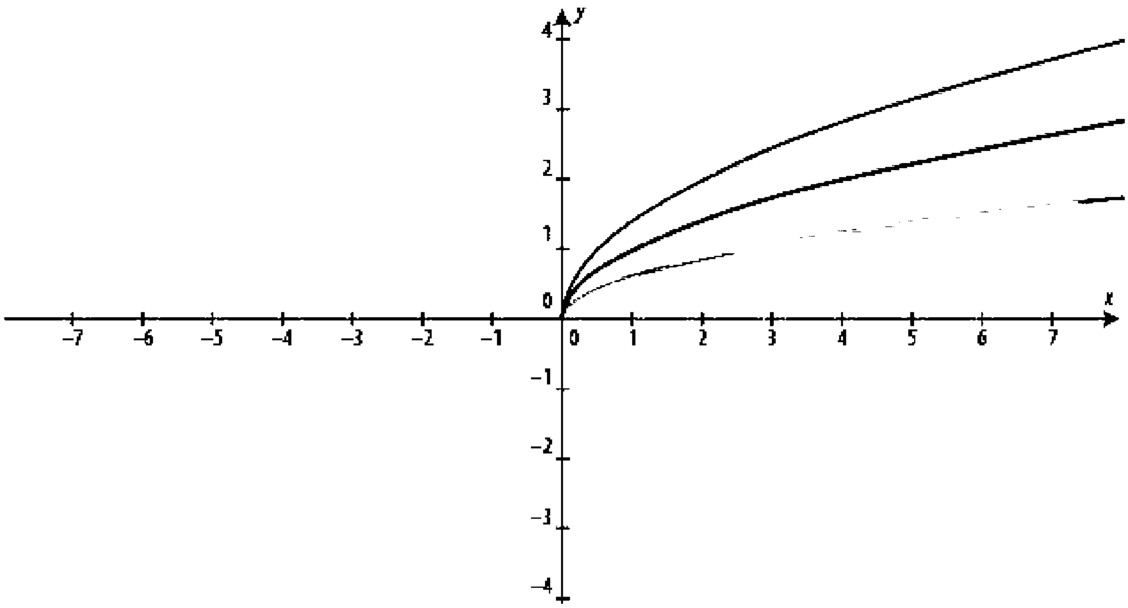


Figura 3.27 Gráficas de $f(x)=\sqrt{x}$ (curva intermedia en el primer cuadrante); de $f(x)=\sqrt{2x}$ (curva superior en el primer cuadrante); de $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{2x}$ (curva inferior en el primer cuadrante) y de $f(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{2x}$ (curva gris en el cuarto cuadrante).

Ejemplo 24

Trazar la gráfica de la función:

$$f(x)=\left(-\frac{1}{2}x\right)^3-2$$

Solución

Aquí partiremos de la gráfica de la función básica $f(x) = x^3$. En este caso (como en otros anteriores), nuevamente tenemos tres transformaciones: la primera, debida al $\frac{1}{2}$ que multiplica a la x; la segunda, debida al signo menos que multiplica a $\frac{1}{2}x$, y la tercera debida al -2 que se resta a $\left(-\frac{1}{2}x\right)^3$. Estas transformaciones son, respectivamente, las transformaciones 4, 6 y 8 de la tabla de transformaciones.

La figura 3.28 muestra las gráficas de las funciones resultantes después de aplicar estas transformaciones. Así, primero, en negro, tenemos la gráfica de x^3; después, en gris oscuro, encontramos la gráfica de $\left(\frac{1}{2}x\right)^3$, donde la transformación aplicada fue un estiramiento horizontal en un factor de 2; luego, en gris claro, tenemos la gráfica de $\left(-\frac{1}{2}x\right)^3$, donde se aplicó un reflejo respecto al eje y, y finalmente, en gris tenue, está la gráfica de $\left(-\frac{1}{2}x\right)^3 - 2$, que es la gráfica de $\left(-\frac{1}{2}x\right)^3$ desplazada hacia abajo 2 unidades.

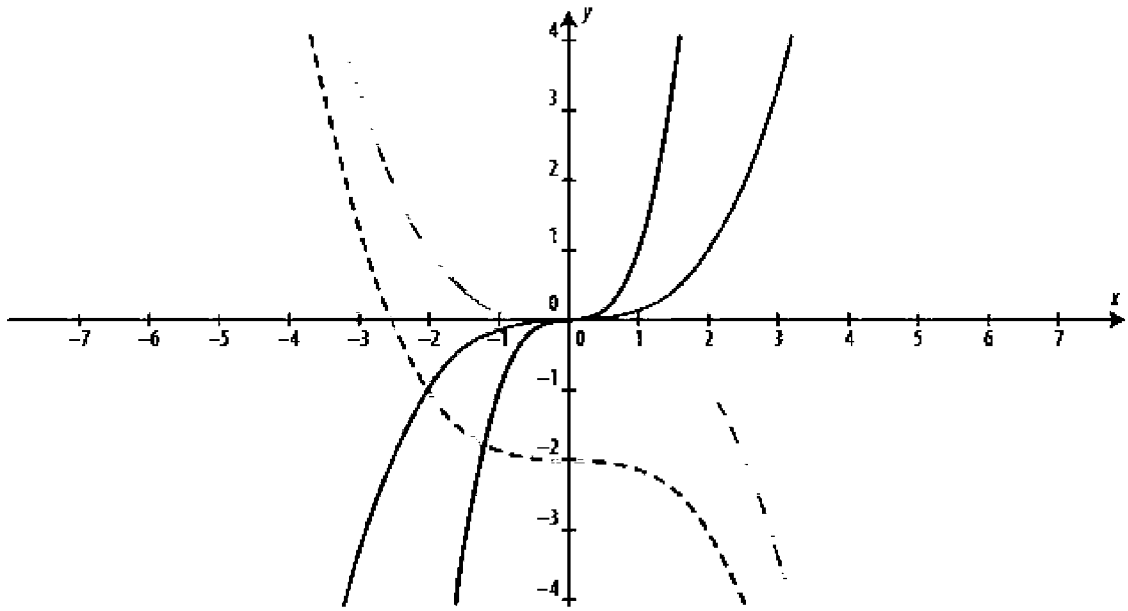


Figura 3.28 Gráficas de las funciones $f(x) = x^3$ (negro); de $f(x)=\left(\frac{1}{2}x\right)^3$ (gris oscuro); de $f(x)=\left(-\frac{1}{2}x\right)^3$ (gris claro), y de $f(x)=\left(-\frac{1}{2}x\right)^3-2$ (línea discontinua).

Ejemplo 25

Trazar la gráfica de la siguiente función:

$$g(x)=|x+2|$$

Solución

Ahora, partimos de la gráfica de la función básica $f(x) = x$. Por tanto, solo hay dos transformaciones. Primero, una traslación de dos unidades hacia la izquierda debida al 2 que se suma a x; esto es, la transformación 9 de la tabla (se desplaza hacia la izquierda a unidades). Luego, tenemos el valor absoluto, la transformación 11 de la tabla (la parte negativa de la función se refleja hacia arriba), cuyo efecto es un reflejo de la parte negativa de la función con respecto al eje x.

En la figura 3.29 podemos observar las gráficas de las funciones x y $x + 2$, en negro y gris, respectivamente. Nótese que, en este caso, mover la recta $y = x$ hacia la izquierda es lo mismo que subirla; esto solo pasa para la función $y = x$, porque sumarle a la función (transformación 7) es lo mismo que sumarle a la variable (transformación 9). De hecho, también pudimos haber graficado la función $x + 2$ como una recta; del estudio de la sección 3.2 sabemos que esta es una recta con pendiente 1 y ordenada al origen 2.

Por su parte, la figura 3.30 muestra, también en gris claro, la gráfica de $f(x) = |x+2|$. Esta gráfica es la misma que la de $f(x) = x + 2$ en el intervalo $(-2, \infty)$, que es donde $f(x) = x + 2$ es positiva; sin embargo, en el intervalo $(-\infty, -2)$ esta función es negativa, así que el efecto del valor absoluto es reflejar esta parte negativa hacia arriba.

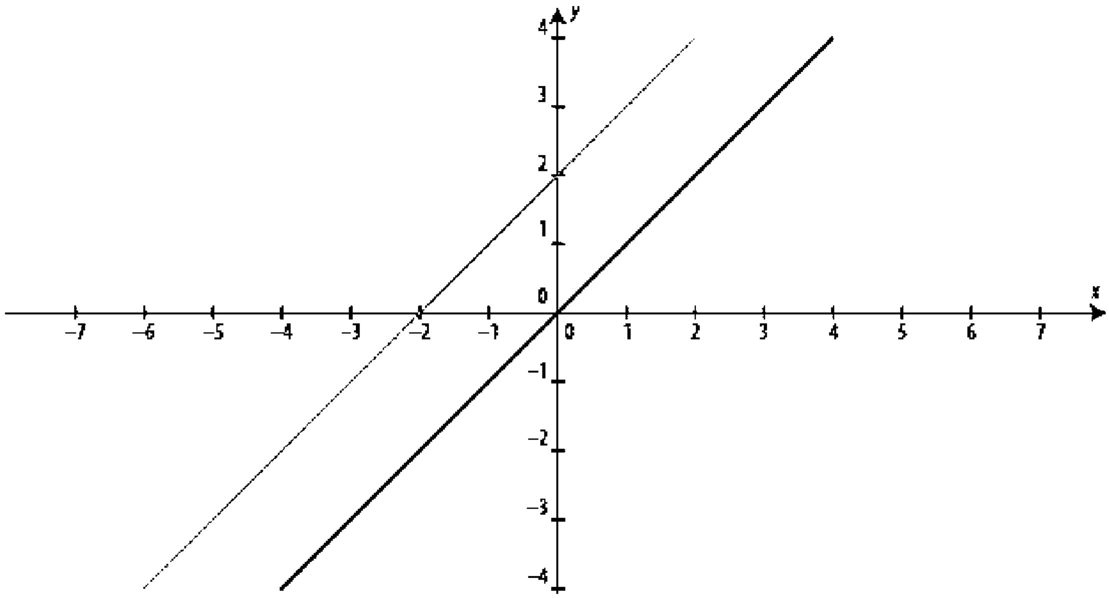


Figura 3.29 Gráficas de $f(x) = x$ (negro) y de $f(x) = x + 2$ (gris).

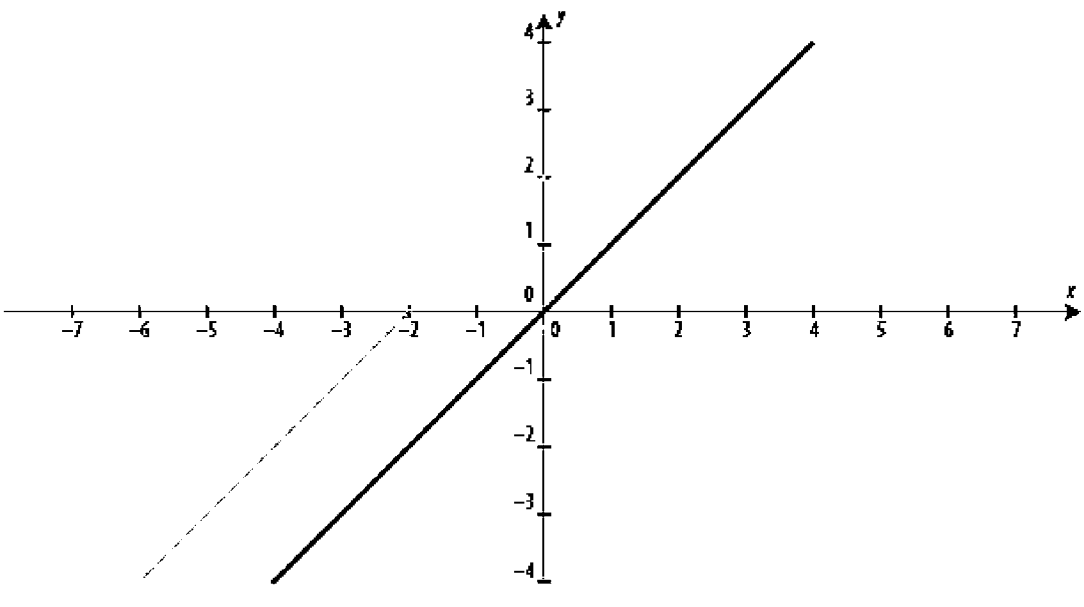


Figura 3.30 Gráficas de $f(x) = x$ (negro), de $f(x) = x + 2$ (gris) y de $f(x) = |x + 2|$ (gris claro).

Ejemplo 26

Trazar la gráfica de:

$$h(x)=\sqrt{|x-3|}$$

Solución

En este ejemplo, partimos de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x}$. Siempre que haya un valor absoluto directamente en la variable, es conveniente que primero apliquemos la transformación de dicho valor absoluto (transformación 12).

En la figura 3.31 se muestra la gráfica de $\sqrt{|x|}$, que es la de $\sqrt{x}$, pero se le añadió una copia de sí misma hacia la parte negativa del dominio. Es decir, se está reflejando con respecto al eje *y*; pero la gráfica original no se elimina, se mantiene.

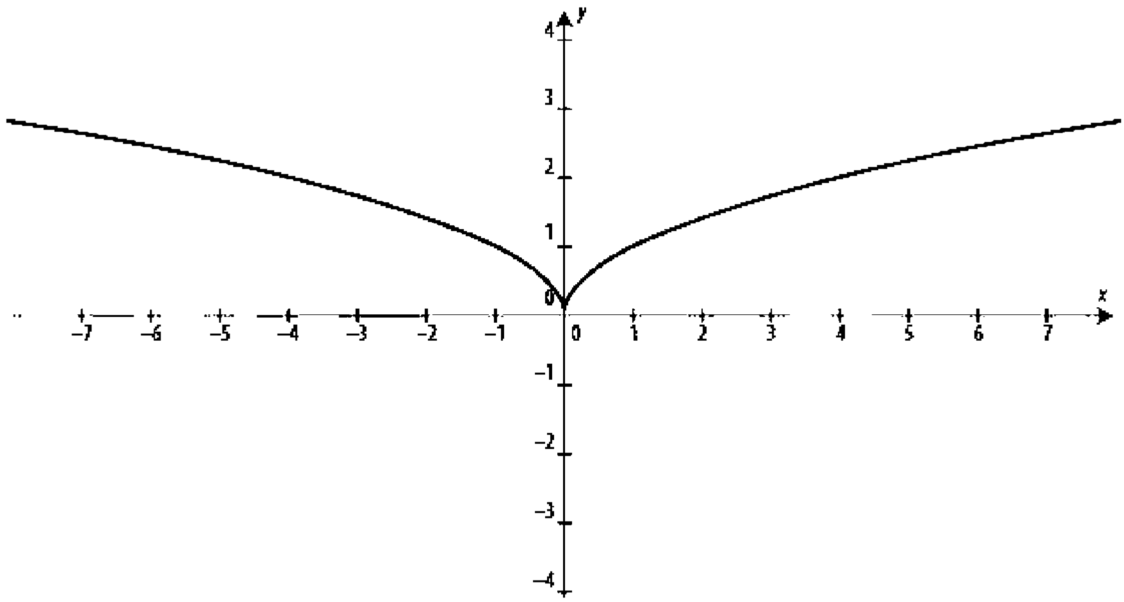


Figura 3.31 Gráfica de $f(x)=\sqrt{|x|}$.

Por último, el 3, que resta, hace que esta gráfica de $\sqrt{|x|}$ se traslade hacia la derecha 3 unidades, como podemos ver en la figura 3.32.

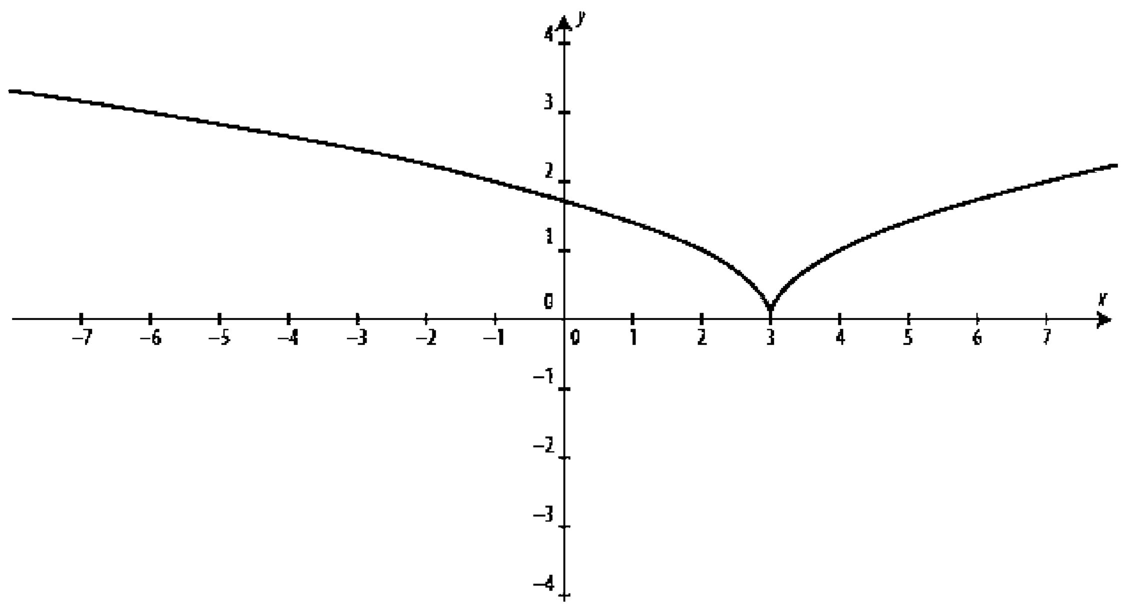


Figura 3.32 Gráfica de $f(x)=\sqrt{|x-3|}$.

Funciones seccionadas

Las funciones seccionadas son funciones que están conformadas por partes de diversas funciones, cada una graficada en una sección o un intervalo diferente.

Ejemplo 27

Trazar la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<0 \\ 3 & \text{si } 0\leq x<4 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$$

Solución

En este caso, la gráfica de $f(x) = x + 1$ es la gráfica de $f(x) = x$ subida una unidad; la de $f(x) = 3$ es una función constante que siempre vale 3, es decir, es una recta horizontal que cruza el eje y en $y = 3$; y la de $f(x)=-\sqrt{x}$ es la de $f(x)=\sqrt{x}$ reflejada con respecto al eje x.

Por tanto, trazamos todas en el mismo plano, pero cada una restringida al intervalo correspondiente que marca la definición de $f(x)$. La gráfica resultante se muestra en la figura 3.33.

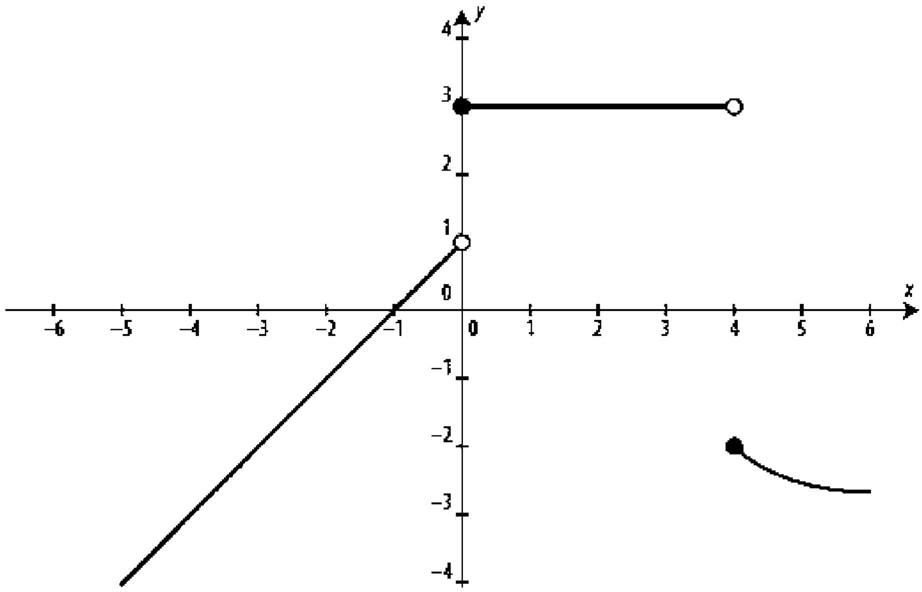


Figura 3.33 Gráfica de $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<0 \\ 3 & \text{si } 0\leq x<4 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$

Como podemos notar, $f(0)=3$, lo que significa que la función evaluada en 0 es igual a 3, porque el valor del dominio $x=0$ está en el intervalo $[0,-4)$, que es el intervalo asignado para $f(x)=3$. Este se marca con el punto cerrado $(0, 3)$ en la gráfica de $f(x)$, mientras que el punto abierto $(0, 1)$ indica precisamente que el valor del dominio $x=0$ no es parte de la gráfica de $f(x)=x+1$. Lo mismo sucede con el valor del dominio $x=4$, que está asignado a $f(x)=-\sqrt{x}$ y no a $f(x)=3$.

Así, el dominio de $f(x)$ está dado por los tres intervalos de las funciones de las que se forma. En este caso, los tres intervalos juntos, $(-\infty, 0)$, $[0, 4)$ y $[4, \infty)$, forman el dominio $(-\infty, \infty)$ para la función $f(x)$. Podemos obtener el rango de la gráfica, debido a que los valores que toma la función son $(-\infty, 1)\cup\{3\}$.

Ejercicios propuestos

55. ¿Cuáles de las siguientes gráficas son funciones?

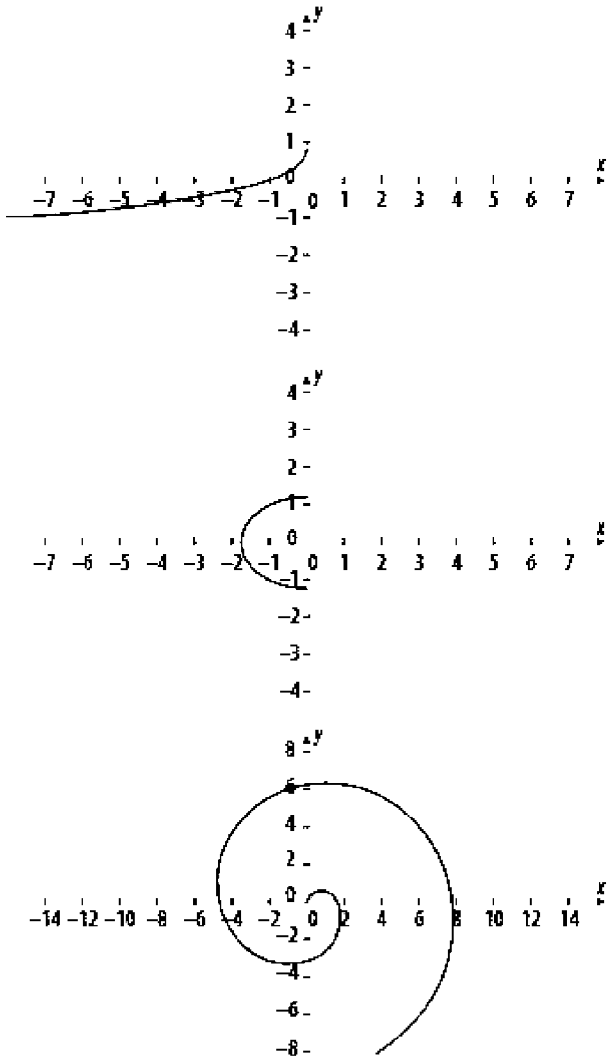


Figura 3.34

En los ejercicios 56 a 66 traza la gráfica de la función usando transformaciones y determina las intersecciones con los ejes.

56. $f(x) = 3x - 2$

57. $g(x) = 3|x|$

58. $h(x) = |3x - 2|$

59. $f(x) = -x^2 + 1$

60. $g(x) = -\sqrt{-x} + 1$

61. $H(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{2}x}$

62. $T(x)=(x-4)^3-2$

63. $V(x)=\left|-\sqrt{x}+2\right|$

64. $f(x)=2\sqrt{-x}$

65. $g(x)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{-x}$

66. $h(x)=1+(x+2)^2$

En los ejercicios 67 a 70 traza la gráfica de la función y determina los intervalos del dominio y del rango.

67. $f(x)=\begin{cases}-2 & si\ x<-1\\ -x & si\ x>0\end{cases}$

68. $g(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x\leq 2\\ |x-1| & \text{si } 2<x<4\\ \sqrt{x}+1 & \text{si } x>4\end{cases}$

69. $h(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+3 & \text{si } -2<x<0\\ -x^3 & \text{si } 0\leq x\leq 2\\ \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x>2\end{cases}$

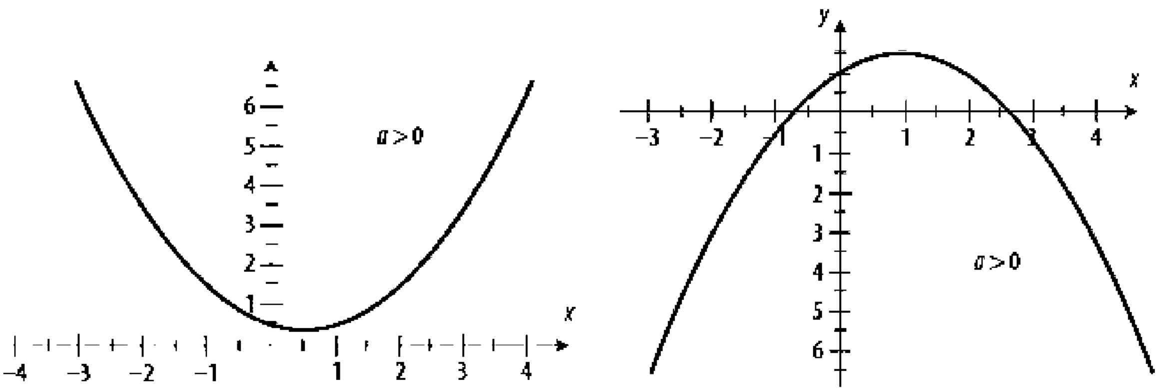
70. $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } -1<x<0\\ x & \text{si } 0<x<1\\ x-1 & \text{si } 1<x<2\\ x-2 & \text{si } 2<x<3\end{cases}$

3.5 Funciones cuadráticas

Una función cuadrática es una función de la forma:

$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ con } a\neq 0$$

La principal característica de una función cuadrática es que su gráfica es una parábola vertical que abre hacia arriba si $a > 0$ (véase la figura 3.35ab) y que abre hacia abajo si $a < 0$ (véase la figura 3.35b).



a) Parábola que abre hacia arriba. b) Parábola que abre hacia abajo.

Figura 3.35

Las raíces de la función cuadrática representan los puntos donde la gráfica interseca al eje x (véase la figura 3.36).

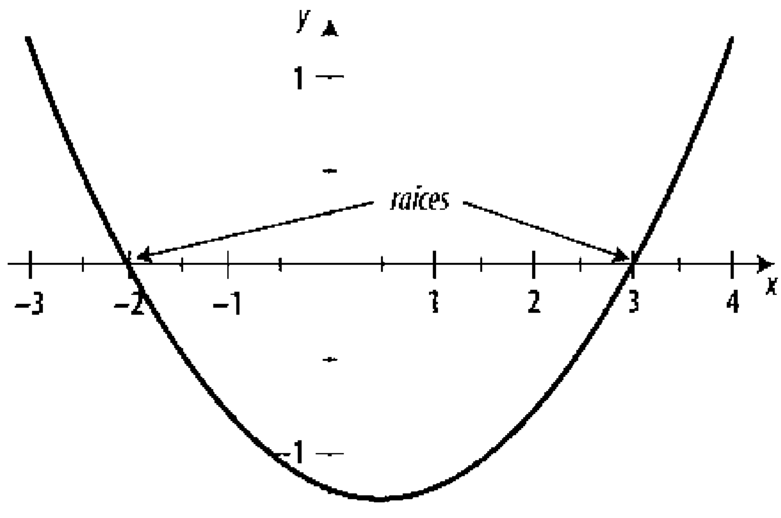


Figura 3.36 Raíces de una función cuadrática.

La gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se obtiene mediante las transformaciones vistas en la sección anterior, es decir, con desplazamientos, encogimientos y reflexiones.

1. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la gráfica de $y = x^2$, al estirarla verticalmente por el factor a, si $a > 1$, o al comprimirla verticalmente si $0 < a < 1$. En este caso, si a es negativa, además del estiramiento o compresión vertical, también existe una reflexión con respecto al eje x (véanse las figuras 3.37 a 3.40).

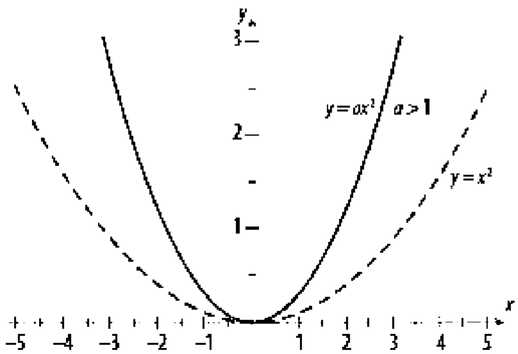


Figura 3.37

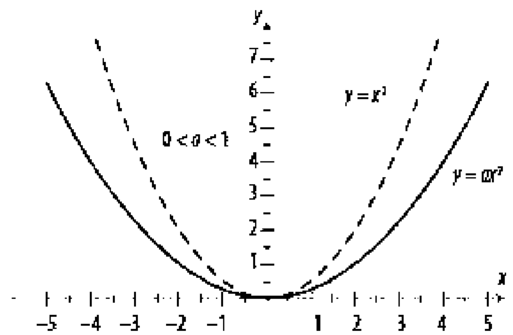


Figura 3.38

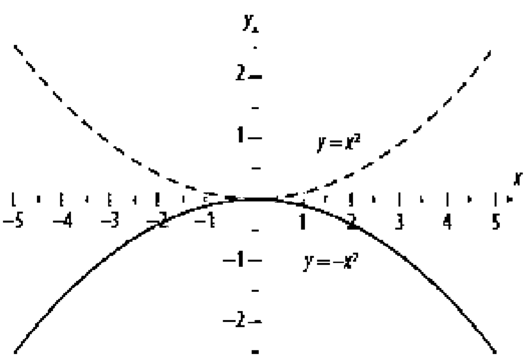


Figura 3.39

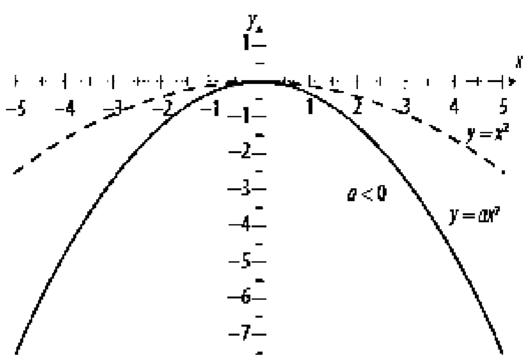


Figura 3.40

2. Si h es un número positivo, se tiene:

   a) La gráfica de $y = a(x - h)^2$ se obtiene al trasladar h unidades horizontalmente hacia la *derecha* la gráfica de $y = ax^2$.

b) La gráfica de $y = a(x + h)^2$ se obtiene al trasladar h unidades horizontalmente hacia la *izquierda* la gráfica de $y = x^2$ (véase figuras 3.41 y 3.42).

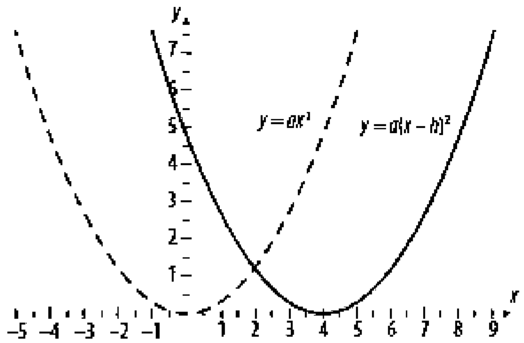


Figura 3.41

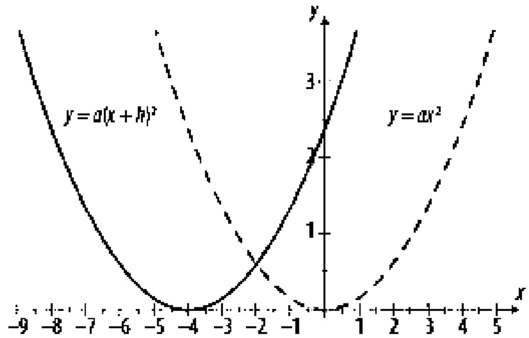


Figura 3.42

3. Si k es positivo, se tiene:

   a) La gráfica de $y = a(x + h)^2 + k$ se obtiene al trasladar k unidades verticalmente hacia *arriba* la gráfica de $y = a(x + h)^2$ (figura 3.43).

   b) La gráfica de $y = a(x + h)^2 - k$ se obtiene al trasladar k unidades verticalmente hacia *abajo* la gráfica de $y = a(x + h)^2$ (figura 3.44).

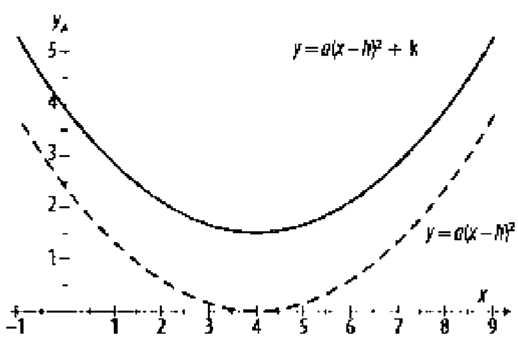


Figura 3.43

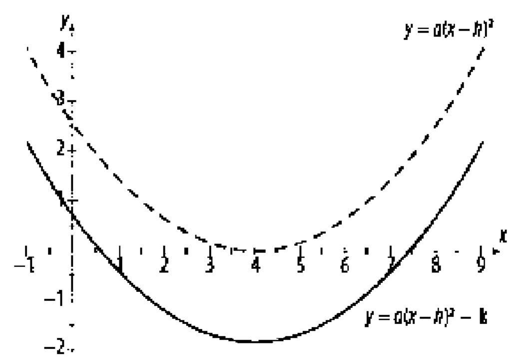


Figura 3.44

Se sugiere seguir el siguiente orden al graficar:

1. Lo primero es la compresión o el estiramiento.
2. Si hay en signo menos multiplicando a la función, se realiza la reflexión respecto al eje x.
3. Acto seguido, se efectúa la traslación horizontal.
4. Por último, se realiza la traslación vertical.

No obstante, este no es el único proceso que puede seguirse para graficar una función cuadrática.

Ejemplo 28

Encontrar las raíces y elaborar la gráfica de la función:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 11$$

Solución

Las raíces son la solución de la ecuación $2x^2 - 8x + 11 = 0$. Cuando utilizamos la fórmula general (capítulo 2), obtenemos números complejos, debido a que el discriminante es negativo. Eso significa que la parábola no cruza los ejes coordenados.

Entonces, para graficar debemos completar el cuadrado:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 11 = 2(x^2 - 4x) + 11 = 2(x^2 - 4x + 4 - 4)^2 + 11$$

$$= 2(x2 - 4x + 4) - 8 + 11 = 2(x - 2)^2 + 3$$

La parábola $y = 2(x - 2)^2 + 3$ se obtiene de la gráfica de $y = x^2$, al estirarla verticalmente por un factor 2 ($y = 2x^2$). Esta última gráfica se desplaza horizontalmente 2 unidades hacia la derecha ($y = 2(x - 2)^2$) y finalmente se desplaza verticalmente 3 unidades hacia arriba ($y = 2(x - 2)^2 + 3$). En las figuras 3.45, 3.46 y 3.47 se muestra cada uno de los pasos.

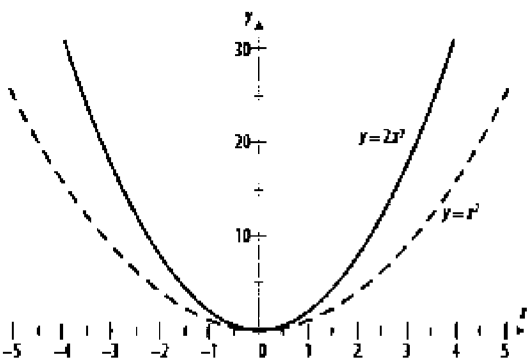


Figura 3.45

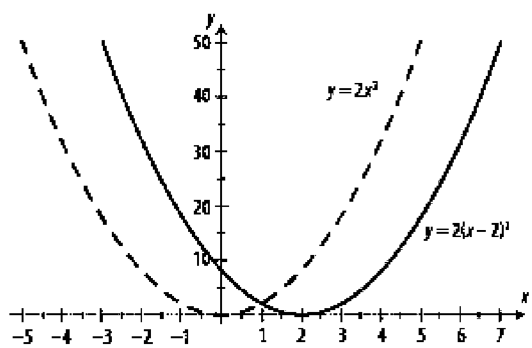


Figura 3.46

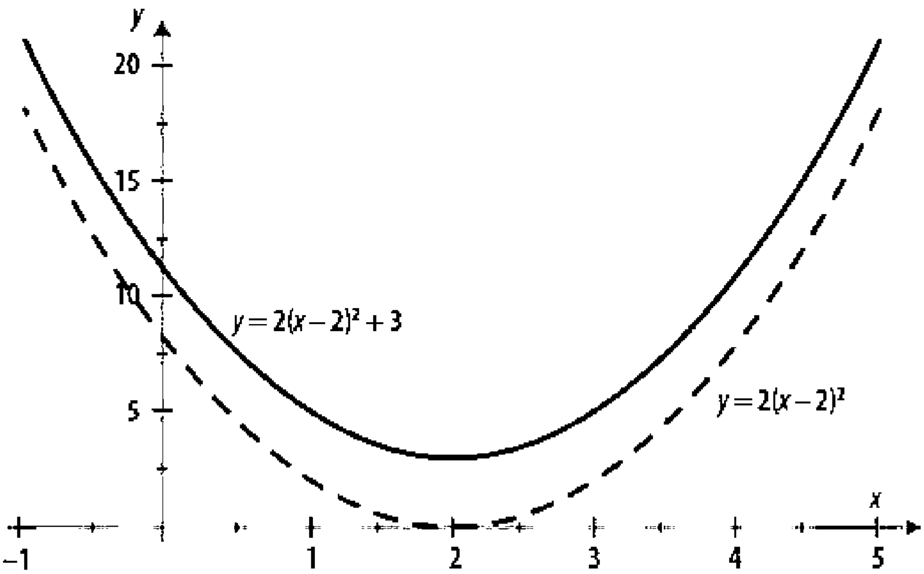


Figura 3.47

Ejemplo 29

Graficar la función:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$$

Solución

Como $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = 5, x = 1$, la gráfica cruza el eje x en estos valores. Entonces, completamos el cuadrado:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 9 - 9\right] - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$$

En este caso, partimos de la gráfica de $y = x^2$, la cual primero se comprime verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$ (por lo que se ensancha) y luego se refleja con respecto al eje x. $\left(y = -\frac{1}{2}x^2\right)$.

Lo siguiente que debemos hacer es trasladar la gráfica horizontalmente 3 unidades hacia la derecha $\left(y = -\frac{1}{2}(x-3)^2\right)$. Finalmente, también debemos trasladarla 2 unidades hacia arriba $\left(y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2\right)$. Podemos observar cada paso descrito antes en las figuras 3.48 a 3.51.

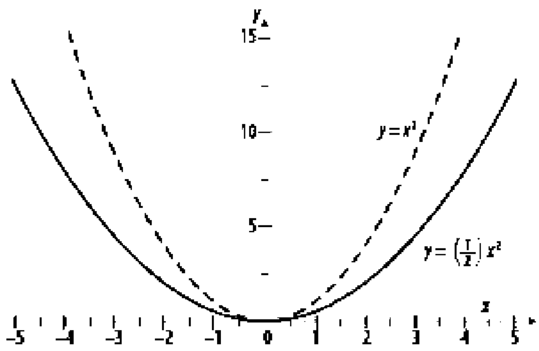


Figura 3.48

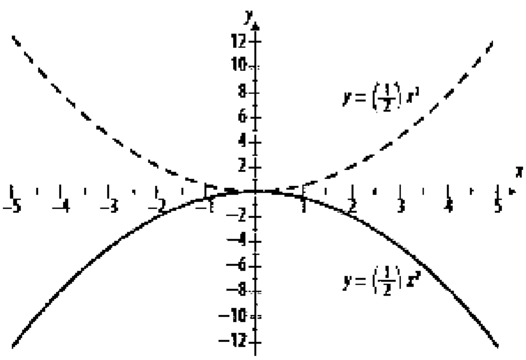


Figura 3.49

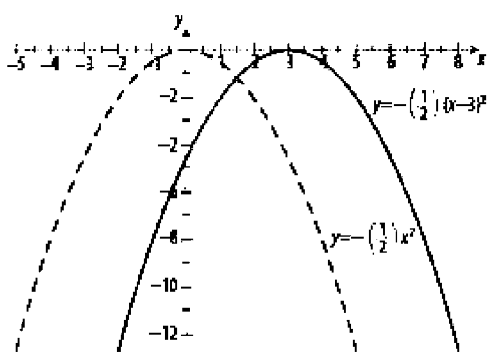


Figura 3.50

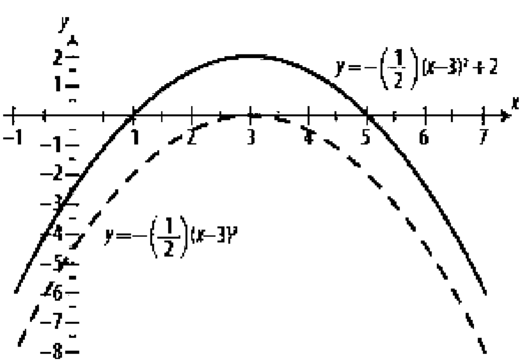


Figura 3.51

Ejemplo 30

Encontrar la ecuación de la parábola que se obtiene de la gráfica de $y = x^2$, al estirarla verticalmente por un factor de $\frac{5}{4}$, y trasladarla horizontalmente 8 unidades hacia la derecha y 6 unidades verticalmente hacia arriba.

Solución

Comenzamos con la ecuación $y = x^2$. Estirarla verticalmente nos lleva a la ecuación $y = \frac{5}{4}x^2$. A su vez, el desplazamiento horizontal de 8 unidades hacia la derecha nos da $y = \frac{5}{4}(x-8)^2$. Por último, con la traslación hacia arriba de 6 unidades, tenemos la ecuación $y = \frac{5}{4}(x-8)^2 + 6$ o $y = \frac{5}{4}x^2 - 20x + 86$.

El punto más alto o más bajo de una parábola se conoce como su *vértice* (véase el capítulo 7). Como se puede ver en los ejemplos anteriores, las coordenadas del vértice son los números que trasladan horizontal y verticalmente la parábola; esto es, si la parábola está dada por $y = a(x - h)^2 + k$, su vértice se ubica en el punto $V(h, k)$. Por las fórmulas del capítulo 2, se conoce que al completar cuadrados, si la parábola es $y = ax^2 + bx + c$, entonces:

$$h = -\frac{b}{2a} \text{ y } k = -\frac{b^2 - 4ac}{ac}$$

Más que usar estas fórmulas, se recomienda completar el cuadrado para obtener las coordenadas del vértice de una parábola.

Ejemplo 31

Encontrar las coordenadas del vértice de las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 + 6x + 14$

b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 30$

Solución

a) Al completar el cuadrado, tenemos:

$$y = x^2 + 6x + 14 = (x + 3)^2 + 5$$

Por consiguiente, las coordenadas del vértice son $V(-3, 5)$. Como podemos notar, también es posible utilizar las fórmulas anteriores con $a = 1, b = 6, c = 14$:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(1)} = -3 \text{ y } k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{36 - 4(1)(14)}{4(1)} = -\frac{-20}{4} = 5$$

b) Como en el inciso anterior, al completar el cuadrado obtenemos:

$$y = \frac{1}{2}(x-6)^2 + 12$$

Así que podemos decir que el vértice tiene coordenadas: $V(6, 12)$.

Ejemplo 32

Un granjero desea cercar un terreno rectangular doble, como el que se muestra en la figura 3.52. Si tiene 2 304 metros de cerca, encontrar las dimensiones que le darán la máxima superficie.

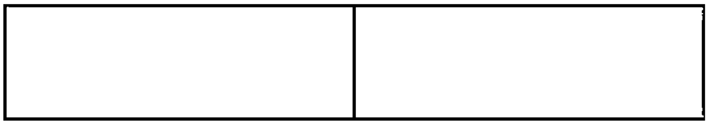


Figura 3.52

Solución

Sean x y y las dimensiones de uno de los rectángulos.

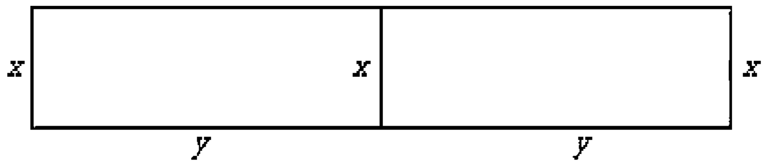


Figura 3.53

De acuerdo con los datos, podemos decir que su perímetro es:

$$3x + 4y = 2\,304 \qquad (1)$$

En tanto, la superficie es:

$$A = 2xy \qquad (2)$$

Entonces, despejamos y de (1):

$$y = \frac{2\,304 - 3x}{4} = 576 - \frac{3}{4}x \qquad (3)$$

Luego, sustituimos (3) en (2) y tenemos que el área como una función cuadrática es:

$$A = f(x) = 2x\left(576 - \frac{3}{4}x\right) = f(x) = 1152x - \frac{6}{4}x^2$$

Como podemos comprobar, esta parábola abre hacia abajo, por lo que el vértice es el punto máximo. Por tanto, al completar el cuadrado tenemos:

$$f(x) = 1152x - \frac{6}{4}x^2 = 221\,184 - \frac{6}{2}(x - 384)^2$$

De esta manera, el vértice tiene coordenadas $V(384, 221\,184)$. Esto significa que el valor óptimo de x es 384 m y de la ecuación (3): $y = 288$ m. Las dimensiones de cada rectángulo son 288×384 m^2.

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 71 a 81, dibuja la gráfica de la parábola.

71. $y = 2x^2 - 8x + 9$
72. $y = 6x - x^2$
73. $y = 3x^2 + 6x + 5$
74. $y = -x^2 + 2x - 3$
75. $y = 2x^2 + 8x + 13$
76. $y = x^2 - 8x - 1$
77. $y = 4x^2 - 4x + 1$
78. $y = 2x^2 + 4x + 2$
79. $y = -x^2 + 4x - 4$
80. $y = -x^2 - 10x - 28$
81. $y = -x^2 + 2x + 5$

3.6 Operaciones con funciones

En esta sección se estudia cómo realizar operaciones con funciones de la misma forma en que se hacen las operaciones con números. Las operaciones que se realizan son: suma o adición, resta o sustracción, multiplicación, división y composición de funciones.

Suma, resta, multiplicación y división de funciones

Ejemplo 33

Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 2x - 3$, hallar $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, así como su dominio.

Solución

Iniciamos con $(f + g)(x)$, la cual será una nueva función cuyo nombre es $f + g$ y que se define como $f(x) + g(x)$. Entonces:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x+1) + (2x-3) = x + 2x + 1 - 3 = 3x - 2$$

De forma análoga encontramos las otras tres funciones:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x+1) - (2x-3) = x - 2x + 1 + 3 = -x + 4$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x+1)(2x-3) = 2x^2 - 3x + 2x - 3 = 2x^2 - x - 3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{2x-3}$$

Para hallar el dominio de estas cuatro nuevas funciones, es muy importante que recordemos que estas se formaron a partir de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, así que el dominio de las nuevas funciones serán los números que ambas funciones, tengan en común en sus respectivos dominios. Es decir, el dominio de las cuatro funciones resultantes de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de $f(x)$ con $g(x)$ será la intersección del dominio de $f(x)$ con el dominio de $g(x)$, en otras palabras, la intersección estará donde ambos dominios coincidan.

En este caso, tanto el dominio de $f(x)$ como el de $g(x)$ es el intervalo $(-\infty, \infty)$, así que la intersección es el mismo intervalo $(-\infty, \infty)$. Por tanto, este también será el dominio para las cuatro funciones, a excepción de la función $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, la cual está definida como $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. Esto no permite que $g(x) = 0$, porque si esto sucede, entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ se indefine, debido a que no se puede dividir entre cero. Por tanto, debemos quitar del dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ aquellos valores de x que hagan que $g(x) = 0$, en este caso: $x=\frac{3}{2}$, ya que $g\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)-3=3-3=0$. Por lo tanto, el dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Ejemplo 34

Si $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\sqrt{3-x}$, hallar $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, así como sus dominios.

Solución

Primero, hallamos las nuevas funciones:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}$$

$$(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{3-x}=\sqrt{(x+1)(3-x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{\frac{x+1}{3-x}}$$

Ahora, para los dominios, primero debemos hallar el dominio de $f(x)$ y $g(x)$. De nuestro estudio de la sección 3.3 sabemos que el dominio de $f(x)$ es el intervalo $[-1, \infty)$ y que el dominio de $g(x)$ es el intervalo $(-\infty, 3]$, así que la intersección de estos dos dominios da el dominio de las cuatro funciones nuevas, y que es el intervalo $[-1, 3]$, el cual para $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ en realidad es el intervalo $[-1, 3]$, debido a que $x = 3$ es el valor que hace que $g(x) = 0$.

Composición de funciones

Hay una operación entre funciones que se llama composición, la cual consiste, por así decirlo, en introducir una función dentro de otra. Enseguida se estudia con detenimiento cómo se hace.

La composición de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$ se denota, por ejemplo, como $(fog)(x)$, donde el símbolo "o" significa composición. La operación de composición no es conmutativa, es decir, no es lo mismo $(fog)(x)$ que $(gof)(x)$, más adelante se verá por qué sucede esto.

La composición $(fog)(x)$ se lee f compuesta con g, y se define como $(fog)(x) = f(g(x))$. Esto significa que se tiene que evaluar la función f pero no con un número, como se ha hecho antes, sino con la función $g(x)$. Ciertamente evaluar una función con otra función suena raro, así que para una mejor comprensión del tema enseguida se presenta un ejemplo.

Ejemplo 35

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, hallar $(fog)(x)$ y $(gof)(x)$.

Solución

Entonces $(fog)(x) = f(g(x))$, esto implica sustituir toda la función $g(x)$ en la x de la función $f(x)$, es decir:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$$

Así ya tenemos la función compuesta $(fog)(x)$.

Ahora, hacemos lo mismo para $(gof)(x)$:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} + 1$$

Como podemos ver, estas dos composiciones no dieron como resultado la misma función, es por eso que la operación de composición no es conmutativa, es decir, en general $(gof)(x) \neq (fog)(x)$.

Ejemplo 36

Evaluar $(fog)(3)$ y $(gof)(4)$ para las funciones $(fog)(x)$ y $(gof)(x)$ del ejemplo 35.

Solución

Si $(f \circ g)(x) = \sqrt{x+1}$, entonces es lógico pensar que $(f \circ g)(3) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$. Esto es correcto, siempre y cuando sepamos con anterioridad que el valor $x = 3$ está en el dominio de $(f \circ g)(x)$, pero aquí no conocemos aún el dominio, así que evaluar una composición de esta forma puede conducirnos a un error.

La forma más segura de evaluar es la que presentamos a continuación. Como ya sabemos que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, entonces $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3+1) = f(4) = \sqrt{4} = 2$. Como podemos ver, nos da el mismo valor que antes, esto es porque el valor $x = 3$ sí está en el dominio de $(f \circ g)(x)$, pero como antes no sabíamos eso, evaluar de la primera forma no era seguro. (En el siguiente ejemplo mostraremos por qué no es seguro.)

Ahora, queda evaluar $(g \circ f)(4)$. Por tanto, hagámoslo de la forma segura:

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g\left(\sqrt{4}\right) = g(2) = 2+1 = 3$$

Ejemplo 37

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{3}{x}$, hallar $(f \circ g)(x)$ y evaluar $(f \circ g)(0)$.

Solución

Primero, tenemos que: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{3}{x}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{3}{x}} = \dfrac{x}{3}$. Si evaluamos directamente en la ecuación de $(f \circ g)(x)$, tendríamos que: $(f \circ g)(0) = \dfrac{0}{3} = 0$.

Ahora, vamos a evaluar de la forma segura:

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f\left(\frac{3}{0}\right)$$

Sin embargo, aquí surge un problema: $\dfrac{3}{0}$ es indefinido. Esto nos dice que entonces no podemos evaluar $(f \circ g)(0)$, lo cual significa que $x = 0$ no está en el dominio de $(f \circ g)(x)$. Por esta razón, evaluar directamente en la ecuación de la composición es peligroso; no obstante, sí lo podemos hacer, siempre y cuando sepamos antes que el valor con el cual se va a evaluar está en el dominio de la composición.

Pero, entonces, ¿cómo se halla el dominio de una composición?

Para su explicación, retomemos las funciones del ejemplo 35, $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x+1$, y su composición $(f \circ g)(x) = \sqrt{x+1}$. En este caso, el dominio puede obtenerse directamente de la ecuación de la composición. Así, el dominio aquí sería $[-1, \infty)$. Sin embargo, al igual que evaluar directamente en la ecuación de la composición, obtener el dominio así no siempre es una forma segura. Esto resulta seguro siempre y cuando la ecuación de la función no se simplifique o, si se simplifica, que no se efectúe una simplificación de fracciones (informalmente conocida como "ley del sándwich") o no se elimine una raíz con índice par.

Ejemplo 38

Hallar el dominio de la composición $(f \circ g)(x)$ del ejemplo 37.

Solución

Como vimos en el ejemplo anterior, esa composición es $(f \circ g)(x)=\frac{x}{3}$, así que si obtuviéramos el dominio directamente de esta ecuación, diríamos que son todos los reales. Pero, ya en el ejemplo 37 se concluyó que $x = 0$ no está en el dominio de $(f \circ g)(x)$, así que no pueden ser todos los reales. Si revisamos el ejemplo 37, encontramos que para llegar a la expresión simplificada $(f \circ g)(x)=\frac{x}{3}$ se realizó una simplificación de fracciones, lo cual provoca que obtener el dominio de la expresión simplificada $\frac{x}{3}$ ya no sea confiable. Cuando esto sucede, debemos obtener el dominio de la expresión anterior a la realización de la simplifcación de fracciones, es decir, de la expresión $(f \circ g)(x)=\frac{1}{\frac{3}{x}}$.

Como podemos notar, en esta expresión tenemos dos fracciones, la principal que divide 1 entre $\frac{3}{x}$ y el denominador por sí mismo, que divide 3 entre x. Recordemos que al obtener dominios de funciones que incluyen fracciones, debemos asegurarnos de que los denominadores no sean iguales a cero. Entonces, la fracción principal se indefiniría cuando $\frac{3}{x} = 0$, pero esta ecuación no tiene solución; entonces, la fracción principal no se indefine nunca y ahí no hay problema. La segunda fracción, $\frac{3}{x}$, se indefine cuando $x = 0$, por lo que el valor $x = 0$ no puede ser parte del dominio de $(f \circ g)(x)$.

Ejemplo 39

Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$, hallar $(f \circ g)(x)$ y su dominio.

Solución

Primero, hacemos la composición, $(f \circ g)(x)=\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = x-1$, donde, en el último paso, eliminamos la raíz con el exponente.

Como dijimos antes, si al simplificar la expresión de la composición se elimina una raíz de índice par, no es confiable obtener el dominio de la expresión simplificada, pues, si en este caso lo hiciéramos así, tendríamos que el dominio serían todos los reales, lo cual no es cierto. Para probar esto, podríamos evaluar $(fog)(-2)$, que nos da:

$$(fog)(-2)=f(g(-2))=f\left(\sqrt{-2-1}\right)=f\left(\sqrt{-3}\right)$$

Pero, como podemos observar, $\sqrt{-3}$ no es un número real. Entonces, no podemos evaluar $(fog)(-2)$ y, por tanto, $x=-2$ no está en el dominio de $(fog)(x)$. Así, comprobamos que efectivamente el dominio no pueden ser todos los reales. Nuevamente debemos obtener el dominio de la expresión anterior a la eliminación de la raíz cuadrada, es decir, de la ecuación $(fog)(x)=\left(\sqrt{x-1}\right)^2$. Entonces, para hallar el dominio, debemos asegurarnos de que $x-1\geq 0$, y eso sucede cuando $x\geq 1$, por tanto el dominio es el intervalo $[1,\infty)$.

Ejemplo 40

Si $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$, $g(x)=\dfrac{2}{x-2}$ y $h(x)=|x|$, hallar $(fogoh)(x)$ y $(hogof)(x)$.

Solución

Ahora, para este ejemplo haremos composiciones de tres funciones siguiendo el mismo procedimiento. Tenemos que:

$$(fogoh)(x)=f(g(h(x)))=f(g(|x|))=f\left(\frac{2}{|x|-2}\right)=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{|x|-2}\right)^2+1}$$

$$(hogof)(x)=h(g(f(x)))=h\left(g\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)\right)=h\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2+1}-2}\right)=\left|\frac{2}{\sqrt[3]{x^2+1}-2}\right|$$

Ejemplo 41

Si $F(x)=\sqrt{\dfrac{3x}{1+3x}}$ y $F(x)=(fogoh)(x)$, *hallar* $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.

Solución

Aquí ya nos dan una función compuesta y debemos dar las funciones con las cuales se formó. Aquí no hay un procedimiento analítico que seguir, solo es cuestión de visualizarlo. Después de un rato de análisis, determinamos que las funciones pueden ser:

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$g(x)=\frac{x}{1+x}$$

$$h(x)=3x$$

Como se puede observar, esta no es la única respuesta posible; por ejemplo, $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\frac{3x}{1+3x}$ y $h(x)=x$ son otras funciones que cumplen $F(x)=(fogoh)(x)$, sin embargo este es un caso trivial. Por lo general, se desea que ninguna de las funciones sea la función identidad $f(x) = x$.

Ejemplo 42

Escribir una fórmula que proporcione el área de un triángulo equilátero en función de la longitud de uno de sus lados.

Solución

En el ejemplo 19 (sección 3.3) se llegó a la fórmula $A(p)=\frac{\sqrt{3}p^2}{36}$, que proporciona el área de un triángulo equilátero en función de su perímetro. Como ya sabemos que el perímetro en función de uno de los lados es $p(l) = 3l$, la fórmula que proporciona el área en función de uno de los lados es la composición:

$$(Aop)(l)=A(p(l))=\frac{\sqrt{3}(3l)^2}{36}=\frac{9\sqrt{3}l^2}{36}=\frac{\sqrt{3}l^2}{4}$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 82 a 87 halla $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, así como sus dominios.

82. $f(x)=4$, $g(x)=2-x$

83. $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2+3$

84. $f(x)=\frac{2}{x-1}$, $g(x)=x+1$

85. $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$

86. $f(x)=\frac{x}{x-3}$, $g(x)=\frac{x+4}{x}$

87. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x)=2$

En los ejercicios 88 a 93 halla $(fog)(x)$, $(gof)(x)$, $(fof)(x)$, $(gog)(x)$, así como sus dominios.

88. $f(x)=4+x$, $g(x)=-x$

89. $f(x)=x^3,\ g(x)=\dfrac{1}{x}$

90. $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=x+5$

91. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x},\ g(x)=x-6$

92. $f(x)=\sqrt[3]{x},\ g(x)=\dfrac{2}{1-x}$

93. $f(x)=\sqrt{x+3},\ g(x)=\sqrt{1-x}$

En los ejercicios 94 y 95 evalúa $(f o g)(1)$, $(g o f)(0)$, $(f o f)(-2)$ y $(g o g)(4)$.

94. $f(x)=\sqrt[3]{x},\ g(x)=\dfrac{2}{x}$

95. $f(x)=\left|\dfrac{x}{x+2}\right|,\ g(x)=4x$

En los ejercicios 96 y 97 halla $(f o g o h)(x)$ y $(h o g o f)(x)$.

96. $f(x)=|x+2|,\ g(x)=\dfrac{x-2}{x},\ h(x)=-\sqrt{x}$

97. $f(x)=\dfrac{x+4}{x-4},\ g(x)=\sqrt[3]{1-x},\ h(x)=x^2$

En los ejercicios 98 y 99, $F(x)=(f o g o h)(x)$. Halla $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.

98. $F(x)=\sqrt[4]{\dfrac{2-x}{3}}+3$

99. $F(x)=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2+1}$

100. Encuentra una fórmula que dé el área, A, de un círculo en función de su diámetro d.

101. Una empresa que fabrica cierto producto ha encontrado que puede modelar su ingreso con la siguiente función $I(q)=\dfrac{10000q}{q+20}$, $0\leq q\leq 2500$, donde I es el ingreso mensual en dólares por el concepto de venta del producto y q es la cantidad demandada del producto. A su vez, la demanda del producto depende del precio que la empresa le ponga al mismo de acuerdo con la función $q(p)=\dfrac{250000}{p}$.

a) Escribe una fórmula que dé el ingreso en función del precio.

b) ¿Cuál sería el ingreso para un precio de $100.00?

c) ¿Conviene elevar el precio a $120.00? Explica con detalle tu respuesta.

d) ¿Cuál sería el ingreso si el precio es de $80.00?

e) ¿Cuál es el problema al fijar el precio en $80.00?

3.7 Funciones inversas

En esta última sección del capítulo se estudia cómo obtener la inversa de una función.

Las operaciones matemáticas se presentan en parejas, donde una de estas deshace lo que hace la otra; por ejemplo, si se suma 3 a un número, se vuelve a obtener ese número si le restas 3; lo mismo ocurre con la multiplicación y la división y con la potenciación y la radicación.

Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f(2) = 8$; por tanto, la función inversa de $f(x)$ debe dar 2 al ser evaluada en 8. Es oportuno resaltar un detalle importante: los valores del dominio de una función deben ser, entonces, los valores del rango de su función inversa, y los valores del rango de la función serán los valores del dominio de la función inversa.

Pero, ¿cómo se obtiene la función inversa? Es sencillo. Primero, considérese la función $f(x) = x^3$. Cuando se le asigna un valor del dominio a x, esta función eleva dicho valor al cubo, entonces la función inversa debe realizar la operación que deshaga la potencia, es decir, debe obtener la raíz cúbica. Por tanto, la función inversa de $f(x) = x^3$ debe ser la función $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$, en la cual el superíndice -1 a manera de exponente en realidad representa que esta función es la inversa de f. Esta es una notación común que se usa cuando estamos tratando con funciones.

Pero, ¿cuál sería la función inversa de $f(x) = x^2$? Sin duda, podría pensarse que la función inversa es $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$. Sin embargo, aquí hay algo que debe notarse. Se sabe que $f(2) = 2^2 = 4$ y que entonces $f^{-1}(4)=\sqrt{4}=2$, y esto cumple con el concepto de función inversa, pero se sabe también que $f(-2) = (-2)^2 = 4$; entonces también debería suceder que $f^{-1}(4)=\sqrt{4}=-2$, pero desde luego esto no es cierto, porque no se pueden asignar dos valores distintos a $f^{-1}(4)$; como se recordará, en una función, a cada valor del dominio le corresponde solo un valor del rango. Esto nos indica que no todas las funciones tienen inversa.

Para que una función tenga inversa, esta debe ser una función "uno a uno", también llamada *biunívoca* o *inyectiva*. Una función uno a uno es aquella que nunca repite un valor de su rango; en otras palabras, cada valor de su rango es asignado solo a un valor único del dominio.

La gráfica de la función $f(x) = x^2$ en la figura 3.54 ayuda a visualizar lo que se acaba de tratar. Esta función asigna cada uno de sus valores a dos valores del dominio (excepto el cero, que solo se le asigna al cero) a dos valores del dominio. Por ejemplo, el 4 se le asigna a $x = -2$ y a $x = 2$, como ya se había mencionado. O el 9 se le asigna a $x = -3$ y a $x = 3$, etcétera. Esto no puede suceder en una función uno a uno.

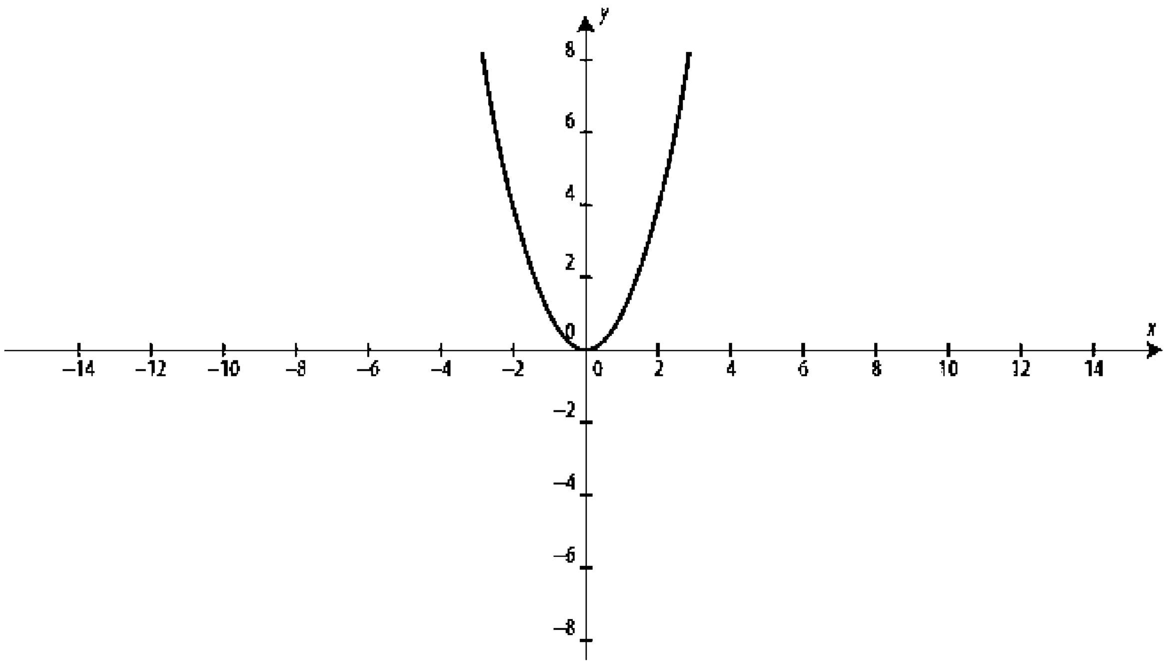


Figura 3.54 Gráfica de $f(x) = x^2$.

Sin embargo, aunque $f(x) = x^2$ no sea uno a uno y, por tanto, no tenga inversa, puede restringirse su dominio para formar una función uno a uno. Por ejemplo, si se define la función:

$$f(x) = x^2, x \geq 0$$

Se está restringiendo el dominio de la función $f(x) = x^2$ solo a los positivos y el cero. La gráfica se muestra en la figura 3.55. Esta nueva función sí es uno a uno y, por tanto, sí tiene inversa, que así será la función $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$, porque por ejemplo: $f(2) = 4$ y $f^{-1}(4) = 2$. Ya no existe el problema que se tenía con el dominio completo, dado que esta vez $f(-2)$ no está definido.

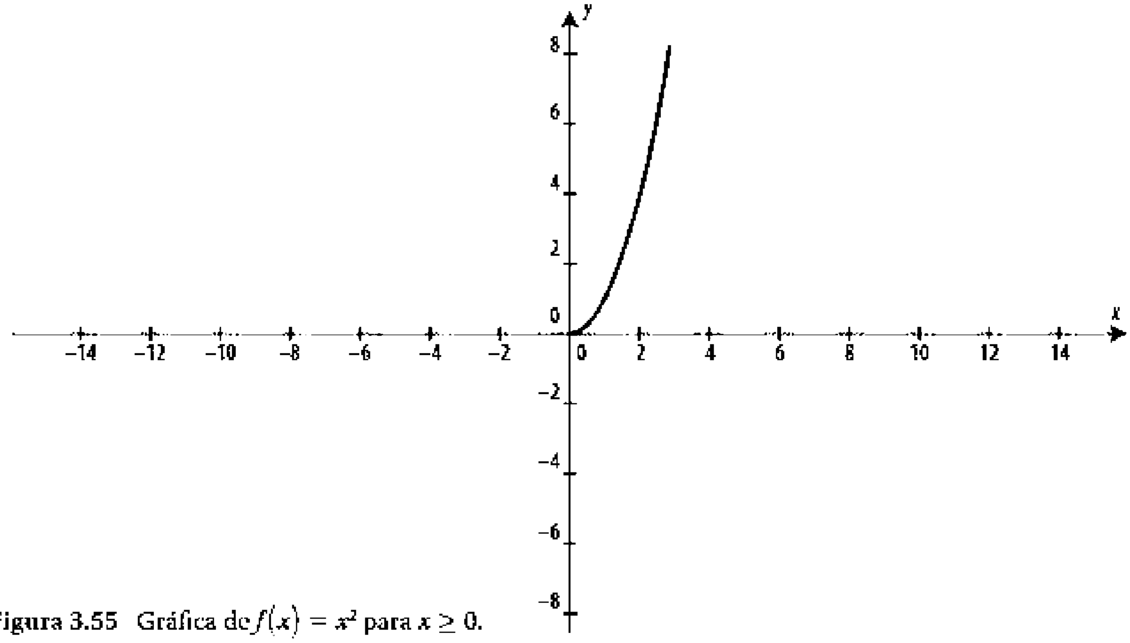


Figura 3.55 Gráfica de $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$.

Véanse las gráficas de la figura 3.56; en negra aparece $f(x) = x^2, x \geq 0$; en gris $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ y en gris claro $I(x) = x$. Nótese que las gráficas de $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$ son simétricas con respecto a la recta $y = x$. Esto siempre sucede con una función y su inversa debido a que, como ya se dijo, el dominio de una es el rango de la otra y viceversa. Esto produce que los puntos "intercambien sus coordenadas" de una función a otra; por ejemplo, el punto (2, 4) en $f(x)$, es el punto (4, 2) en $f^{-1}(x)$.

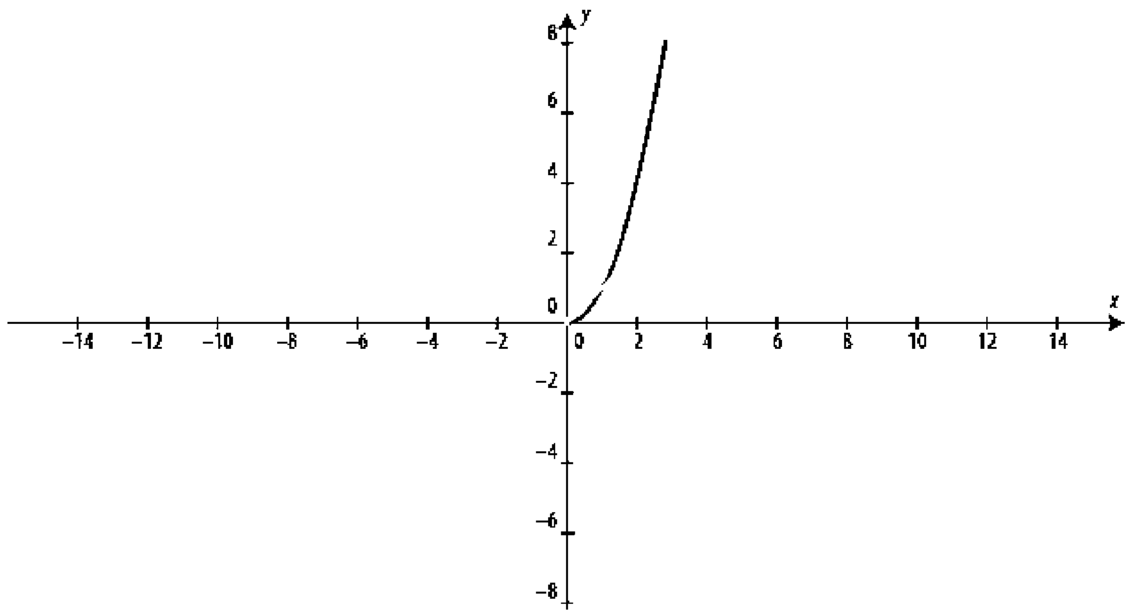


Figura 3.56 Gráficas de funciones inversas.

Ejemplo 43

Encontrar la función inversa de $f(x) = x^2, x \leq 0$ y trazar sus gráficas en el mismo plano.

Solución

Esta es la misma función con la que hemos venido trabajando hasta ahora, pero aquí su dominio está restringido solo a los negativos y el cero. Esto nos indica que la inversa debe tener como rango precisamente todos los números negativos y el cero.

Un procedimiento estándar que nos permite encontrar la inversa de una función es despejar x (o cualquiera que sea la variable independiente) de la ecuación de la función original. En este caso al despejar x tenemos:

$$y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{y}$$

Ya despejada x, simplemente intercambiamos x y y en la ecuación:

$$y = \pm\sqrt{x}$$

En realidad, como aquí queremos que los valores de la inversa sean negativos, solo nos quedaremos con la raíz negativa. Por tanto, la función inversa queda como:

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

En la figura 3.57 podemos ver graficadas $f(x)$ en negro y $f^{-1}(x)$ en gris: como vemos, se aprecia nuevamente su simetría con respecto a la recta $y = x$.

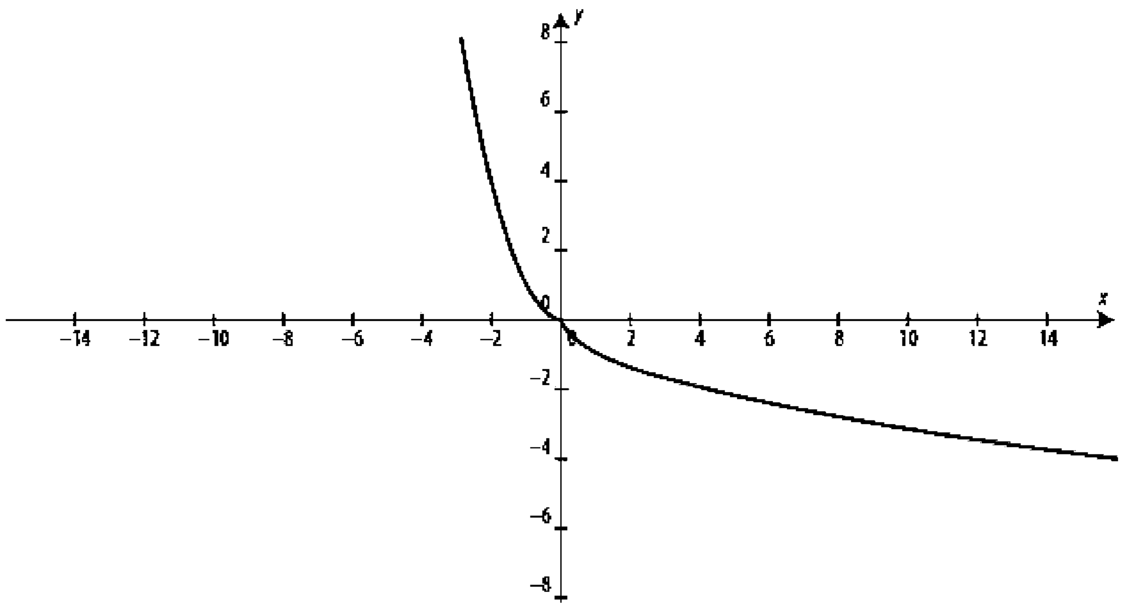


Figura 3.57 Gráfica de funciones inversas.

Ejemplo 44

Encontrar la inversa de la función $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$.

Solución

Aplicamos el mismo procedimiento del ejemplo anterior; esto es, despejamos x y luego intercambiamos x y y:

$$y=\frac{3x-1}{x+2}$$

$$y(x+2)=3x-1$$

$$xy+2y=3x-1$$

$$xy-3x=-1-2y$$

$$x(y-3)=-1-2y$$

$$x=-\frac{1+2y}{y-3}$$

$x=\frac{2y+1}{3-y}$; por lo que intercambiando x por y, queda:

$y=\frac{2x+1}{3-x}$; así que la función inversa es

$$f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3-x}$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 102 a 108 encuentra la función inversa y traza ambas funciones en el mismo plano.

102. $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

103. $g(x)=(x-2)^2$, $x\geq 2$

104. $h(x)=3x+1$

105. $F(x)=\frac{1}{2}x-4$

106. $G(x)=\sqrt{x-2}$

107. $H(x)=(x-3)^3+1$

108. $f(x)=\frac{1}{x}$ (grafica tabulando)

En los ejercicios 109 a 113 halla la inversa de la función.

109. $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$

110. $g(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$

111. $h(x)=\dfrac{3-x}{4x}$

112. $f(x)=\dfrac{3x+2}{4x-6}$

113. $f(x)=\dfrac{7-2t}{3-t}$

Capítulo **4**

Funciones polinomiales y funciones racionales

Al final de este capítulo el alumno será capaz de:

- Conocer y operar funciones polinomiales.
- Realizar divisiones de polinomios.
- Obtener e interpretar las raíces de polinomios.
- Conocer y operar con funciones racionales.
- Realizar e interpretar gráficas de funciones polinomiales y racionales.

Introducción

Las funciones polinomiales y las funciones racionales tienen diversas aplicaciones en física y matemáticas; por ejemplo, pueden utilizarse para describir el comportamiento de materiales elásticos o el comportamiento de poblaciones de animales como función del tiempo. Asimismo, para estimar la variación de los ingresos y egresos de una empresa como función del tiempo. Pueden modelarse como una función polinomial de tercer o cuarto grado para estudiar las raíces de la función y sus puntos extremos, con el fin de obtener información útil de en qué momento es conveniente aumentar o disminuir la producción de una empresa; incluso, se puede predecir el comportamiento de las ventas, suponiendo que estas siguen un modelo polinomial conocido.

Como se estudia en el capítulo 1, un **polinomio** es una expresión que puede escribirse como la suma de uno o más términos de la forma $ax_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$, donde a es una constante y $x_1, x_2, \ldots x_m$ son las variables elevadas, cada una, a una potencia n_m.

4.1 Funciones polinomiales

Para iniciar esta sección, primero se hace un breve repaso de la definición de polinomios, a fin de recordar este concepto que será de gran utilidad a lo largo de todo este capítulo. Así, la *forma estándar* de un polinomio en una variable x es:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

Donde los coeficientes a_n son constantes y n es el grado del polinomio.

A su vez, una función polinomial es una función dada por la siguiente relación:

$$f : x \rightarrow a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0$$

Donde $a_n \neq 0$ y n es el grado de la función polinomial. A menos que se indique otra cosa, el dominio de la función polinomial son los números reales $\mathbb{R}$.

Como se trata en capítulos anteriores, algunos casos particulares de funciones polinomiales son:

- Si $n = 0, f(x) = a_0$, es la función constante y su gráfica es una recta horizontal.
- Si $n = 1, f(x) = a_1x + a_0$, es la función lineal y su gráfica es una recta con pendiente a_1.
- Si $n = 2, f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, es la función cuadrática y su gráfica es una parábola.

Funciones con potencias enteras

Si f es un polinomio de grado n y todos los coeficientes son cero, excepto a_n, entonces $f(x) = a_nx^n$, donde $a_n \neq 0$. Así, si $n = 1$, la gráfica de $f(x)$ es una línea recta que pasa por el origen. Pero si $n = 2$, la gráfica de $f(x)$ es una parábola con vértice en el origen. Si n es un entero impar, entonces $f(x)$ es una función impar y la gráfica de $f(x)$ es simétrica respecto del origen. Por otro lado, si n es un entero par, entonces $f(x)$ es una función par y la gráfica de $f(x)$ es simétrica respecto del eje y. Las figuras 4.1a y 4.1b muestran las gráficas de las funciones impares $f(x) = x^1$ y $f(x) = x^3$, respectivamente. Mientras que las figuras 4.2a y 4.2b representan las gráficas de las funciones impares: $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^4$, respectivamente.

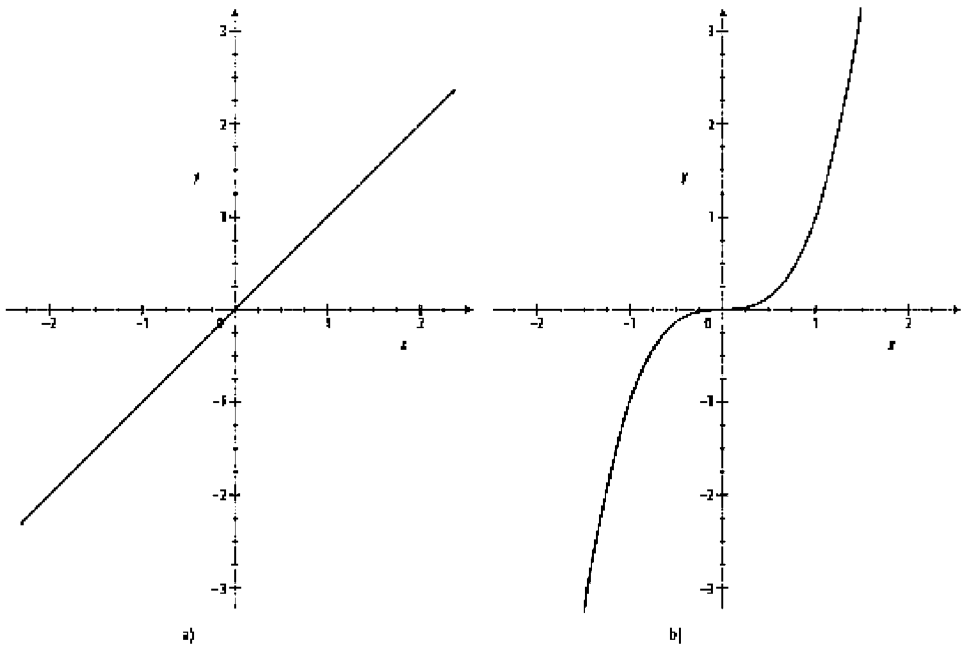


Figura 4.1 Gráficas de funciones impares. a) Gráfica de la función $f(x) = x$. b) Gráfica de la función $f(x) = x^3$.

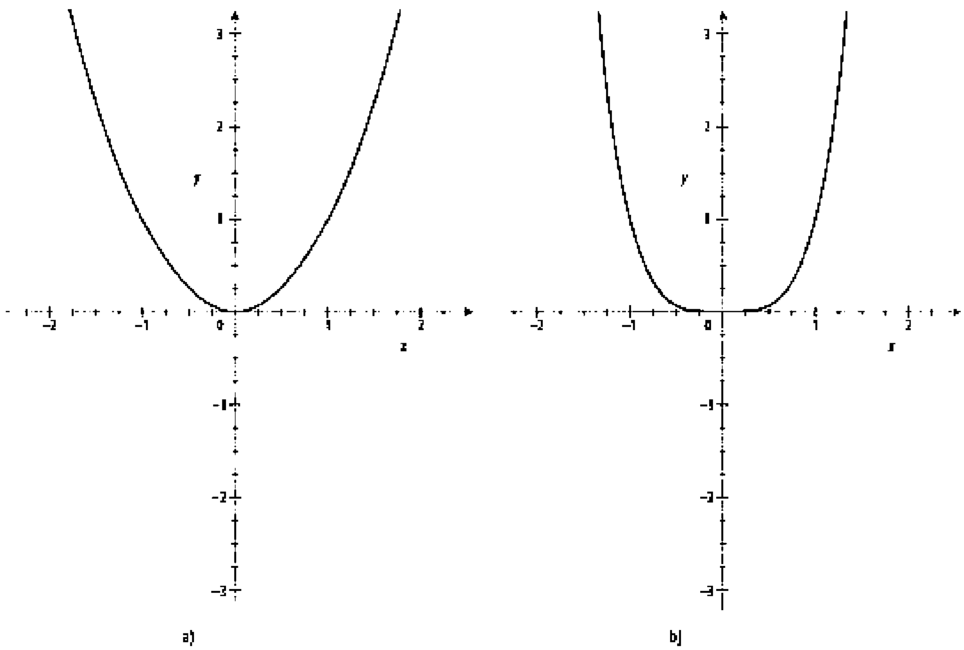


Figura 4.2 Gráficas de funciones pares. a) Gráfica de la función $f(x) = x^2$. b) Gráfica de la función $f(x) = x^4$.

Si $f(c) = 0$, entonces a c se le conoce como una raíz (o un cero) de la función polinomial $f(x)$.

4.2 División de polinomios

Como se ve en la sección 1.4, del capítulo 1, si un polinomio $g(x)$ es un factor de otro polinomio $f(x)$, entonces se dice que $f(x)$ es divisible entre $g(x)$. Así, por ejemplo, $x^2 - 1$ es divisible entre $x - 1$ y también entre $x + 1$. De otra manera, si un polinomio no es divisible entre otro, es posible emplear la técnica de la división larga para hallar el cociente y el residuo, como se desarrolla en el siguiente ejemplo (véanse también los ejemplos 15 y 16 del capítulo 1):

Ejemplo 1

Encontrar el cociente y el residuo de los polinomios

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 3 \text{ y } g(x) = x^2 + x - 1.$$

Solución

Primero, ordenamos los términos del dividendo y del divisor en potencias decrecientes de x. Enseguida, insertamos los términos con coeficiente 0 y usamos el esquema de división larga.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 5 \\ \hline
x^2 + x - 1 & 2x^4 - x^3 + \cdots + \cdots + 3 \\
 & \underline{-2x^4 - 2x^3 + 2x^2} \\
 & \quad -3x^3 + 2x^2 \\
 & \quad \underline{+3x^3 + 3x^2 - 3x} \\
 & \qquad 5x^2 - 3x + 3 \\
 & \qquad \underline{-5x^2 - 5x + 5} \\
 & \qquad\qquad -8x + 8
\end{array}$$

De esta manera, el cociente es $2x^2 - 3x + 5$ y el residuo es $-8x + 8$. Por tanto:

$$\frac{2x^4 - x^3 + 3}{x^2 + x - 1} = 2x^2 - 3x + 5 + \frac{-8x + 8}{x^2 + x - 1}$$

Es decir:

$$2x^4 - x^3 + 3 = (2x^2 - 3x + 5)(x^2 + x - 1) - 8x + 8$$

Por último, podemos comprobar esta igualdad desarrollando el lado derecho y corroborando que es igual al lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
&(2x^2 - 3x + 5)(x^2 + x - 1) - 8x + 8 \\
&= 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x^3 - 3x^2 + 3x + 5x^2 + 5x - 5 - 8x + 8 \\
&= 2x^4 - x^3 + 3
\end{aligned}$$

División algorítmica de polinomios

Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios, con $g(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$, tales que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

Es decir:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

Donde hay dos posibilidades para el polinomio $r(x)$; o bien, $r(x) = 0$ [en este caso se dice que $f(x)$ es divisible entre $g(x)$], o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $g(x)$.

Por tanto, es posible concluir que si $g(x)$ es de grado 1, entonces $r(x)$ es de grado 0 y, por consiguiente, el residuo es la función polinomial constante r.

Ejemplo 2

Encontrar el cociente y el residuo de dividir $3x^3 - 2x^2 + x - 6$ entre $x^2 + 2x - 1$, mediante el uso del método de división larga.

Solución

Primero, colocamos los polinomios en orden decreciente de potencias de x y luego procedemos con la división. Entonces:

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3x - 8 \\ \hline x^2 + 2x - 1 & \quad 3x^3 - 2x^2 + x - 6 \\ & -3x^3 - 6x^2 + 3x \\ \cline{2-2} & \qquad 0 - 8x^2 + 4x - 6 \\ & \qquad\quad +8x^2 + 16x - 8 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\quad 20x - 14 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es $3x - 8$ y el residuo es $20x - 14$.

Así que:

$$3x^3 - 2x^2 + x - 6 = (3x - 8)(x^2 + 2x - 1) + 20x - 14$$

Por último, desarrollando el lado derecho, se puede comprobar que coincide con el lado izquierdo.

Ejemplo 3

Encontrar el cociente y el residuo de los polinomios $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 3$ dividido entre $g(x) = x - 2$.

Solución

Como en el ejemplo anterior, primero colocamos los polinomios en orden decreciente de los exponentes de la variable x.

Entonces:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+x-4 \\ \hline
x-2 & x^3-x^2-6x+3 \\
 & -x^3+2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad x^2-6x \\
 & \quad\quad x^2+2x \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad\quad -4x+3 \\
 & \quad\quad\quad 4x-8 \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad -5
\end{array}
$$

En este caso, el cociente es $x^2 + x - 4$ y el residuo es el polinomio constante -5. Así que:

$$\frac{x^3-x^2-6x+3}{x-2}=x^2+x-4+\frac{-5}{x-2}$$

Es decir:

$$x^3-x^2-6x+3=\left(x^2+x-4\right)(x-2)-5$$

División sintética de polinomios

Como se estudia en la sección 1.4, "Expresiones algebraicas", del capítulo 1, cuando se realiza la división de un polinomio $f(x)$ entre un polinomio de la forma $x - c$, es conveniente utilizar el *método de división sintética*.

Ejemplo 4

Usar el método de división sintética para encontrar el cociente y el residuo de la división de polinomios del ejemplo anterior.

Solución

Como en este caso $c = 2$, primero ordenamos los coeficientes de $x^3 - x^2 - 6x + 3$ en el primer renglón de un arreglo de tres renglones y luego bajamos el primer coeficiente, en este caso 1. Enseguida multiplicamos por 2 (en este caso, $c = 2$) y lo ponemos en el segundo renglón, para sumarlo al -1, que es el coeficiente del segundo término $(-x^2)$. Acto seguido, escribimos el resultado en el siguiente lugar del tercer renglón y repetimos esta secuencia ($1 \times 2 = 2$, que ponemos abajo del -6, lo cual al sumar nos da -4, etc.) hasta llegar al último coeficiente del arreglo. Entonces:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ & & 2 & 2 & -8 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}$$

Como podemos ver, los primeros términos del tercer renglón (en este caso: 1, 1 y -4) son los coeficientes del cociente, mientras que el último término del tercer renglón (en este caso: -5) es el residuo. Es decir, al igual que en el ejemplo anterior, el cociente es $x^2 + x - 4$ y el residuo es -5.

Ahora, para continuar con el tema de estudio de este capítulo, resulta pertinente enunciar el teorema del residuo.

Teorema del residuo

Cuando un polinomio $f(x)$ se divide entre un binomio $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo 5

Demostrar el teorema del residuo.

Solución

Por el algoritmo de la división, sabemos que existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$, tales que:

$$f(x) = q(x)(x-c) + r(x)$$

Dado que el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $x - c$, es decir, menor que 1, entonces el grado de $r(x)$ debe ser 0. Así que $r(x)$ es una constante, llamémosla r.

De esta manera, para toda x tenemos que:

$$f(x) = q(x)(x-c) + r$$

En particular, sea $x = c$, así que

$$f(c) = q(c)(c-c) + r$$

Esto es:

$$f(c) = r$$

Así que:

$$f(x) = q(x)(x-c) + f(c)$$

En otras palabras, $f(c)$ es el residuo de dividir $f(x)$ entre $(x - c)$, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 6

Verificar el teorema del residuo cuando se divide el polinomio $x^3 - x^2 - 6x + 3$ entre $x - 2$.

Solución

Primero, evaluamos el polinomio dado en $x = 2$:

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 6(2) + 3 = -5$$

Como podemos observar, este coincide con el residuo encontrado en los dos ejemplos anteriores y da soporte al teorema del residuo.

Ejemplo 7

Usar el método de división sintética para calcular el residuo de la siguiente división y verificar el resultado usando el teorema del residuo.

$$\frac{2x^4 - 2x^2 + 8x}{x+3}$$

Solución

Primero, colocamos los coeficientes del primer polinomio en orden decreciente de los exponentes de x, agregando el cero para los exponentes que no están presentes. En este caso, $c = -3$, así que la división sintética queda:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 2 & 0 & -2 & 8 & 0 \\ & & -6 & 18 & -48 & 120 \\ \hline & 2 & -6 & 16 & -40 & 120 \end{array}$$

Como podemos ver, el cociente es $2x^3 - 6x^2 + 16x - 40$ y el residuo es 120.

Por otro lado, de acuerdo con el teorema del residuo, vemos que:

$$f(-3) = 2(-3)^4 - 2(-3)^2 + 8(-3) = 162 - 18 - 24 = 120$$

Así que este también coincide con el resultado anterior.

Ejemplo 8

Usar el método de división sintética para encontrar el cociente y el residuo cuando $2x^5 - 4x^3 - 7x^2 + 6x - 3$ se divide entre $x - 2$ y verificar el resultado usando el teorema del residuo.

Solución

Como en los ejemplos anteriores, primero ordenamos los coeficientes del primer polinomio en orden decreciente de potencias de x, agregando 0 para las potencias que no están presentes. En este caso, $c = 2$, así que la división sintética queda:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 2 & 0 & -4 & -7 & 6 & -3 \\ & & 4 & 8 & 8 & 2 & 16 \\ \hline & 2 & 4 & 4 & 1 & 8 & 13 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es $2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x + 8$ y el residuo es 13.

Por otro lado, $f(2) = 2(2)^5 - 4(2)^3 - 7(2)^2 + 6(2) - 3 = 64 - 32 - 28 + 12 - 3 = 13$, lo cual coincide con el teorema del residuo, que establece que si $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces $f(c) = r$ es el residuo.

Así, en este caso, tenemos que:

$$f(2) = 13$$

Ejemplo 9

Encontrar el cociente y el residuo de dividir $4x^3 - 2x + 7$ entre $x + \frac{1}{2}$.

Solución

Una vez más, primero usamos la división sintética, ordenando el polinomio dividendo en potencias decrecientes de x y agregando un cero en el término que falta para x^2. Entonces:

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 4 & 0 & -2 & 7 \\ & & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline & 4 & -2 & -1 & \frac{15}{2} \end{array}$$

Así que el cociente es $4x^2 - 2x - 1$ y el residuo es $\frac{15}{2}$.

Lo cual se verifica comprobando que:

$$4x^3 - 2x + 7 = (4x^2 - 2x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{15}{2}$$

Un corolario importante del teorema del residuo que vale la pena resaltar es el teorema del factor el cual establece que un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$, si y solo si $f(c) = 0$. Así que $x - c$ es un factor de un polinomio si y solo si c es una raíz del polinomio.

Ejemplo 10

Demostrar el teorema del factor.

Solución

Por el teorema del residuo sabemos que cuando $f(x)$ se divide entre $x - c$, el residuo es $f(c)$. Si c es un cero de $f(x)$, entonces $f(c) = 0$. De esta manera, por el teorema del factor tenemos que:

$$f(x) = q(x)(x - c) + f(c) = q(x)(x - c)$$

Esto significa que $x - c$ es un factor de $f(x)$.

De manera inversa, suponemos que $x - c$ es un factor de $f(x)$, así que cuando $f(x)$ se divide entre $x - c$, el residuo debe ser cero. Por el teorema del residuo, el residuo es $f(c)$, así que $f(c) = 0$.

Ejemplo 11

Usar el teorema del factor para verificar que $x - 2$ es un factor de $x^4 - 16$.

Solución

Sea $f(x) = x^4 - 16$, así que:

$$f(2) = (2)^4 - 16 = 16 - 16 = 0$$

Entonces, $x - 2$ es un factor de $f(x)$.

Ejemplo 12

Usar la fórmula cuadrática y el teorema del factor para factorizar:

a) $x^2 - 8x + 2$

b) $x^2 - 4x + 12$

Solución

a) Las raíces de $f(x) = x^2 - 8x + 2$, es decir, las soluciones de $x^2 - 8x + 2 = 0$, las encontramos usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = -8$ y $c = 2$.

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-8}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{56}}{2} = 4 \pm \sqrt{14}$$

Como los ceros (es decir, las raíces) son $4 \pm \sqrt{14}$, los factores de $f(x)$ son:

$$x - \left(4 + \sqrt{14}\right) \text{ y } x - \left(4 - \sqrt{14}\right)$$

Así que el polinomio original se puede factorizar como:

$$x^2 - 8x + 2 = \left(x - 4 + \sqrt{14}\right)\left(x - 4 - \sqrt{14}\right) = \left[(x - 4) + \sqrt{14}\right]\left[(x - 4) - \sqrt{14}\right]$$

b) Como en el inciso anterior, usamos la fórmula cuadrática para hallar los ceros del polinomio $f(x) = x^2 - 4x + 12$; es decir, las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 4x + 12 = 0, \text{ con } a = 1, b = -4 \text{ y } c = 12.$$

Entonces:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-48}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-32}}{2} = 2 \pm \sqrt{8}i = 2 \pm 2\sqrt{2}i$$

Como las raíces son $2 \pm 2\sqrt{2}i$, los factores de $f(x)$ son:

$$x - \left(2 + 2\sqrt{2}i\right) \text{ y } x - \left(2 - 2\sqrt{2}i\right)$$

De esta manera, podemos factorizar el polinomio original como:

$$x^2 - 4x + 12 = \left(x - 2 + 2\sqrt{2}i\right)\left(x - 2 - 2\sqrt{2}i\right) = \left[(x-2) + 2\sqrt{2}i\right]\left[(x-2) - 2\sqrt{2}i\right]$$

Ejercicios propuestos

1. Usa el método de división larga para hallar el cociente y el residuo de dividir $x^3 - x^2 + 12x + 25$ entre $x - 3$.
2. Encuentra el cociente y el residuo de dividir $\frac{f(x)}{g(x)}$, si $f(x) = 6x^4 - 15x^3 + 9x^2 - 14$ y $g(x) = 2x^2 - x - 3$.
3. Encuentra el cociente y el residuo de dividir $\frac{f(x)}{g(x)}$, si $f(x) = 8x^3 - 14x^2 - 9x + 7$ y $g(x) = 4x - 1$.
4. Encuentra el cociente y el residuo de dividir
$$8x^5 - 8x^4 - 24x^3 + 29x^2 + 13x - 13 \text{ entre } 2x^2 + x - 4.$$
5. Encuentra el cociente y el residuo de dividir
$$3x^5 - 7x^3 + 5x^2 + 6x - 6 \text{ entre } x^3 - x + 2.$$
6. Usa el método de división sintética para hallar el cociente y el residuo de dividir los polinomios del ejercicio 1: $x^3 - x^2 + 12x + 25$ entre $x - 3$.
7. Usa el método de división sintética para hallar el cociente y el residuo de dividir $x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 8x - 8$ entre $x + 2$.
8. Usa el método de división sintética para hallar el cociente y el residuo de dividir $2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ entre $x - \frac{1}{2}$.
9. Encuentra el cociente y el residuo de dividir $3x^4 + 8x^3 - x^2 + 7x + 2$ entre $x + \frac{2}{3}$.
10. Encuentra el cociente y el residuo de dividir $x^4 - 16$ entre $x^2 + 3x + 1$.

11. Encuentra el cociente y el residuo de dividir $x^3 - 3x^2 + x + 5$ entre $x - 2$.
12. Verifica el teorema del residuo cuando se divide el polinomio $2x^3 - x^2 + 5x + 2$ entre $x - 2$.
13. Verifica el teorema del residuo cuando se divide el polinomio $2x^4 + 5x^3 - 2x - 8$ entre $x + 3$.
14. Usa el teorema del factor para verificar que $x - 3$ es un factor de $x^3 - 27$.
15. Usa el teorema del factor para verificar que $x + 4$ es un factor de
$$x^3 + 2x^2 - 5x + 12.$$
16. Usa la fórmula cuadrática y el teorema del factor para factorizar $x^2 + 5x - 3$.
17. Usa la fórmula cuadrática y el teorema del factor para factorizar $x^2 + 9x - 6$.
18. Usa la fórmula cuadrática y el teorema del factor para factorizar $x^2 + 7x - 2$.
19. Usa la fórmula cuadrática y el teorema del factor para factorizar $x^2 - 6x + 10$.

4.3 Raíces de polinomios

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de grado positivo, con coeficientes complejos, tiene por lo menos una raíz compleja.

Como consecuencia del teorema fundamental del álgebra se tienen los siguientes corolarios:

1. Todo polinomio de grado positivo n se puede factorizar de la forma:
$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$
Donde a_n es el coeficiente principal de $P(x)$ y las r_i no son necesariamente distintas. Si en la factorización $x - r_i$ ocurre m veces, entonces se dice que r_i es un cero de multiplicidad m. Sin embargo, no necesariamente es posible encontrar la factorización usando métodos algebraicos exactos.
2. Un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces complejas. Si una raíz de multiplicidad m se cuenta como m raíces, entonces un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces.

Ejemplo 13

Escribir el polinomio $P(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$ como el producto de factores de primer grado, dado que 3 es una raíz de multiplicidad 2.

Solución

Dado que 3 es una raíz de multiplicidad 2, existe un polinomio $g(x)$ tal que $P(x) = (x-3)^2 g(x)$. Para encontrar $g(x)$, usamos el esquema de división sintética entre $x - c$, con $c = 3$. Así:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
3 & 1 & -7 & 13 & 3 & -18 \\
 & & 3 & -12 & 3 & 18 \\
\hline
3 & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \\
 & & 3 & -3 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & 0 &
\end{array}
$$

Así que

$$P(x) = (x-3)(x-3)(x^2 - x - 2) = (x-3)(x-3)(x-2)(x+1)$$

Ejemplo 14

Escribir el polinomio $P(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16$ como producto de factores de primer grado, sabiendo que 2 es una raíz de multiplicidad 2.

Solución

Dado que 2 es una raíz de multiplicidad 2, existe un polinomio $g(x)$ tal que $P(x) = (x-2)^2\, g(x)$. Entonces, para encontrar $g(x)$ usamos el esquema de división sintética entre $x - 2$:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -9 & 28 & -36 & 16 \\
 & & 2 & -14 & 28 & -16 \\
\hline
2 & 1 & -7 & 14 & -8 & 0 \\
 & & 2 & -10 & 8 & \\
\hline
 & 1 & -5 & 4 & 0 &
\end{array}
$$

Así que $P(x) = (x-2)(x-2)(x^2 - 5x + 4) = (x-2)(x-2)(x-1)(x-4)$.

Teoremas de las raíces de un polinomio

1. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes *reales* y si $z = a - bi$ es una raíz compleja de $P(x)$, entonces el complejo conjugado $\overline{z} = a - bi$ también es una raíz de $P(x)$. Esto es, las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales ocurren en pares de complejos conjugados.
2. Cualquier polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales se puede factorizar por completo usando factores lineales y cuadráticos, multiplicados por el coeficiente principal del polinomio. Sin embargo, no necesariamente es posible encontrar la factorización usando métodos algebraicos exactos.

3. Si $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes *enteros* y $r=\frac{p}{q}$ es una raíz *racional* de $P(x)$, en los términos más bajos, entonces P debe ser un factor del término constante a_0 y q debe ser un factor del coeficiente principal a_n.

Ejemplo 15

Escribir el polinomio $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 9x - 30$ como producto de factores de primer grado, sabiendo que $-2 - i$ es una raíz, y encontrar las raíces de $P(x)$.

Solución

Dado que $P(x)$ tiene coeficientes reales y $-2 - i$ es una raíz, esto significa entonces que $-2 + i$ también es una raíz. Por tanto, existe un polinomio $g(x)$ tal que

$$P(x) = [x-(-2-i)][x-(-2+i)]g(x).$$

Entonces, para encontrar $g(x)$ usamos el esquema de división sintética entre $x - c$, con $c = -2 - i$ y $c = -2 + i$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2-i & 3 & 6 & -9 & -30 \\
 & & -6-3i & -3+6i & 30 \\
\hline
-2+i & 3 & -3i & -12+6i & 0 \\
 & & -6+3i & 12-6i & \\
\hline
 & 3 & -6 & 0 &
\end{array}$$

Así que

$$P(x) = [x-(-2-i)][x-(-2+i)](3x-6)$$

Las raices de $P(x)$ son: $-2 - i$, $-2 + i$ y 2.

Ejemplo 16

Encontrar un polinomio $P(x)$ del menor grado posible, con coeficientes reales, tal que -1 es una raíz de multiplicidad 3, 3 es una raíz de multiplicidad 2, 0 es una raíz y $4 + 2i$ es una raíz.

Solución

Dado que $P(x)$ tiene coeficientes reales y que $4 + 2i$ es una raíz, entonces $4 - 2i$ también es una raíz. Por tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
P(x) &= a[x-(-1)]^3(x-3)^2(x-0)[x-(4+2i)][x-(4-2i)] \\
&= a(x+1)^3(x-3)^2 x[(x-4-2i)][(x-4)+2i] \\
&= a(x+1)^3(x-3)^2 x(x^2-8x+20)
\end{aligned}$$

Donde a es un número real distinto de cero.

Ejemplo 17

Encontrar un polinomio $P(x)$ del menor grado posible, con coeficientes enteros, tal que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{-2}{5}$ sean raíces (ceros) del polinomio.

Solución

En este caso, escribimos:

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left[x-\left(-\frac{2}{5}\right)\right] \\
&= a\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{5}\right) \\
&= a\left(\frac{2x-1}{2}\right)\left(\frac{3x-2}{3}\right)\left(\frac{5x+2}{5}\right) \\
&= 30b\left(\frac{2x-1}{2}\right)\left(\frac{3x-2}{3}\right)\left(\frac{5x+2}{5}\right) \\
&= b(2x-1)(3x-2)(5x+2)
\end{aligned}$$

Donde b es un número entero distinto de cero.

Teoremas usados para localizar raíces de un polinomio

1. Teorema del valor intermedio: Dado un polinomio $f(x)$ con $a < b$, si $f(a) \neq f(b)$, entonces $f(x)$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo abierto (a, b).

2. Corolario: Para un polinomio $f(x)$, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos *opuestos*, entonces $f(x)$ tiene por lo menos una raíz entre a y b.

   Esto significa, por una parte, que si los términos en el tercer renglón de la división sintética de $f(x)$ entre $(x - r)$ son todos números positivos para alguna $r > 0$, entonces r es un límite superior para las raíces de $f(x)$; es decir, no hay raíces mayores que r.

3. Si los términos en el tercer renglón de la división sintética de $f(x)$ entre $(x - r)$ alternan en signo para alguna $r < 0$, entonces r es un límite inferior para las raíces de $f(x)$; es decir, no hay raíces menores que r.

   Cabe resaltar que todas las funciones polinomiales son funciones continuas; es decir, que sus gráficas se pueden trazar sin ninguna interrupción. Una función polinomial puede tener varios puntos máximos o mínimos locales llamados usualmente puntos extremos de la función.

   En un punto extremo, la función $f(x)$ cambia de una función creciente a una función decreciente, o viceversa. Asimismo, se cumple que un polinomio de grado n tiene a lo más $n - 1$ puntos extremos.

Ejemplo 18

Probar que $f(x) = 2x^3 - 8$ tiene una raíz entre 1 y 2.

Solución

Primero, evaluamos $f(1) = 2(1)^3 - 8 = 2 - 8 = -6$ y $f(2) = 2(2)^3 - 8 = 16 - 8 = 8$. Vemos que $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos opuestos, así que el polinomio $f(x)$ tiene al menos una raíz entre 1 y 2.

Ejemplo 19

Mostrar que $f(x) = 2x^5 - 2x^3 + 6x^2 + 2x + 8$ tiene una raíz entre -2 y -1.

Solución

Una manera en la que podemos proceder es usando el método de división sintética entre $x - c$, con $c = -2$ y $c = -1$, para evaluar $f(-2)$ y $f(-1)$. Entonces:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 2 & 0 & -2 & 6 & 2 & 8 \\ & & -4 & 8 & -12 & 12 & -28 \\ \hline & 2 & -4 & 6 & -6 & 14 & -20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 2 & 0 & -2 & 6 & 2 & 8 \\ & & -2 & 2 & 0 & -6 & 4 \\ \hline & 2 & -2 & 0 & 6 & -4 & \mathbf{12} \end{array}$$

Como podemos ver $f(-2) = -20$ y $f(-1) = 12$. Como $f(-2)$ y $f(-1)$ tienen signos opuestos, por el corolario del teorema del valor intermedio, sabemos que el polinomio $f(x)$ tiene por lo menos una raíz entre -2 y -1.

Ejemplo 20

Encontrar el entero positivo más pequeño y el entero negativo más grande que constituyan, respectivamente, los límites superior e inferior de las raíces del polinomio $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3x - 6$.

Solución

Usamos el método de división sintética entre $x - c$, con c = valores sucesivos de enteros, desde un número negativo apropiado hasta un número positivo apropiado (pero, en este caso solo se muestra el último renglón de la división sintética):

	1	−2	−4	3	−6
−4 |	1	−6	20	−77	302
−3 |	1	−5	11	−30	84
−2 |	*1*	*−4*	*4*	*−5*	*4*
−1 |	1	−3	−1	4	*−10*
0 |	1	−2	−4	3	−6
1 |	1	−1	−5	−2	−8
2 |	1	0	−4	−5	−16
3 |	1	1	−1	0	*−6*
4 |	*1*	*2*	*4*	*19*	*70*
5 |	1	3	11	58	284

Dado que los números del último renglón de la división sintética entre $x + 2$ alternan de signo y que los números del último renglón de la división sintética entre $x + 1$ no alternan de signo, podemos concluir que -2 es el entero negativo más grande, el cual es un límite superior para las raíces de $f(x)$; esto significa que no hay raíces menores que -2.

Dado que los números del último renglón de la división sintética entre $x - 4$ son todos positivos y que los números del último renglón de la división sintética entre $x - 3$ no son todos positivos, concluimos que 4 es el entero positivo más pequeño, el cual constituye un límite superior para las raíces de $f(x)$; es decir, no hay raíces mayores que 4.

Para corroborar estas afirmaciones, realizamos la gráfica anexa de

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3x - 6$ (véase la figura 4.3).

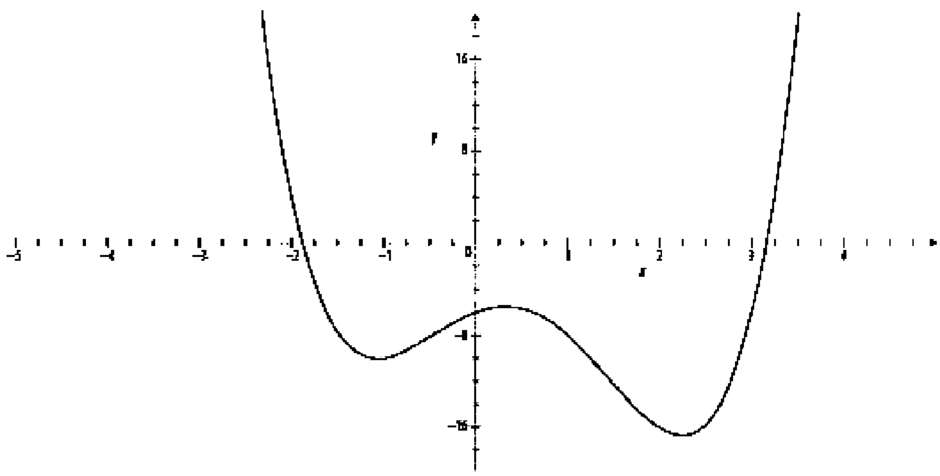


Figura 4.3 Gráfica de la función $f(x) = x^4 - 2x^4 - 4x^2 + 3x - 6$.

Ejemplo 21

Usar el corolario del teorema del valor medio para localizar, entre enteros sucesivos, las raíces de $f(x)$ del ejemplo anterior:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3x - 6$$

Solución

A partir de las divisiones sintéticas desarrolladas en el problema anterior, vemos que $f(-2)$ y $f(-1)$ tienen signos opuestos, así que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $(-2, -1)$. De manera análoga, como $f(3)$ y $f(4)$ tienen signos opuestos, concluimos que $f(x)$ tiene un cero entre 3 y 4 (véase la figura 4.3). Como podemos observar, las otras dos raíces de $f(x)$ son complejas.

Ejemplo 22

Usar el corolario del teorema del valor medio para localizar, entre enteros sucesivos, las raíces del polinomio $f(x) = x^5 - 2x^3 + 8x^2 - 4$.

Solución

Comenzamos usando el método de división sintética entre $x - c$, con c = valores sucesivos de enteros desde un número negativo apropiado hasta un número positivo apropiado. En este caso, solo mostraremos el último renglón de la división sintética:

	1	0	−2	8	0	−4
−3|	1	−3	7	−13	39	*−121*
−2|	1	−2	2	4	−8	*12*
−1|	1	−1	−1	9	−9	*5*
0|	1	0	−2	8	0	*−4*
1|	1	1	−1	7	7	*3*
2|	1	2	2	12	24	44
3|	1	3	7	29	87	257

Como podemos ver, $f(-3)$ y $f(-2)$ tienen signos opuestos, así que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $(-3, -2)$. En este caso, -3 es un límite inferior para las raíces reales negativas.

Del mismo modo, $f(-1)$ y $f(0)$ tienen signos opuestos; así que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $(-1, 0)$. También $f(0)$ y $f(1)$ tienen signos opuestos, así que $f(x)$ tiene otra raíz en el intervalo $(0, 1)$. No se pueden aislar otras raíces reales positivas a partir de los datos de la tabla, así que 2 es un límite superior para las raíces reales positivas (véase la figura 4.4). Es importante resaltar que las otras dos raíces de $f(x)$ son complejas.

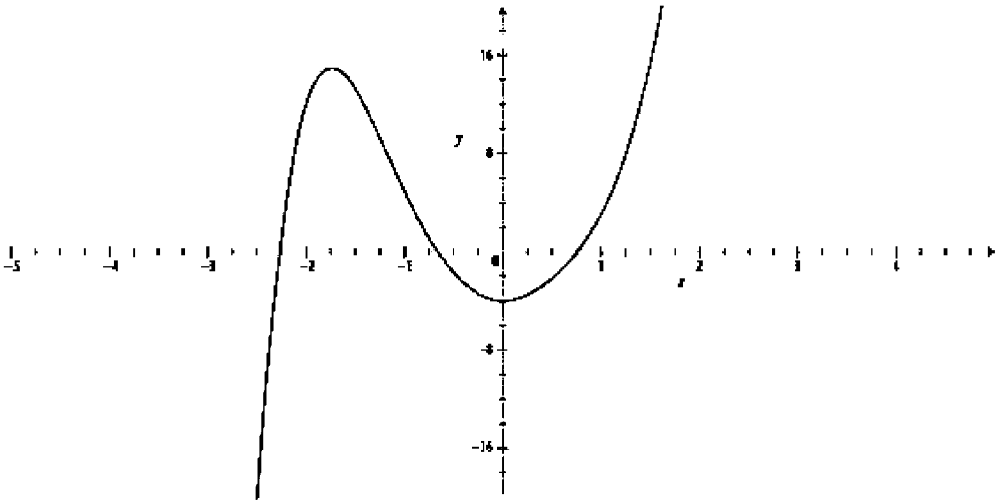


Figura 4.4 Gráfica de la función $f(x) = x^5 - 2x^4 + 8x^2 - 4$.

Ejemplo 23

Encontrar las raíces del polinomio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

Solución

A partir del teorema de las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros, podemos establecer que las raíces racionales posibles de $f(x)$ son:

$$\frac{\text{Factores de } -12}{\text{Factores de } 1} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12}{\pm 1} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

Ahora, usamos el método de división sintética entre $x - c$, con $c =$ enteros positivos sucesivos a partir de esta lista (solo se muestra el último renglón de la división sintética):

	1	3	−4	−12
−4 |	1	−1	0	−12
−3 |	1	0	−4	0
−2 |	1	1	−6	0
−1 |	1	2	−6	−6
0 |	1	3	−4	−12
1 |	1	4	0	−12
2 |	1	5	6	0
3 |	1	6	14	30

Como podemos ver, -3, -2 y 2 son ceros de $f(x)$. Además, -4 es un límite superior para los ceros reales negativos de $f(x)$ y 3 es un límite superior para los ceros reales positivos de $f(x)$.

Por tanto, $f(x) = (x + 3)(x + 2)(x - 2)$. Véase más adelante la figura 4.10.

Ejemplo 24

Encontrar las raíces del polinomio $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

Solución

A partir del teorema de las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros, tenemos que las raíces racionales posibles de $f(x)$ son:

$$\frac{\text{Factores de 6}}{\text{Factores de 2}} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6}{\pm 1, \pm 2} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \pm 6 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Ahora, usamos el método de división sintética entre $x - c$, con c = números sucesivos a partir de esta lista. En este caso, solo mostramos el último renglón de la división sintética:

	2	-3	-11	6
-3	2	-9	16	-42
-2	2	-7	3	0
-1	2	-5	-6	12
0	2	-3	-11	6
1	2	-1	-12	-6
2	2	1	-9	-12
3	2	3	-2	0
$\frac{1}{2}$	2	-2	-12	0

Como podemos ver -2, $\frac{1}{2}$ y 3 son raíces de $f(x)$. Además, $f(0) = 6$ y $f(1) = -6$ tienen signos opuestos, lo cual implica que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 1)$, que de acuerdo con la lista anterior para las raíces posibles de $f(x)$, esta raíz debe ser $\frac{1}{2}$.

A fin de comprobar esto, usamos la división sintética con $c = \frac{1}{2}$ (véase el último renglón de la división sintética anterior). De esta manera, tenemos que:

$$f(x) = (2x-1)(x+2)(x-3)$$

Solución de ecuaciones polinomiales y gráficas de polinomios

A continuación se presentan algunas afirmaciones que son equivalentes:

1. c es una raíz de $P(x)$.
2. c es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
3. $x - c$ es un factor de $P(x)$.
4. Si c es un número real, la gráfica $y = P(x)$ interseca al eje x en el punto c.

Gráfica de una función polinomial para la cual se pueden encontrar todos sus factores

Para la realización de una gráfica de una función polinomial, es conveniente seguir los pasos que se citan a continuación:

1. Se escribe el polinomio en términos de todos sus factores.
2. Se determina el comportamiento de los signos del polinomio a partir de los signos de sus factores.
3. Se recomienda formar una tabla de valores de la función.
4. Se construye un bosquejo de la gráfica del polinomio con una curva suave.

Ejemplo 25

Construir las gráficas de las siguientes funciones polinomiales:

a) $f(x) = 2x^4 + 4$

b) $f(x) = (x + 2)^3$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)^5 + 8$

d) $f(x) = -3(x + 1)^2 - 2$

Solución

a) La gráfica de $f(x) = 2x^4 + 4$ es similar a la gráfica de $f(x) = x^4$, solo que la primera se estira por un factor de 2 en el eje de las y, y se desplaza 4 unidades hacia arriba (véase la figura 4.5).

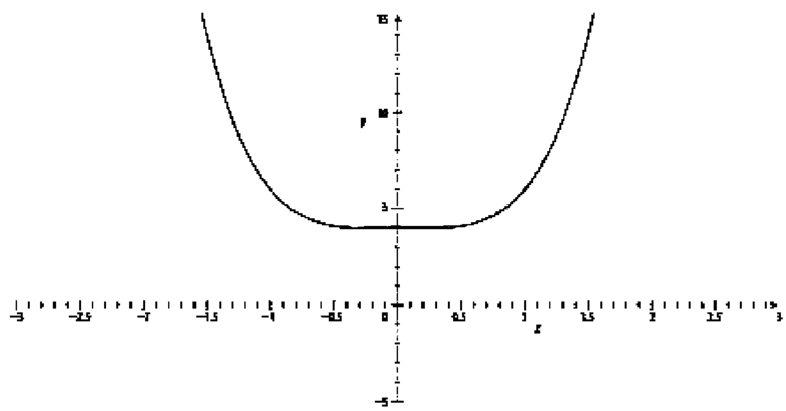


Figura 4.5 Gráfica de la función $f(x) = 2x^4 + 4$.

b) La gráfica de $f(x) = (x + 2)^3$ es similar a la gráfica de $f(x) = x^3$, desplazada 2 unidades hacia la izquierda (véase la figura 4.6).

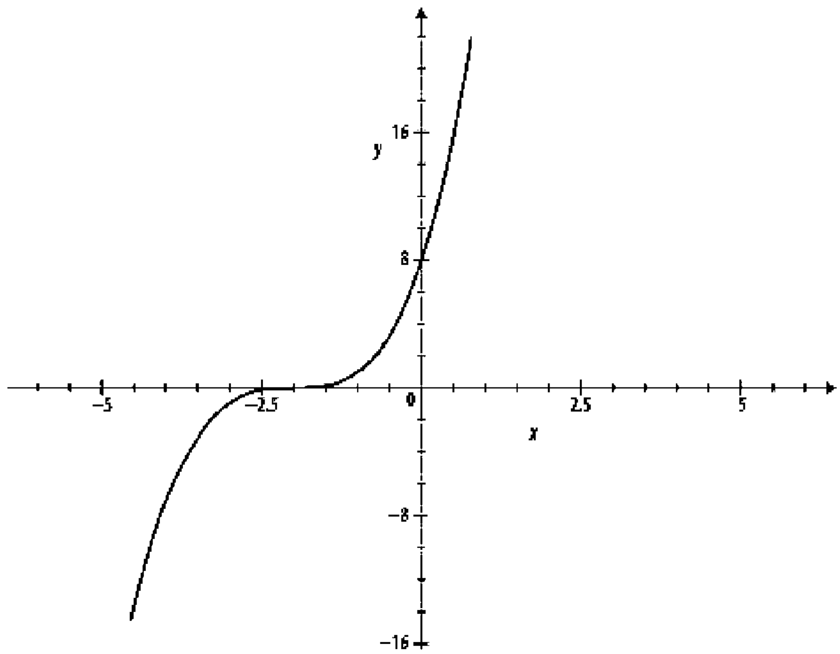


Figura 4.6 Gráfica de la función $f(x) = (x + 2)^3$.

c) La gráfica de $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^5 + 8$ es similar a la gráfica de $f(x) = x^5$, desplazada 3 unidades a la derecha, se reduce en un factor de 2 respecto del eje de las y, se refleja respecto del eje de las y, y se desplaza 8 unidades hacia arriba (véase la figura 4.7).

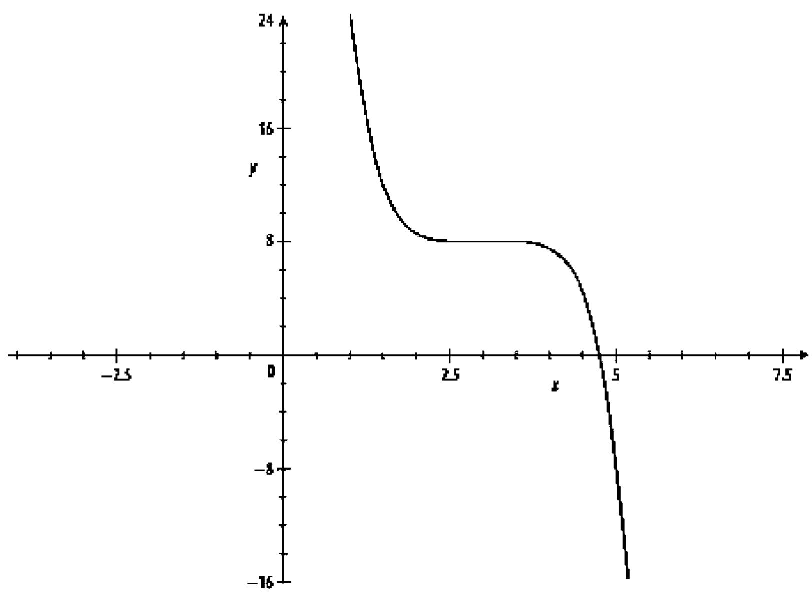


Figura 4.7 Gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^5 + 8$.

d) La gráfica de $f(x) = -3(x + 1)^2 - 2$ es similar a la gráfica de $f(x) = x^2$, desplazada 1 unidad a la izquierda, aumenta en un factor de 3 respecto del eje de las y, se refleja respecto del eje de las x, y se desplaza 2 unidades hacia abajo (véase la figura 4.8).

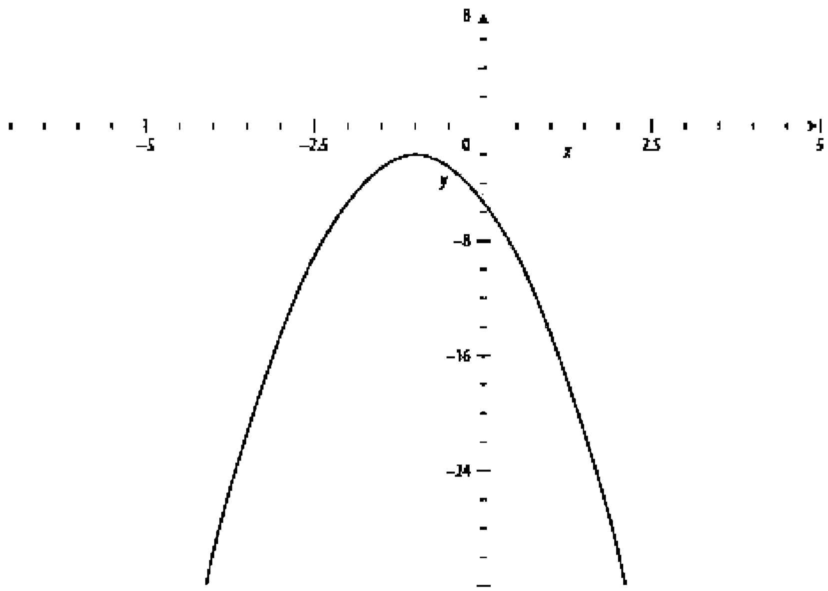


Figura 4.8 Gráfica de la función $f(x) = -3(x + 1)^2 - 2$.

Ejemplo 26

Construir un bosquejo de la gráfica $y = x(x + 2)(x - 1)$.

Solución

Comenzamos formando la "tabla de signos" del polinomio, como se muestra a continuación. En esta, primero notamos que las raíces del polinomio son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$. Luego, dibujamos el eje de las x como una recta, con el eje positivo a la derecha, y marcamos sobre este eje las raíces del polinomio. De esta manera, estaremos formando intervalos abiertos alrededor de las raíces.

A continuación marcamos en la tabla el signo de cada uno de los factores del polinomio en los intervalos que hemos identificado. Así pues, vemos que $x < 0$ en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$. Sin embargo, $x > 0$ en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$, como podemos observar en el primer renglón de la tabla de signos. De la misma manera, el factor $(x + 2) < 0$ en el intervalo $(-\infty, -2)$, pero $(x + 2) > 0$ en los intervalos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. Ver el segundo renglón de la tabla de signos.

Finalmente, el último factor del polinomio, $(x - 1) < 0$ en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$, pero $(x - 1) > 0$ en el intervalo $(1, \infty)$ (tercer renglón de la tabla de signos).

Tabla 4.1

signo de x	$-$	$-$	$+$	$+$
signo de $(x+2)$	$-$	$+$	$+$	$+$
signo de $(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$
signo del resultado	$-$	$+$	$-$	$\boxed{+}$

$x=-2$ $\quad$ $x=0$ $\quad$ $x=1$

El último renglón de la tabla de signos es el signo del polinomio $f(x)$; es decir, el signo del producto de cada uno de los factores que conforman al polinomio.
En resumen:

- $f(x) = 0$ en $x = -2, 0$ y 1
- $f(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$
- $f(x) > 0$ en $(-2, 0)$
- $f(x) < 0$ en $(0, 1)$
- $f(x) > 0$ en $(1, \infty)$

Para ayudarnos a construir la gráfica de $f(x)$, es conveniente construir una tabla de valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a los ceros del polinomio, como se muestra en la tabla 4.2:

Tabla 4.2

x	-3	-2	-1	0	0.5	1	2
$y = f(x)$	-12	0	-2	0	-0.625	0	8

Así que la gráfica de $y = f(x)$ *vs.* x, queda como se muestra en la figura 4.9.

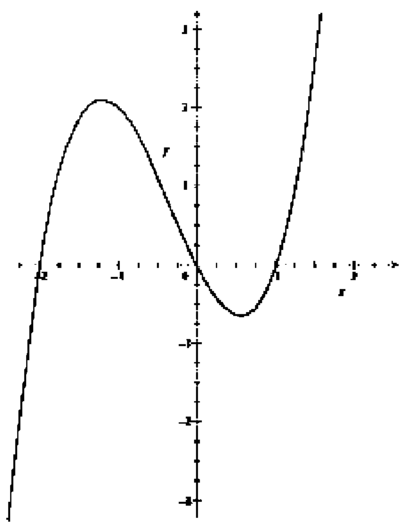


Figura 4.9 Gráfica del polinomio $f(x) = x(x+2)(x-1)$.

Ejemplo 27

Construir la gráfica del polinomio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

Solución

En el ejemplo 23 vimos que $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x-2)(x+2)(x+3)$. Así que ya sabemos que las raíces de $f(x)$ son $-3, -2$ y 2.

Ya en el ejemplo anterior, pudimos observar el signo de cada uno de los factores del polinomio en cada uno de los intervalos alrededor de las raíces. Así que

- $(x-2) < 0$ en el intervalo $(-\infty, 2)$
- $(x-2) > 0$ en el intervalo $(2, \infty)$
- $(x+2) < 0$ en el intervalo $(-\infty, -2)$
- $(x+2) > 0$ en el intervalo $(-2, \infty)$
- $(x+3) < 0$ en el intervalo $(-\infty, -3)$
- $(x+3) > 0$ en el intervalo $(-3, \infty)$

Con esta información, ya estamos en posibilidad de construir la *tabla de signos* del polinomio. De esta manera, tenemos:

Tabla 4.3

signo de $(x-2)$	$-$		$-$		$-$		$+$
signo de $(x+2)$	$-$		$-$		$+$		$+$
signo de $(x+3)$	$-$		$+$		$+$		$+$
signo del resultado	$-$		$+$		$-$		$+$
		$x=-3$		$x=-2$		$x=2$	

Como podemos ver, el último renglón de la tabla de signos es el signo del polinomio $f(x)$; es decir, el signo del producto de cada uno de los factores que conforman al polinomio.

En resumen:

- $f(x) = 0$ en $x = -3, -2$ y 2
- $f(x) < 0$ en $(-\infty, -3)$
- $f(x) > 0$ en $(-3, -2)$
- $f(x) < 0$ en $(-2, 2)$
- $f(x) > 0$ en $(2, \infty)$

Para ayudarnos a construir la gráfica de $f(x)$ es conveniente construir una tabla de valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a las raíces del polinomio, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4.4

x	-4	-3	-2.5	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-12	0	1.125	0	-6	-12	-12	0	30

Así que la gráfica de $y = f(x)$ *vs.* x, que vamos a construir queda como se muestra en la figura 4.10.

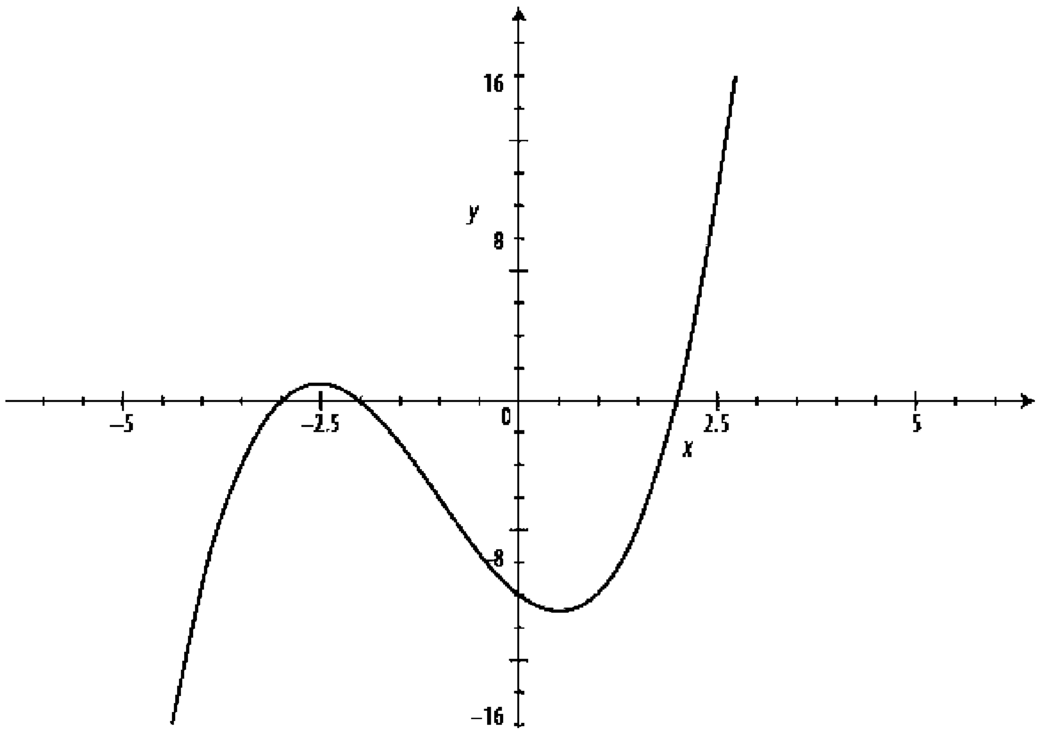


Figura 4.10 Gráfica del polinomio $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 3)$.

Ejercicios propuestos

20. Escribe el polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 - 18x^2 + 32x + 96$ como producto de factores de primer grado, sabiendo que **4** es una raíz de multiplicidad 2.

21. Escribe el polinomio $P(x) = x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 80x - 75$ como producto de factores de primer grado, sabiendo que -5 es una raíz de multiplicidad 2.

22. Encuentra un polinomio $P(x)$ del menor grado posible con coeficientes enteros, tal que -2 es una raíz de multiplicidad 2, y 3 y 1 son raíces de $P(x)$.

23. Encuentra un polinomio $P(x)$ del menor grado posible con coeficientes enteros, tal que 2 es una raíz de multiplicidad 3, -1 es una raíz de multiplicidad 2 y 4 es una raíz del $P(x)$.

24. Escribe el polinomio $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 11x + 5$ como producto de factores de primer grado, sabiendo que $2 + i$ es una raíz de $P(x)$, y encuentra todas los ceros de $P(x)$.

25. Escribe el polinomio $P(x) = 4x^3 - 26x^2 + 64x - 26$ como producto de factores de primer grado, sabiendo que $3 - 2i$ es una raíz de $P(x)$ y encuentra todos las raíces de $P(x)$.

26. Encuentra un polinomio $P(x)$ del menor grado posible, con coeficientes reales, tal que -2 es una raíz de multiplicidad 3, 1 es una raíz de multiplicidad 2, 0 es una raíz y $1 - 3i$ es una raíz.

27. Encuentra un polinomio $P(x)$ del menor grado posible, con coeficientes enteros, tal que 1, -2 y $\frac{2}{3}$ son raíces del polinomio.

28. Encuentra un polinomio $P(x)$ del menor grado posible, con coeficientes enteros, tal que $\frac{1}{4}$, $\frac{-2}{5}$ y $\frac{-3}{2}$ son raíces del polinomio.

29. Prueba que $f(x) = 3x^4 - 17$ tiene una raíz entre 1 y 2.

30. Muestra que $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 8$ tiene una raíz entre -1 y 0.

31. Muestra que $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 6$ tiene una raíz entre -2 y -1.

32. Usa el corolario del teorema del valor intermedio para localizar, entre enteros sucesivos, las raíces de $f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 11x + 4$.

33. Usa el corolario del teorema del valor intermedio para localizar, entre enteros sucesivos, las raíces de $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 33x - 35$.

34. Usa el método de división sintética y el corolario del teorema del valor intermedio para localizar, entre enteros sucesivos, las raíces de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 8$.

35. Usa el método de división sintética y el corolario del teorema del valor intermedio para localizar, entre enteros sucesivos, las raíces de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 9x + 31$.

36. Localiza las raíces de $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$ entre enteros sucesivos.

37. Construye las gráficas de las siguientes funciones polinomiales:

   a) $f(x) = (x + 1)^4$

   b) $f(x) = \frac{1}{3}(4 - x)^3 + 2$

   c) $f(x) = 3x^5 - 5$

   d) $f(x) = -2(x + 3)^2 + 6$

38. Construye un bosquejo de la gráfica $f(x) = x(x + 3)(x - 2)$, siguiendo el procedimiento descrito en el ejemplo 26.

39. Construye un bosquejo de la gráfica $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 2)(x + 4)$, siguiendo el procedimiento descrito en el ejemplo 26.

40. Encuentra las raíces del polinomio $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ y realiza un bosquejo de su gráfica.
41. Encuentra las raíces del polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ y realiza un bosquejo de su gráfica.
42. Encuentra las raíces del polinomio $f(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 + 28x - 16$ y realiza un bosquejo de su gráfica.
43. Encuentra las raíces del polinomio $f(x) = 4x^5 - 12x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 9x + 2$ y realiza un bosquejo de su gráfica.
44. Encuentra las raíces del polinomio $f(x) = 8x^3 - 26x^2 + 5x + 3$ y realiza un bosquejo de su gráfica.
45. Encuentra las raíces del polinomio $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$ y realiza un bosquejo de su gráfica.
46. Encuentra las raíces del polinomio $f(x) = 5x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 36x^2 + 27x - 135$ y realiza un bosquejo de su gráfica.

Aplicaciones

47. Considera una cartulina rectangular como la que se muestra en la figura 4.11. Esta cartulina mide 18 cm de base y 24 cm de altura. Se desea construir una caja abierta usando la cartulina y cortando, en cada esquina, un cuadrado de lado x cm, de modo que, al doblar los lados restantes, se forme la caja. Si el volumen de la caja que se quiere elaborar debe ser de 640 cm³, ¿de qué tamaño, x, deben ser los cuadrados que se corten en las esquinas? (*Pista:* El volumen de la caja es el área de la base por la altura, cuya fórmula es: $V = A \cdot x$. Usa la división sintética y el teorema del residuo para $c = 2, 3, 4, 5$, para factorizar el polinomio resultante y hallar sus raíces.)

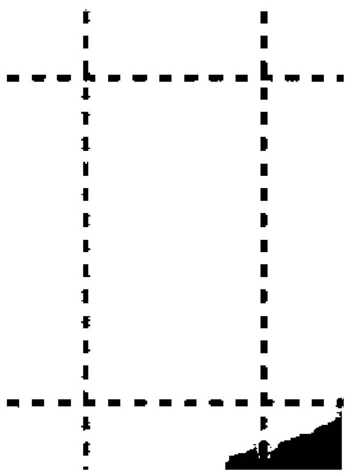


Figura 4.11

48. Se va a construir un silo para almacenar granos de trigo. Dicho silo estará formado por un cilindro vertical con un cono en su parte superior. La altura total del silo será $H = 100$ cm, el radio de la base del círculo será x y la altura del cono superior será $2x$. Si el volumen del cono debe ser $V = \frac{88\,000\pi}{3}$, ¿cuál debe ser el radio x de la base? Véase la figura 4.12. (*Pista:* Construye una función para el volumen del silo y relaciona el volumen con un polinomio $P(x)$. Usa la división sintética y el teorema del residuo con $c = 18, 20, 22$, etc., para factorizar el polinomio y hallar sus raíces.)

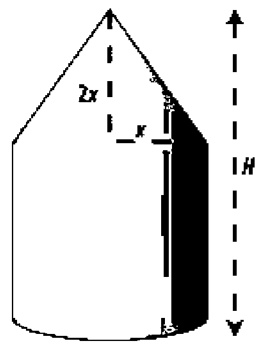


Figura 4.12

49. Se va a construir una tienda de campaña con una lona térmica aislante especial para resistir bajas temperaturas. Se planea que la tienda tenga una forma de pirámide con base cuadrada de lado x centímetros. En el centro de la pirámide se colocará un poste vertical de altura $h = 200$ cm, como se muestra en la figura 4.13. Con base en estos datos, encuentra la longitud, x, de un lado de la base cuadrada de la pirámide, para que la cantidad de tela que se utilice en los cuatro costados y en el piso de la tienda tenga un área total de $A_{tot} = 170\,000$ cm^2.

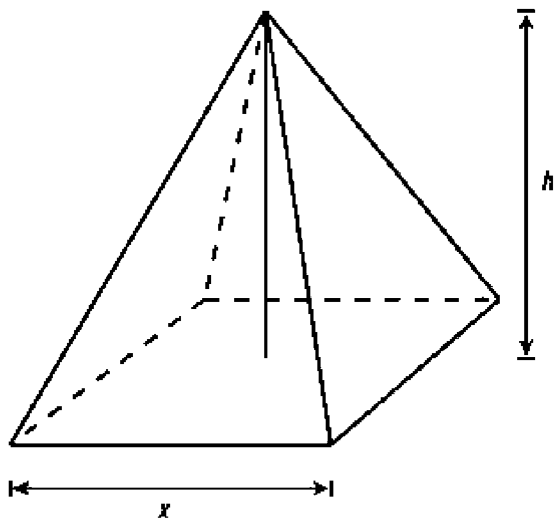


Figura 4.13 Pirámide cuadrangular de base x y altura h.

4.4 Funciones racionales

Definición de función racional

Una función racional es una función que puede especificarse mediante una regla de la forma:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales. El dominio de la función racional es el conjunto de los números reales para los cuales $Q(x) \neq 0$. Normalmente se considera que la expresión racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ está escrita en sus términos más bajos; es decir, $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores en común (véase más adelante el análisis de casos donde no se hace esta suposición).

Ejemplo 28

Como ejemplos de funciones racionales tenemos las siguientes:

- $f(x)=\frac{20}{x^2}$, con dominio $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
- $g(x)=\frac{x}{x^2-16}$, con dominio $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 4\}$
- $h(x)=\frac{(x+2)(x-3)}{x(x-1)(x+2)}$, con dominio $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 1, -2\}$
- $k(x)=\frac{4x}{x^2+5}$, con dominio $\{x \in \mathbb{R}\}$ (dado que el polinomio del denominador nunca es cero)

Gráfica de una función racional

La gráfica de una función racional se analiza en términos de su simetría, de su intersección con los ejes, de sus asíntotas y del comportamiento del *signo* de la función. Para la realización de la gráfica de una función racional se sugiere considerar los siguientes aspectos:

1. Si $Q(x)$ no tiene raíces reales, la gráfica de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una curva suave para toda x real.
2. Si $Q(x)$ tiene raíces reales, la gráfica de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ consiste en curvas suaves en cada intervalo abierto que no incluya alguna raíz. La gráfica tiene *asíntotas verticales* en cada raíz de $Q(x)$.

Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es una asíntota vertical en la gráfica de una función $f(x)$, si cuando x se aproxima a a mediante valores que son mayores o menores que a, el valor de la función crece indefinidamente mas allá de cualquier límite, o decrece más allá de todo límite. A continuación se muestran cuatro casos posibles para la *asíntota vertical* de una función y su notación común:

1. Si x se aproxima a a por la izquierda y $f(x)$ es positiva y se incrementa más allá de cualquier límite, decimos que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

Por tanto, la gráfica de $f(x)$ queda como se observa en la figura 4.14, donde $f(x)$ aumenta indefinidamente conforme x — 1 por la izquierda. Aquí se ha escogido $a = 1$, solo como ejemplo, pero la constante a puede ser cualquier número real.

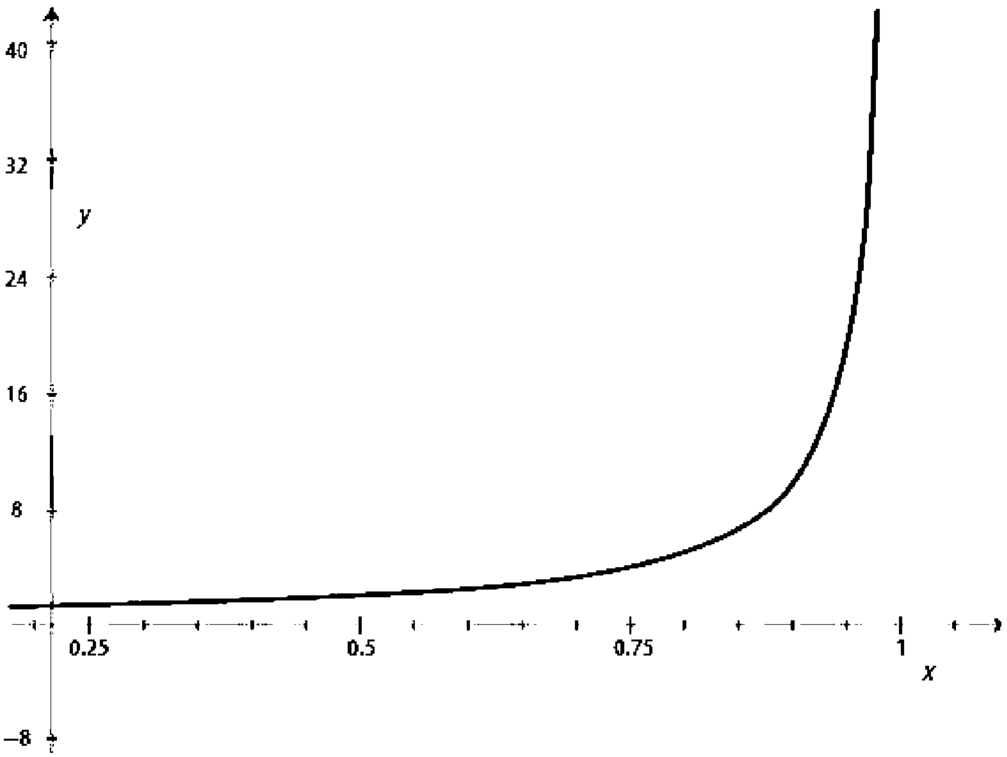


Figura 4.14

2. Si x se aproxima a a por la izquierda y $f(x)$ es negativa y disminuye más allá de cualquier límite, se dice que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por tanto, la gráfica de $f(x)$ queda como en la figura 4.15, donde $f(x)$ disminuye indefinidamente conforme $x \to 1$ por la izquierda.

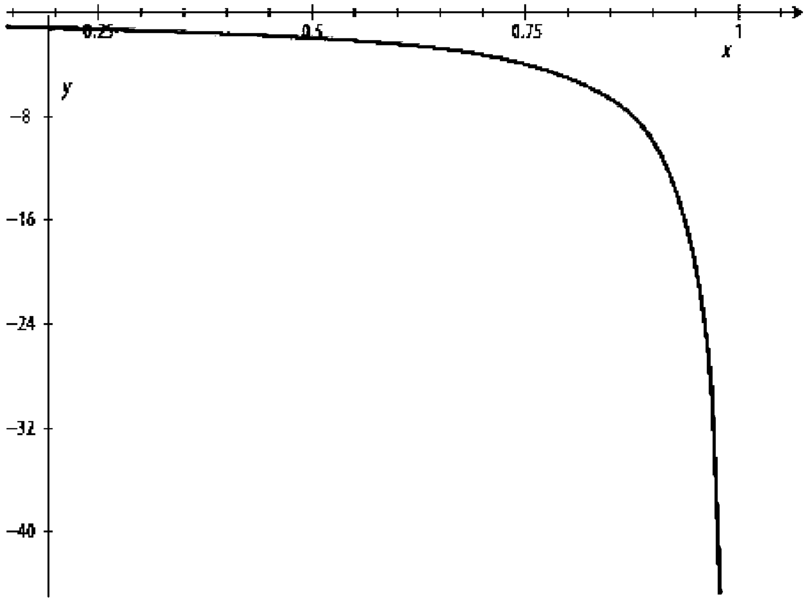


Figura 4.15

3. Si x se aproxima a a por la derecha y $f(x)$ es positiva, y esta se incrementa más allá de cualquier límite, se dice que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

Por tanto, la gráfica de $f(x)$ es similar a la que se representa en la figura 4.16, donde $f(x)$ aumenta indefinidamente conforme x — 1 por la derecha. Como antes, aquí también se eligió $a = 1$ como ejemplo; no obstante a puede ser cualquier número real.

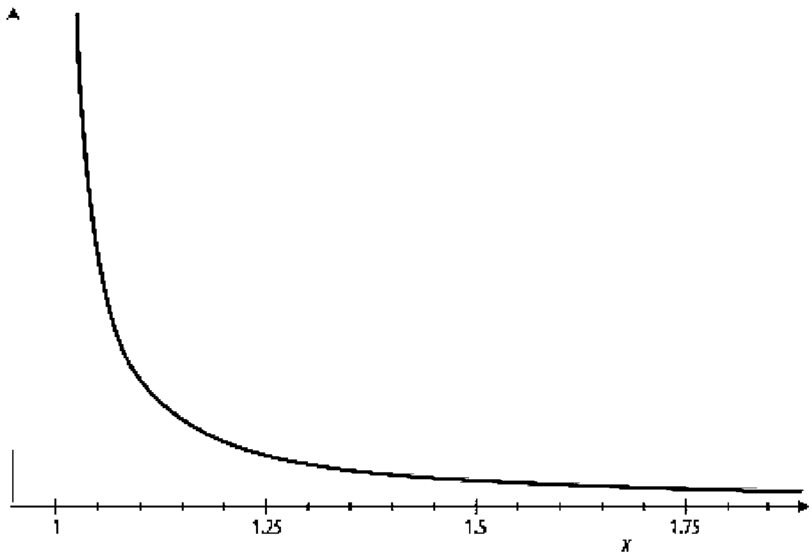


Figura 4.16

4. Si x se aproxima a a por la derecha y $f(x)$ es negativa, y esta disminuye más allá de cualquier límite, se dice que:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Así que la gráfica de $f(x)$ es similar a la que se muestra en la figura 4.17, donde $f(x)$ disminuye indefinidamente conforme x — 1 por la derecha.

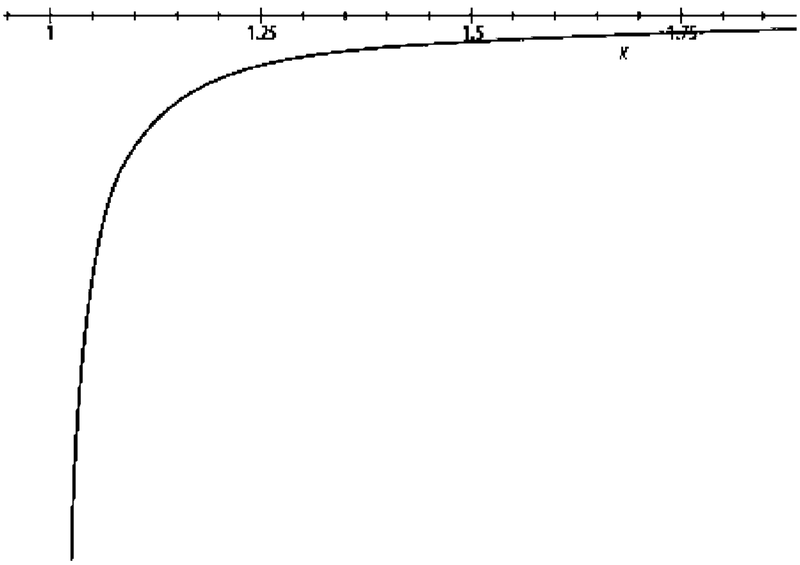


Figura 4.17

Ejemplo 29

Encontrar las asíntotas verticales de:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 4}$

c) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{x^2 - x - 6}$

d) $f(x) = \dfrac{8}{x^3 + 8}$

Solución

a) Dado que las raíces de $x^2 - 9$ son ± 3, tenemos que las asíntotas de $f(x)$ son: $x = \pm 3$.

b) Debido a que $x^2 + 4$ no tiene raíces reales, $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

c) Dado que las raíces reales de $x^2 - x - 6 = (x - 4)(x + 3)$ son 4 y -3, las asíntotas verticales de $f(x)$ son $x = 4$ y $x = -3$.

d) Debido a que la única raíz real de $x^3 + 8$ es -2, la única asíntota vertical de $f(x)$ es $x = -2$.

Ejemplo 30

Encontrar las asíntotas verticales de:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

Solución

A primera vista parecería que $f(x)$ tiene asíntotas verticales en $x \pm 2$, pues estos constituyen las raíces reales del polinomio en el denominador. Sin embargo, esta expresión para $f(x)$ no está en sus términos más bajos; de hecho:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x}{x+2}, \text{ si } x \neq 2$$

Cuando $x \to 2^+$ o $x \to 2$ la función no aumenta ni disminuye indefinidamente, así que 2 *no* es una asíntota vertical de $f(x)$, y la única asíntota vertical de $f(x)$ es $x = -2$.

Asíntotas horizontales

La recta $y = a$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función $f(x)$ si, conforme x aumenta más allá de cualquier límite positivo, $f(x)$ se aproxima al valor de a, o si conforme x disminuye más allá de cualquier límite negativo, $f(x)$ se aproxima al valor de a. A continuación se muestran cuatro posibilidades para la asíntota horizontal de una función y su notación común.

1. Conforme x aumenta indefinidamente, $f(x)$ se aproxima al valor de a por abajo; de esta manera, $f(x) < a$ para valores grandes positivos de x. Entonces, se dice que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

   Por tanto, la gráfica de $f(x)$ queda como en la figura 4.18, donde $f(x) \to 2$, conforme $x \to \infty$. Aquí se ha elegido $a = 2$, solo como ejemplo.

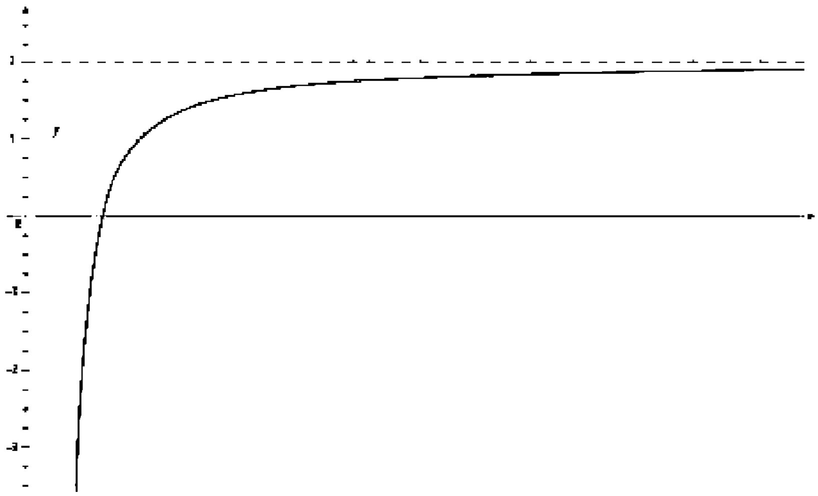


Figura 4.18

2. Conforme x aumenta indefinidamente, $f(x)$ se aproxima al valor de a por arriba. De esta manera, $f(x) > a$ para valores grandes positivos de x. Se dice que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

Y la gráfica de $f(x)$ queda como en la figura 4.19, donde $f(x) \to 2$, conforme $x \to \infty$.

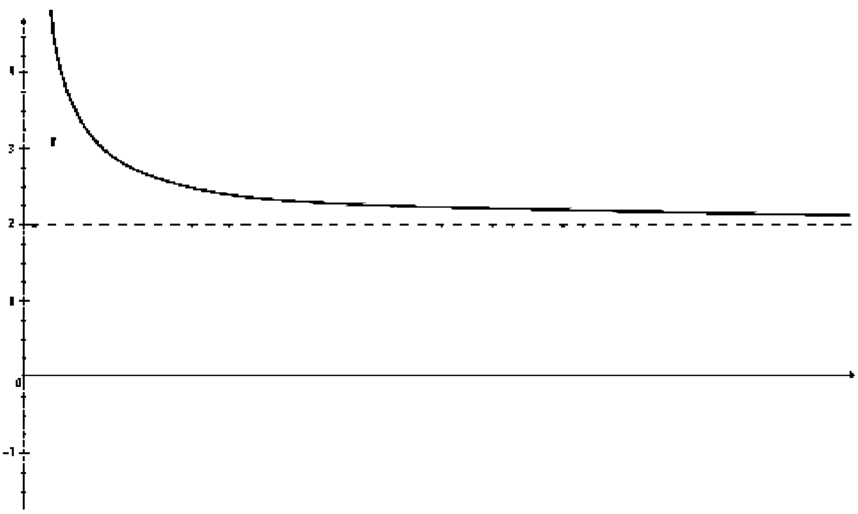


Figura 4.19

3. Conforme x disminuye indefinidamente, $f(x)$ se aproxima al valor de a por abajo. De esta manera, $f(x) < a$ para valores grandes negativos de x. Se dice que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

Por tanto, la gráfica de $f(x)$ queda como la que se muestra en la figura 4.20, donde $f(x) \to 2$, conforme $x \to -\infty$.

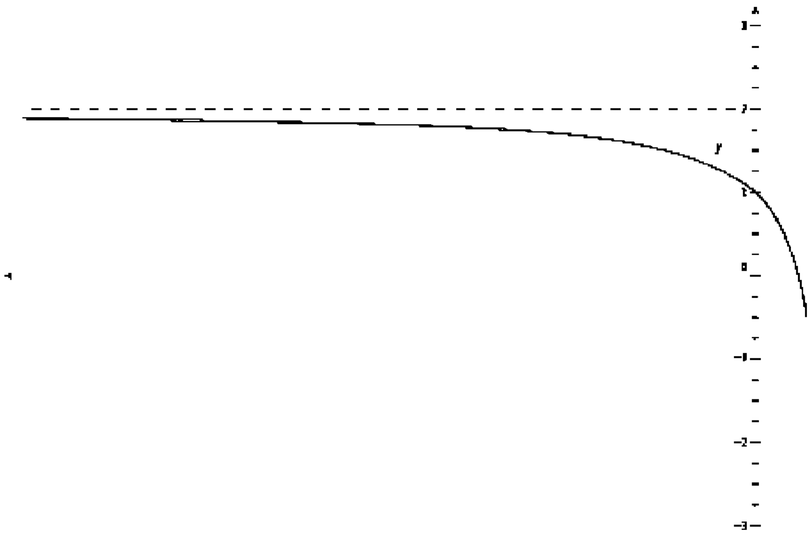


Figura 4.20

4. Conforme x disminuye indefinidamente, $f(x)$ se aproxima al valor de a por arriba. De esta manera, $f(x) > a$ para valores grandes negativos de x. Entonces, se dice que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

Y la gráfica de $f(x)$ queda como en la figura 4.21, donde $f(x) \to 2$, conforme $x \to -\infty$.

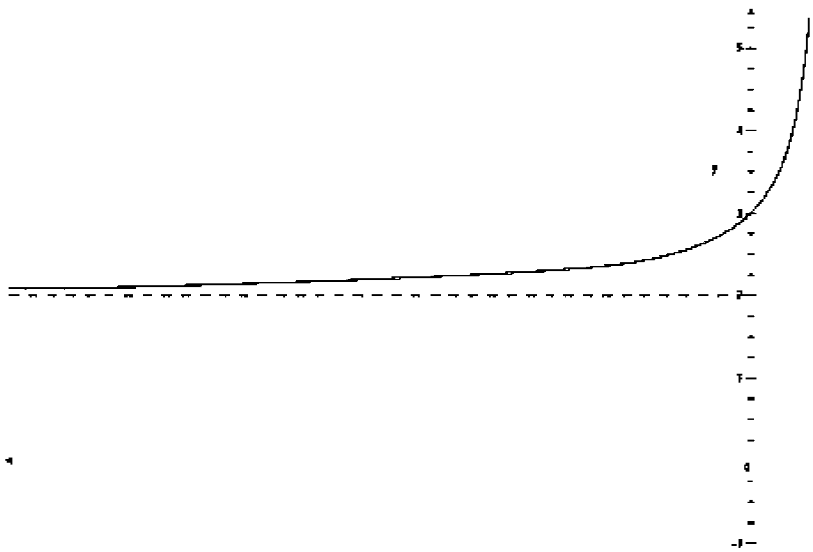


Figura 4.21

Para encontrar las asíntotas de $f(x)$, sea la siguiente función racional:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1 x+b_0}$$

Donde: $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$.

Se tiene que:

1. Si $n < m$, el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$.
2. Si $n = m$, la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$.
3. Si $n > m$, no hay ninguna asíntota horizontal para la gráfica de $f(x)$. En este caso, cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$ o $f(x) \to -\infty$.

Ejemplo 31

Encontrar las asíntotas horizontales (si las hay) de:

$$f(x)=\frac{3x+2}{x-4}$$

Solución

Primero, podemos escribir como:

$$f(x)=\frac{3x+2}{x}\div\frac{x-4}{x}=\frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}}$$

Vemos que para valores positivos grandes de x, como para valores negativos grandes de x, este cociente tiende a $\frac{3}{1}$, el cual es el cociente de los coeficientes principales de $P(x)$ y de $Q(x)$. Así que $f(x) \to 3$ conforme $x \to \infty$ o conforme $x \to -\infty$. Por tanto, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

Ejemplo 32

Encontrar las asíntotas horizontales de las gráficas de las funciones racionales siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{3x^3}{x^3+8}$

b) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+6}$

c) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-8}$

d) $f(x)=\dfrac{2x^2+10x-7}{3x^2+2}$

Solución

a) Dado que tanto el numerador como el denominador son polinomios de grado 3, el cociente puede escribirse como:

$$f(x)=\frac{3x^3}{x^3+8}=\frac{3x^3}{x^3}\div\frac{x^3+8}{x^3}=\frac{3}{1+\dfrac{8}{x^3}}$$

Como sabemos, para valores grandes de x, ya sean positivos o negativos, el cociente tiende a $\frac{3}{1}$, que es el cociente de los coeficientes principales. Así que $f(x)\to 3$ y la recta $y=3$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

b) Dado que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, la gráfica de esta función no tiene asíntotas horizontales.

c) Debido a que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el eje x, es decir, la recta $y=0$, es la asíntota horizontal de esta función.

d) Dado que el numerador y el denominador son polinomios del mismo grado, el cociente se puede escribir como:

$$f(x)=\frac{2x^2+10x-7}{3x^2+2}=\frac{2x^2+10x-7}{x^2}\div\frac{3x^2+2}{x^2}=\frac{2+\dfrac{10}{x}-\dfrac{7}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x^2}}$$

Para valores muy grandes de x, ya sean positivos o negativos, este cociente tiende a $\frac{2}{3}$, el cual constituye el cociente de los coeficientes principales. Así que $f(x)\to\frac{2}{3}$ así que $y=\frac{2}{3}$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

Asíntotas oblicuas

Sea:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0},\ \text{con } a_n\neq 0 \text{ y } b_m\neq 0$$

En el caso en que $n=m+1$, se puede simplificar $f(x)$ usando la división larga y escribiéndola como:

$$f(x)=ax+b+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Donde el grado del polinomio $R(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. Así que conforme $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, tenemos que $f(x) \to ax + b$, de modo que la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función $f(x)$.

Ejemplo 33

Encontrar la asíntota oblicua de la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{2x^3+2}{x^2+x-3}$$

Solución

Primero, usamos la división larga y encontramos que:

$$f(x)=\frac{2x^3+2}{x^2+x-3}=2x-2+\frac{8x-4}{x^2+x-3}$$

Por tanto, conforme $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, tenemos que $f(x) \to 2x - 2$, de modo que la recta $y = 2x - 2$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función.

Ejemplo 34

Encontrar las asíntotas oblicuas de la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$

b) $f(x)=\frac{x^3}{x+3}$

c) $f(x)=\frac{x^2-6x+2}{3x-8}$

d) $f(x)=\frac{4x^3-2x}{x^2+2x+1}$

Solución

a) En este caso, primero usamos el método de división sintética para desarrollar:

$$f(x)=\frac{x^2}{x+3}=x-3+\frac{9}{x+3}$$

Conforme $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, tenemos que $f(x) \to x - 3$. Así que la recta $y = x - 3$ es una asíntota oblicua para la gráfica de $f(x)$.

b) Dado que aquí el grado del numerador no es igual al grado del denominador $+1$, la gráfica de $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas. Sin embargo, si usamos el método de división sintética para escribir:

$$f(x) = \frac{x^3}{x+3} = x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3},$$

podemos ver que conforme $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, $f(x) \to x^2 - 3x + 9$, y decimos que la gráfica de $f(x)$ *tiende asintóticamente* a la curva $y = x^2 - 3x + 9$.

c) Usamos el método de división larga para desarrollar:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 2}{3x - 8} = \frac{x}{3} - \frac{10}{9} + \frac{\frac{-62}{9}}{3x - 8}$$

Así que conforme $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, $f(x) \to \frac{x}{3} - \frac{10}{9}$, de modo que la recta $y = \frac{x}{3} - \frac{10}{9}$ es una asíntota oblicua para la gráfica de la función de $f(x)$.

d) Aquí usamos el método de división larga para escribir:

$$f(x) = \frac{4x^3 - 2x}{x^2 + 2x + 1} = 4x - 8 + \frac{10x + 8}{x^2 + 2x + 1}$$

Así que conforme $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, $f(x) \to 4x - 8$. Así que la recta $y = 4x - 8$ es una asíntota oblicua para la gráfica de $f(x)$.

Para el esbozo de la gráfica de una función racional del tipo $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, es necesario llevar a cabo una serie de pasos, los cuales se indican a continuación:

1. Se encuentran las intersecciones de $f(x)$ con el eje x; esto es, las raíces reales de $P(x)$ y luego se grafican los puntos correspondientes. Enseguida, se encuentra la intersección de $f(x)$ con el eje y, es decir, el valor $f(0)$ [suponiendo que 0 está en el dominio de $f(x)$] y se grafica el punto $(0, f(0))$. Se analiza la función en términos de alguna

simetría posible, ya sea respecto de los ejes (función par) o respecto del origen (función impar).

2. Se ecuentran las raíces de $Q(x)$ y se ubican las asíntotas verticales de la gráfica de $f(x)$ en el esbozo.
3. Se determinan las asíntotas horizontales u oblicuas de la gráfica de $f(x)$ y se dibujan en el esbozo.
4. Se determina si la gráfica interseca las asíntotas horizontales u oblicuas. En términos generales, las gráficas de $y = f(x)$ y de $y = ax + b$ se intersecarán en las soluciones reales de $f(x) = ax + b$.
5. Se determinan, a partir de una tabla de signos si es necesario, los intervalos en los cuales la función es positiva y en los cuales es negativa. Acto seguido, se establece el comportamiento de la función cerca de las asíntotas.
6. Se elabora un esbozo de la gráfica de $f(x)$ en cada una de las regiones encontradas en el paso 5.

Ejemplo 35

Elaborar un esbozo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

Solución

1. En este caso, la gráfica no interseca ni al eje x ni al eje y. Además, como $f(x) = f(-x)$, la función es una función par. Por tanto, podemos decir que la gráfica tiene simetría respecto del eje y.
2. Dado que 0 es el único cero del denominador, entonces el eje y, es decir, la recta $x = 0$, es la única asíntota vertical.
3. Debido a que el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, el eje x, es decir, la recta $y = 0$, podemos afirmar que es una asíntota horizontal.
4. Dado que no hay una solución de la ecuación $\frac{3}{x^2} = 0$, podemos afirmar que la gráfica no interseca la asíntota horizontal.
5. Si x es negativa, $f(x)$ es positiva. En caso contrario, si x es positiva, $f(x)$ también es positiva. Así que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

6. El esbozo de la gráfica de $f(x)$ queda como se muestra en la figura 4.22.

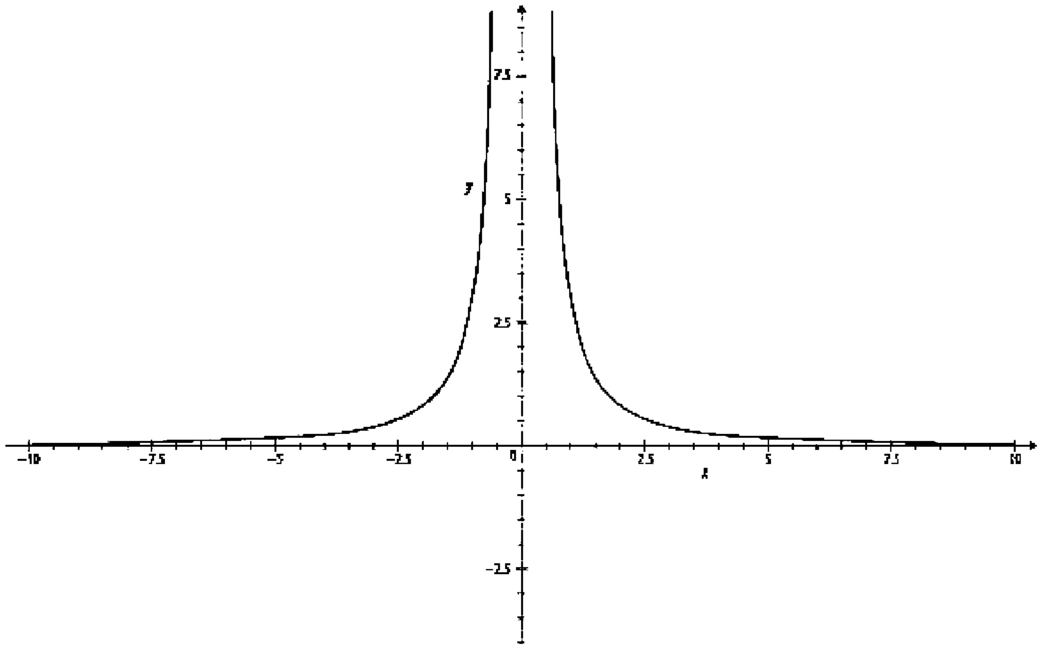


Figura 4.22 Gráfica de $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$.

Ejemplo 36

Construir el esbozo de la gráfica de $f(x)=\dfrac{10}{x+5}$.

Solución

De acuerdo con lo expuesto antes, aplicamos cada uno de los pasos descritos para construir el esbozo de la gráfica de una función racional.

Dado que $f(0)=2$, la intersección de $f(x)$ con el eje y es igual a 2. Dado que $f(x)$ nunca es cero, no hay intersección de $f(x)$ con el eje de las x.

Por tanto, podemos afirmar que la gráfica no tiene simetría respecto de los ejes ni respecto del origen.

Debido a que $x+5=0$, si $x=-5$, podemos determinar que esta es la única asíntota vertical que tiene la función.

Por otra parte, debido a que el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, podemos decir que esta gráfica tiene como asíntota horizontal al eje x.

En este caso, $f(x)=0$ no tiene soluciones, lo cual significa que $f(x)$ no cruza al eje x en ningún momento.

Como se observa de la tabla de signos de $f(x)$, podemos establecer que $f(x)$ es negativa en el intervalo $(-\infty,-5)$ y que $f(x)$ es positiva en el intervalo $(-5,\infty)$; por consiguiente, $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)=\infty$.

De acuerdo con el desarrollo anterior, la gráfica de $f(x)$ es como la que se muestra en la figura 4.23.

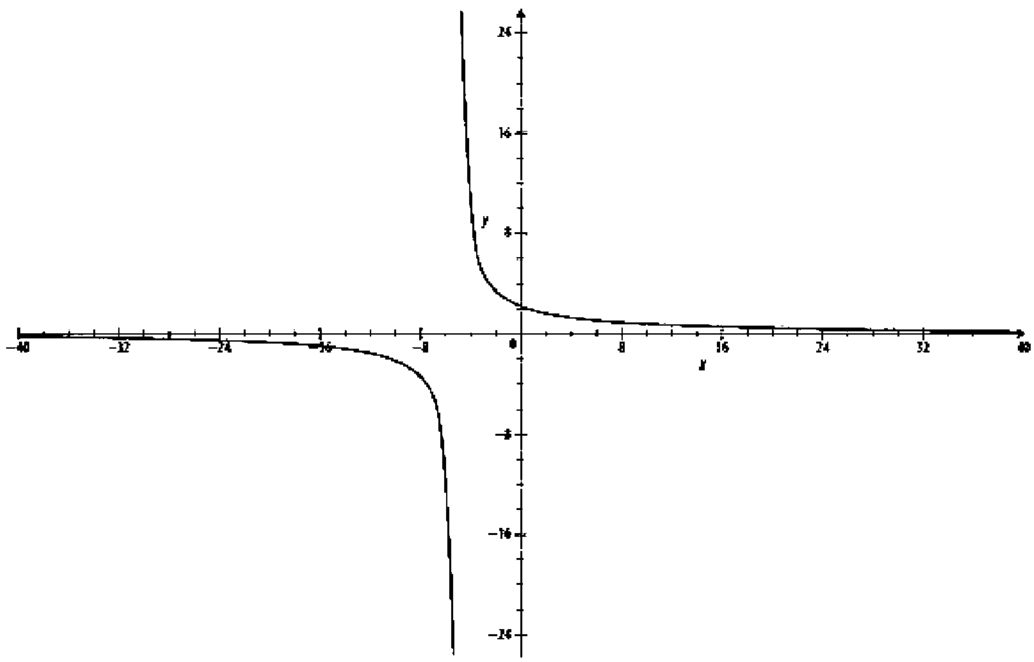


Figura 4.23 Gráfica de $f(x)=\dfrac{10}{x+5}$.

Ejemplo 37

Esbozar la gráfica de $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$.

Solución

Dado que $f(0)=-\dfrac{2}{3}$, la intersección con el eje y es $-\dfrac{2}{3}$. Como $f(x)=0$, si $x=-2$, podemos decir que $f(x)$ interseca al eje x en $x=-2$. Por tanto, la gráfica de $f(x)$ no tiene simetría respecto de los ejes ni respecto del origen.

Debido a que $x-3=0$, cuando $x=3$, podemos decir que esta recta es la única asíntota vertical de $f(x)$.

Como en este caso el numerador y el denominador tienen grado igual a 1 y el cociente de los coeficientes principales es $\dfrac{1}{1}=1$, podemos afirmar que la recta $y=1$ es la asíntota horizontal de $f(x)$.

Puesto que $f(x)=1$ no tiene soluciones, la gráfica de $f(x)$ no cruza su asíntota horizontal.

Usando una tabla de signos encontramos que $f(x)$ es positiva en el intervalo $(-\infty,-2)$ y $(3,\infty)$, y que $f(x)$ es negativa en el intervalo $(-2,3)$, así que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\infty$. Así pues, la figura 4.24 muestra la gráfica de $f(x)$.

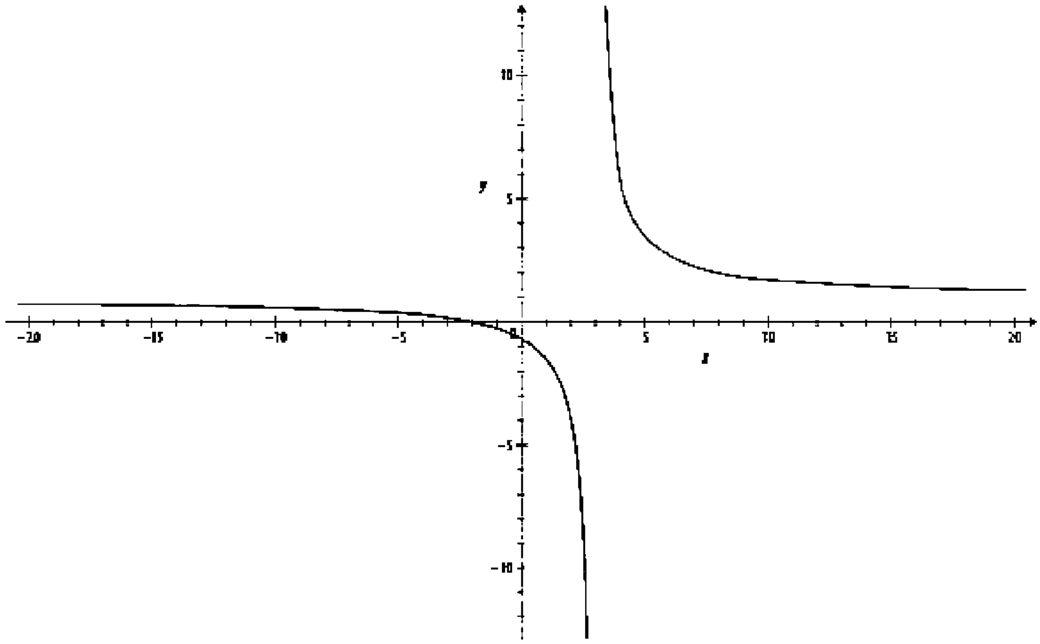


Figura 4.24 Gráfica de $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$.

Ejemplo 38

Esbozar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{6x}{2x^2-8}$, realizando cada uno de los seis pasos descritos antes.

Solución

Primero vemos que $f(0) = 0$; por tanto, podemos decir que $f(x)$ interseca al eje y en $y = 0$. Por otro lado, 0 es la única raíz de $f(x)$, así que $f(x)$ interseca al eje x en $x = 0$; por consiguiente, la gráfica de $f(x)$ pasa por el origen. Dado que $f(-x) = -f(x)$, podemos decir que la función es impar y la gráfica tiene simetría respecto del origen.

Por otra parte, debido a que $2x^2 - 8 = 0$, para $x = \pm 2$, podemos afirmar que estas rectas son las asíntotas verticales de $f(x)$.

A su vez, debido a que el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, el eje x es la asíntota horizontal. Como $f(x) = 0$ tiene la solución $x = 0$; vemos que la gráfica cruza su asíntota horizontal en el origen.

En una tabla de signos vemos que la función es negativa en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$; asimismo, en esta vemos que la función es positiva para $(-2, 0)$ y $(2, \infty)$.

De esta manera, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$.
La gráfica de $f(x)$ se representa en la figura 4.25.

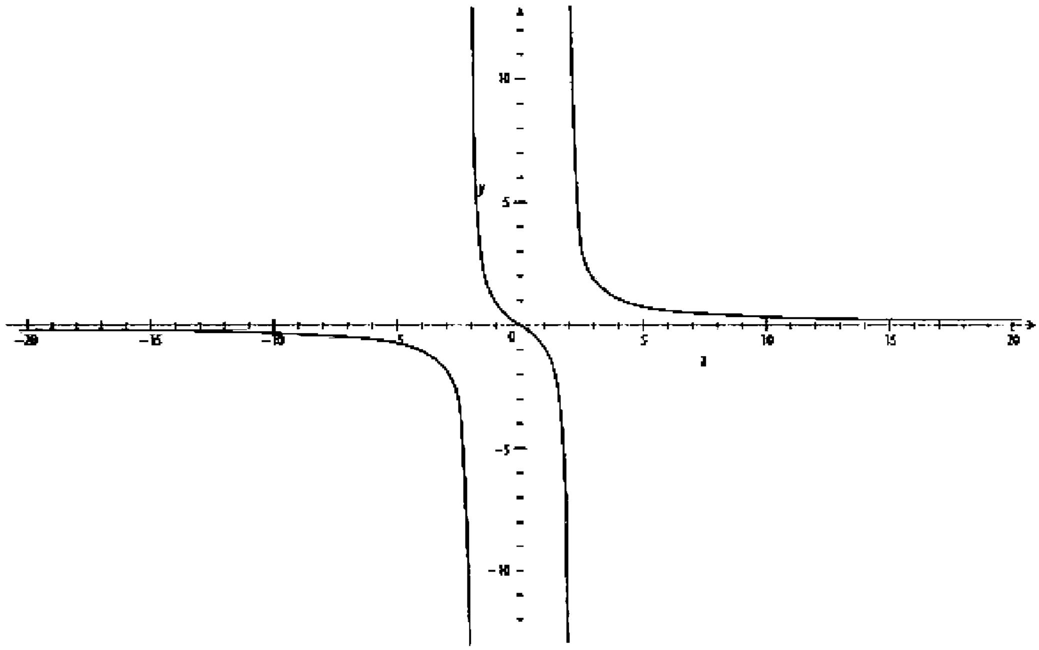


Figura 4.25 Gráfica de $f(x)=\dfrac{6x}{2x^2-8}$.

Ejemplo 39

Construir la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{3x^4}{x^4-81}$.

Solución

Como $f(x)=0$ solo si $x=0$, podemos decir que $f(x)$ interseca al eje x en el origen. Por otro lado, la única raíz que tiene la función es en $x=0$, así que $f(x)$ interseca al eje y también en el origen. Por ende, podemos determinar que la gráfica de $f(x)$ pasa por el origen.

Dado que $f(x)=f(-x)$, podemos decir que la función es par y la gráfica tiene simetría respecto del eje y.

Tenemos que $x^4-81=0$, implica que $x=\pm 3$, así que podemos afirmar que estas son las líneas asíntotas verticales de la función.

Puesto que tanto el numerador como el denominador son de grado 4, el cociente de los coeficientes principales es $\dfrac{3}{1}=3$, así que la recta $y=3$ es una asíntota horizontal de la función.

Puesto que $f(x)=3$ no tiene soluciones, esto significa que la gráfica de $f(x)$ no cruza su asíntota horizontal.

Una tabla de signos nos muestra que la función es positiva en los intervalos $(-\infty,-3)$ y $(3,\infty)$, y que la función es negativa en el intervalo $(-3,3)$. Así que $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\infty$

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la figura 4.26.

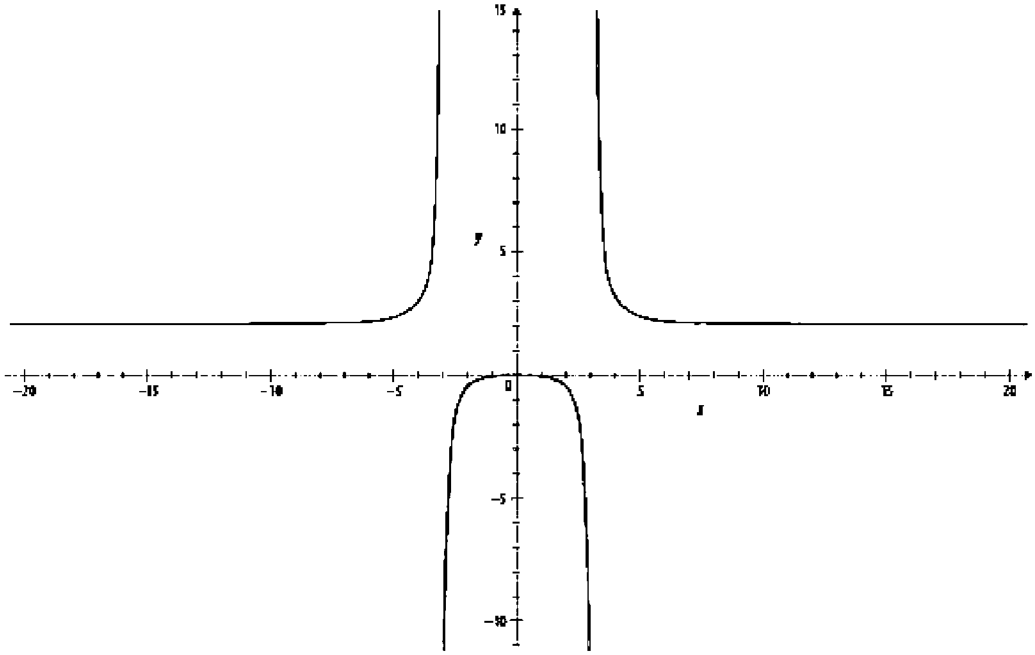


Figura 4.26 Gráfica de $f(x)=\dfrac{3x^4}{x^4-81}$.

Ejemplo 40

Construir la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{-2x^3}{x^2-16}$.

Solución

Dado que $f(0)=0$, y que esta es la única raíz de la función, podemos afirmar que tanto la intersección con el eje x como la intersección con el eje y ocurren en el origen. Esto es, la gráfica de $f(x)$ pasa por el origen.

Debido a que $f(-x)=-f(x)$, la función es impar y la gráfica tiene simetría respecto del origen.

Por otro lado, como $x^2-16=0$, cuando $x=\pm 4$, podemos decir que estas rectas son asíntotas verticales de la función.

Puesto que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador en 1, tenemos que la gráfica tiene asíntotas oblicuas. Usando una división larga podemos determinar que:

$$f(x)=\frac{-2x^3}{x^2-16}=-2x-\frac{32x}{x^2-16}$$

Ahora, vemos que conforme $x\to\infty$, $f(x)\to -2x$, así que la recta $y=-2x$ es la asíntota oblicua de la gráfica de $f(x)$.

Dado que $f(x)=-2x$ tiene el valor cero para $x=0$, podemos afirmar que la gráfica cruza la asíntota oblicua en el origen.

Una tabla de signos nos muestra que la función es positiva en los intervalos $(-\infty, -4)$ y $(0, 4)$, mientras que la función es negativa en los intervalos $(-4, 0)$ y $(4, \infty)$. Por tanto, $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$.

Como la función es positiva para $x < -4$ y la función no cruza su asíntota oblicua. Vemos que la gráfica de $f(x)$ tiende a su asíntota oblicua por *arriba* para x mucho menores que -4. De la misma manera, como la función es negativa para $x > 4$, y como la gráfica de $f(x)$ no cruza su asíntota oblicua, vemos que la gráfica de $f(x)$ tiende a su asíntota oblicua por *abajo* para x mucho mayores que 4. La figura 4.27 muestra la gráfica de $f(x)$.

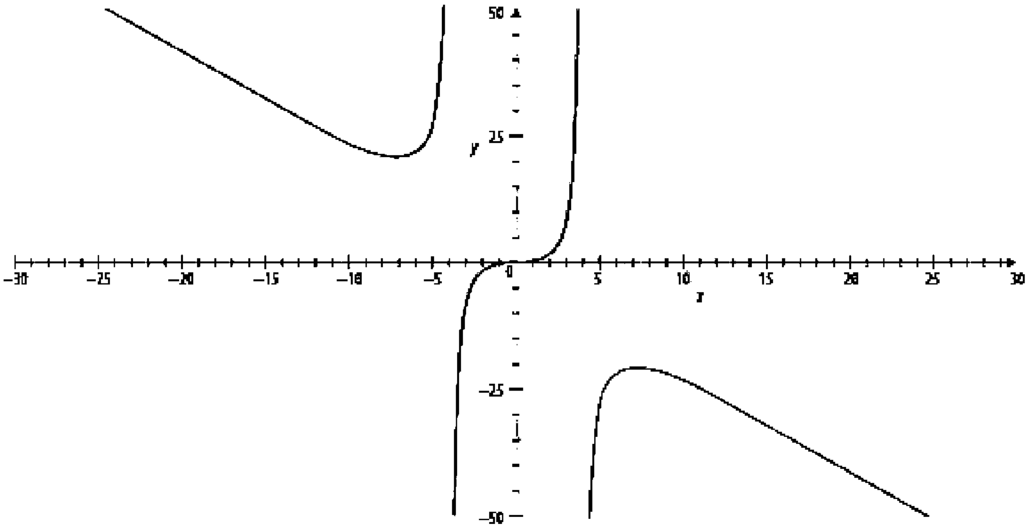


Figura 4.27 Gráfica de $f(x) = \dfrac{-2x^3}{x^2 - 16}$.

Ejemplo 41

Construir la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$.

Solución

Dado que $f(0) = 0$, podemos decir que la gráfica de $f(x)$ interseca al eje y en el origen; luego, debido a que $x^2 + x = 0$, cuando $x = -1$ o $x = 0$, entonces decimos que la función interseca al eje x cuando $x = -1$ o $x = 0$. Así que la gráfica pasa a través del origen y no hay una simetría obvia para la gráfica.

Puesto que $x^2 - 3x + 2 = 0$ para $x = 1$ y $x = 2$, decimos que estas son asíntotas verticales de la gráfica de $f(x)$.

Debido a que tanto el numerador como el denominador son de grado 2, el cociente de los coeficientes principales es $\dfrac{1}{1} = 1$. Entonces, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Puesto que $f(x) = 1$ tiene la solución $x = \dfrac{1}{2}$, la gráfica de $f(x)$ cruza la asíntota horizontal en $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Una tabla de signos nos muestra que la función es negativa en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, 2)$, y que la función es positiva en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ y $(2, \infty)$. Así que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$.
Además, dado que la función es positiva para $x > 2$, vemos que la gráfica $f(x)$ se aproxima a su asíntota horizontal por *arriba*. Del mismo modo, para $x < -1$, $f(x)$ es positiva; sin embrago, la gráfica de $f(x)$ se aproxima a su asíntota horizontal por *abajo*. La gráfica de $f(x)$ es como la que se muestra en la figura 4.28.

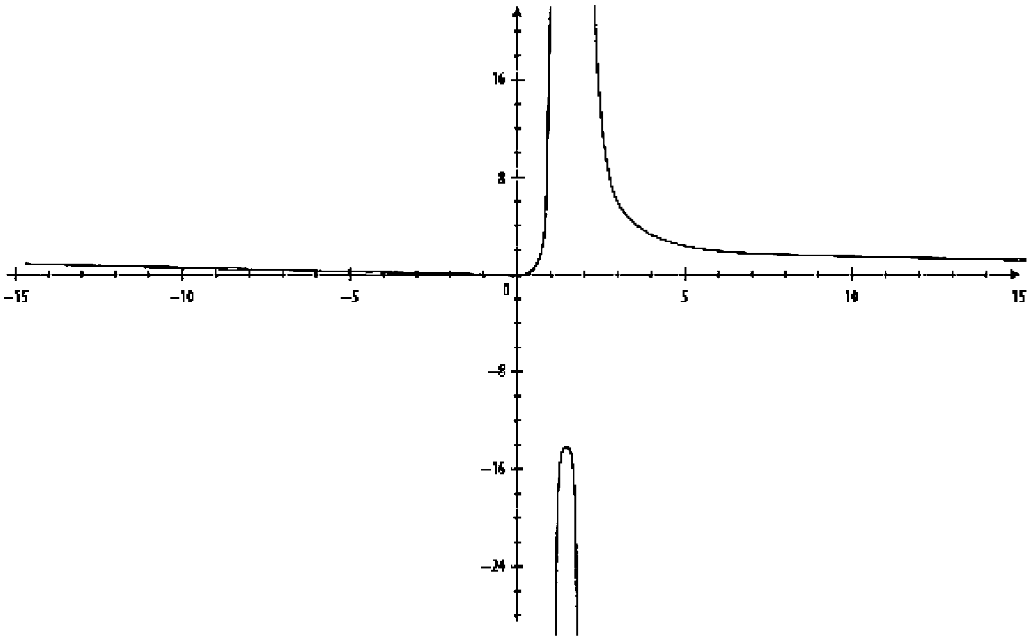


Figura 4.28 Gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-3x+2}$.

Ejemplo 42

Realizar un esbozo de la gráfica de la función $f(x) = -\dfrac{x^2-16}{x^2+2}$.

Solución

Dado que $f(0) = 8$, la intersección de la gráfica con el eje y es en $(0, 8)$. Como $x^2 - 16 = 0$, en $x = \pm 4$, la gráfica de la función interseca al eje x en ambos valores, $x = -4$ y $x = 4$. Además, como $f(-x) = f(x)$, la función es par y, por tanto, tiene simetría respecto del eje y.

Luego, como $x^2 + 2$ no tiene ceros, podemos decir que la gráfica no tiene asíntotas verticales.

Como en este caso tanto el numerador como el denominador tienen el mismo grado y el cociente de los coeficientes principales es $-\frac{1}{1} = -1$, tenemos que la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal.

Debido a que $f(x) = -1$ no tiene soluciones, la gráfica no cruza la asíntota horizontal.

Una tabla de signos nos muestra que $f(x)$ es negativa en los intervalos $(-\infty, -4)$ y $(4, \infty)$, mientras que $f(x)$ es positiva en el intervalo $(-4, 4)$. Así que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$. La figura 4.29 representa la gráfica de $f(x)$.

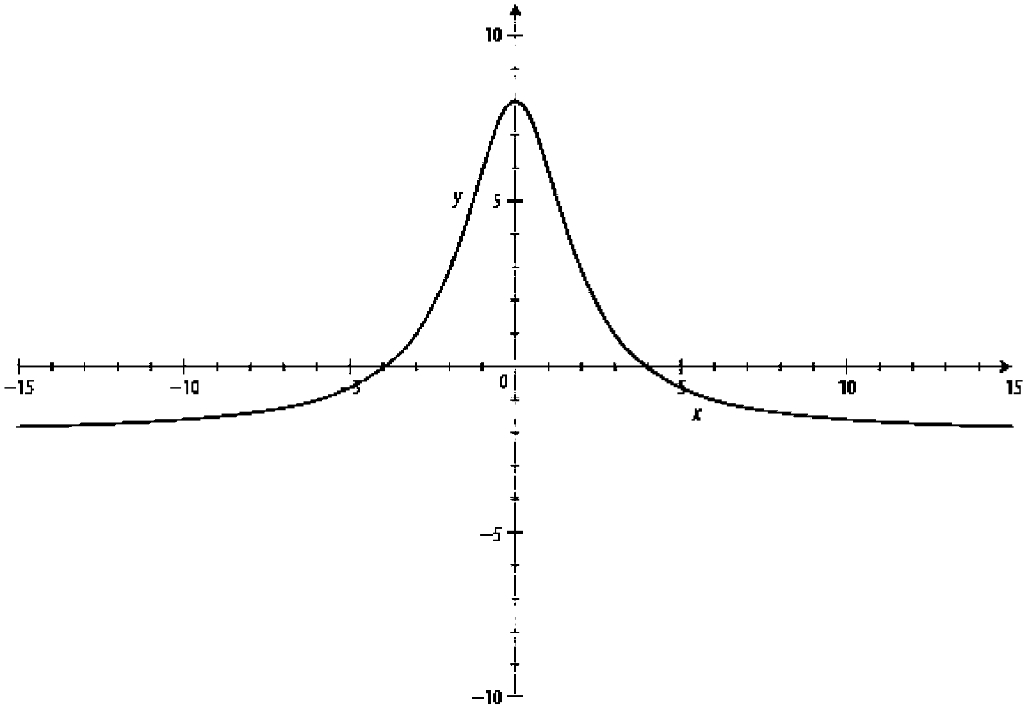


Figura 4.29 Gráfica de $f(x) = -\dfrac{x^2 - 16}{x^2 + 2}$.

Ejemplo 43

Construir un esbozo y analizar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 15}$, tomando en cuenta que el numerador y el denominador tienen factores en común.

Solución

Primero, factorizamos el numerador y el denominador; por consiguiente obtenemos

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-5)} = \frac{(x+3)}{(x-5)}, \text{ para } x \neq 3.$$

Así que la gráfica de la función es igual a la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{(x+3)}{(x-5)}$, excepto que $x = 3$ no está en el dominio de $f(x)$.

La gráfica de $y = f(x)$ normalmente se representa como la gráfica de $g(x)$ con un pequeño círculo centrado en $(3, -3)$, lo que nos indica que este punto *no* pertenece a la gráfica de $f(x)$.

Dado que $g(0) = \frac{-3}{5}$, la intersección con el eje y es $\frac{-3}{5}$, y como $g(x) = 0$ si $x = -3$, la intersección con el eje x es -3. Por tanto, la gráfica de $g(x)$ no tiene simetría respecto de los ejes ni respecto del origen.

Ahora, debido a que $x - 5 = 0$, cuando $x = 5$, podemos decir que esta recta es la única asíntota vertical.

Ya que tanto el numerador como el denominador tienen el mismo grado y que el cociente de los coeficientes principales es $\frac{1}{1} = 1$, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. Usando una tabla de signos encontramos que la función es positiva en el intervalo $(-\infty, -3)$ y $(5, \infty)$, y que la función es negativa en el intervalo $(-3, 5)$. Así que $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \infty$ (asíntota vertical), y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ (asíntota horizontal). La figura 4.30 representa la gráfica de $f(x)$.

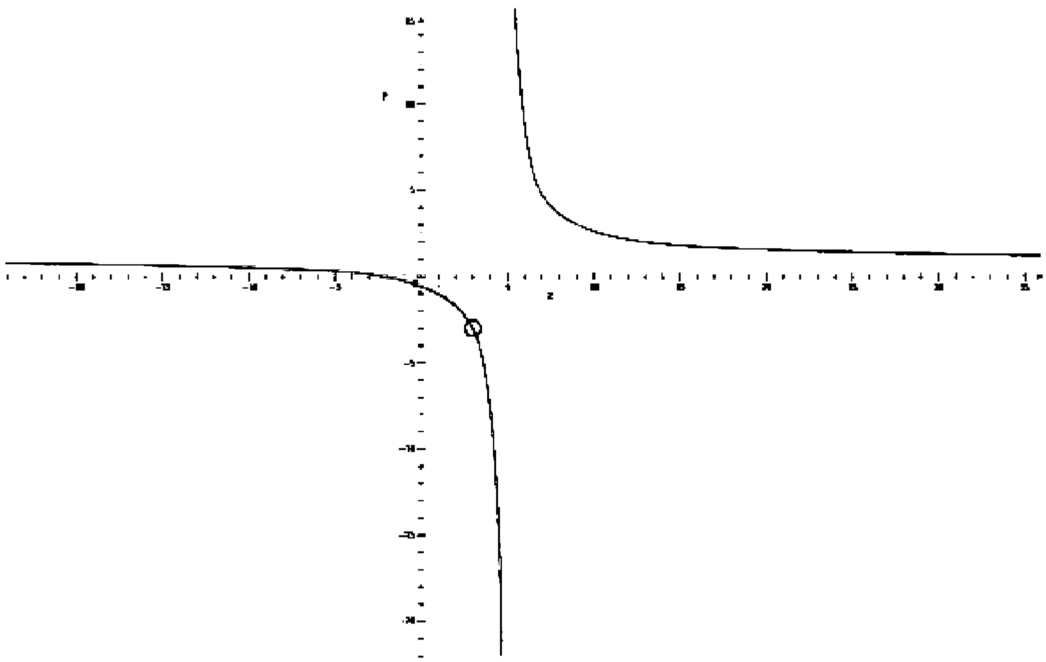


Figura 4.30 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 15}$.

Aplicaciones

A continuación se presenta una aplicación de funciones racionales.

Ejemplo 44

Modelo poblacional

Hace relativamente poco tiempo, fue descubierta una especie rara de ranas en la selva alta de Chiapas. Para proteger a esta especie, un grupo de biólogos ambientales la declararon en peligro de extinción y, por tanto, se estableció una colonia de estas ranas en un área protegida. La población, P, de ranas, t, meses después de que se estableció la colonia está dada por la función:

$$p(t)=\frac{50(1+0.5t)}{(2+0.01t)}$$

a) Determinar cuántas ranas se descubrieron inicialmente; es decir, ¿cuál es la población de ranas en $t = 0$?

b) Establecer cuál será la población de ranas 5 años después.

c) Calcular cuál es la población máxima de ranas que puede albergar el área protegida. Es decir, ¿a qué valor tiende P, conforme t tiende a infinito?

d) Determinar cuánto tiempo debe transcurrir para que la población de ranas alcance 90% de su valor máximo.

Solución

a) Para hallar la población inicial de ranas, primero evaluamos $P(t)$ en $t = 0$. Así que:

$$P(0) = 25 \text{ ranas}$$

b) La población de ranas a los 5 años corresponde a $P(t)$, evaluada en $t = 5 \times 12 = 60$ meses. Así que:

$$P(60) = 596 \text{ ranas}$$

c) Para hallar la asíntota horizontal de $P(t)$ procedemos como en los ejemplos anteriores:

$$p(t)=\frac{50(1+0.5t)}{(2+0.01t)}=\frac{\frac{50+25t}{t}}{\frac{2+0.01t}{t}}=\frac{25+\frac{50}{t}}{0.01+\frac{2}{t}}\to 2\,500 \text{ ranas conforme } t\to\infty.$$

d) Para determinar cuándo la población de ranas alcanzará 90% de su valor máximo, primero establecemos que 90% de 2 500 ranas son 2 250 ranas en total. Luego igualamos $P(t) = 2\,250$ y despejamos t:

$$P = 2\,250 = \frac{50+25t}{2+0.01t}$$

De esta manera podemos decir que $t = 1\,780$ meses, lo que equivale a 148.3 años.

Ejercicios propuestos

De los ejercicios 50 a 64 encuentra las intersecciones con los ejes, las asíntotas de la función racional y esboza la gráfica de la función.

50. $f(x)=\dfrac{3x}{x-4}$

51. $f(x)=\dfrac{-6x}{x+9}$

52. $f(x)=-\dfrac{12}{x}$

53. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

54. $f(x)=\dfrac{20x}{x^2+4}$

55. $f(x)=\dfrac{3}{x^3+1}$

56. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$ (*Pista:* Realiza la factorización del numerador y el denominador.)

57. $f(x)=\dfrac{6x^2}{x^2+25}$

58. $f(x)=\dfrac{4x^2+10x+4}{2x^2+1}$

59. $f(x)=-\dfrac{5x^2}{x^2-9}$

60. $f(x)=\dfrac{x^2}{2x+2}$

61. $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$

62. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{2x-4}$

63. $f(x)=-\dfrac{4}{x^2}$

64. $f(x)=\dfrac{x-10}{x-5}$

De los ejercicios 65 a 68 construye un bosquejo de la función dada y determina las intersecciones con los ejes, las asíntotas, los intervalos del dominio donde es positiva o negativa y si tiene alguna simetría.

65. $f(x)=\dfrac{5x}{16-x^2}$

66. $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-36}$

67. $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-9}$

68. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-3x+2}$

69. Encuentra las intersecciones con los ejes, las asíntotas y grafica la función $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2+1}$.

Aplicaciones

70. La ley de gravitación universal de Newton permite escribir la aceleración de la gravedad de la Tierra como función de la altura, h, sobre el nivel del mar. Esto es:

$$g(h)=\frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$$

Donde G es la constante de gravitación universal (G = 6.6738 × 10^{-11} Nm^2/kg^2); M_T es la masa de la Tierra (M_T = 5.9722 × 10^{24} kg) y R_T es el radio medio de la Tierra (R_T = 6.373 × 10^6 m).

Determinar:

a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad a nivel del mar (es decir, para h = 0)?

b) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la cima del monte Everest, cuya altura es de 8800 m sobre el nivel del mar?

c) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad a la altura a la que orbita la Estación Espacial Internacional, es decir, a h = 336 km sobre el nivel del mar?

d) ¿Cuál es la asíntota horizontal de $g(h)$ y cómo interpretas este resultado?

71. Un laboratorio especializado estudia una muestra de bacterias para su posible uso comercial; dadas las condiciones en las que se cultiva la muestra, la cantidad

de muestra (en gramos) depende del tiempo t (en días), a partir del momento en que se comenzó el cultivo, por medio de la relación:

$$P(t) = \frac{200(2 + 0.75t)}{(8 + 0.25t)}$$

Determinar:

a) La cantidad de bacterias (en gramos) que se tenía al inicio del estudio.

b) ¿Cuál es la cantidad de bacterias que se tiene al cabo de 30 días?

c) ¿Cuál es la cantidad de bacterias (en gramos) a la que se estabiliza la población?

d) ¿Cuánto tiempo se requiere para que la población alcance 90% de su valor final?

Capítulo 5

Funciones exponenciales y logarítmicas

Al final de este capítulo el alumno será capaz de:

- Definir las funciones exponenciales y logarítmicas.
- Aprender a graficar funciones exponenciales y logarítmicas.
- Conocer las propiedades y leyes de los logaritmos.
- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Conocer algunas aplicaciones de estas funciones.

Introducción

En este capítulo se presentan dos tipos de funciones especiales que tienen diversas aplicaciones en la vida diaria, desde demografía hasta medicina. Estas funciones tienen que ver con la *operación de la potenciación*, y están muy relacionadas entre ellas, se trata de las funciones exponenciales y las logarítmicas.

5.1 Funciones exponenciales

Una función exponencial en su forma más simple, está definida como

$$f(x) = a^x, a > 0$$

donde a debe ser positiva para que la función sea continua y, por ende, útil como modelo. De aquí en adelante se supondrá que al hablar de una función exponencial, la base es positiva. Obsérvese la diferencia de la función exponencial $f(x) = a^x$, $a > 0$ con la función potencia $f(x) = x^a$. En una función exponencial, la variable independiente es el *exponente* (de ahí el nombre), mientras que en una función potencia, la variable independiente es la *base*.

¿Cuál es el dominio de una función exponencial? Si $a > 0$ como se ha definido, el dominio serán todos los números reales, porque cualquier número positivo puede elevarse a cualquier potencia. ¿Cuál es el rango? El rango es el intervalo $(0, \infty)$ porque cualquier número positivo elevado a cualquier potencia da como resultado un número positivo.

A continuación se trazará la gráfica de una función exponencial, la función $f(x) = 2^x$. Se hace tabulando, es decir, haciendo una tabla de valores como se aprendió en la sección 3.1.

x	$f(x) = 2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
−1	1/2
−2	1/4
−3	1/8
−4	1/16

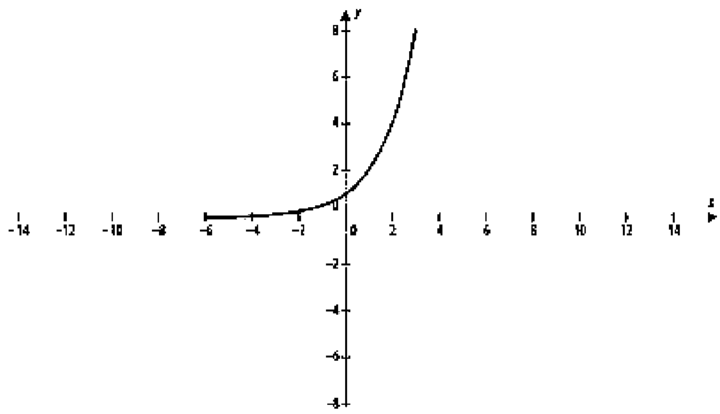


Figura 5.1 Gráfica de la función $f(x) = 2^x$.

Al unir los puntos se obtiene la gráfica mostrada en la figura 5.1.

En la figura 5.2 se ha hecho un acercamiento a la parte negativa del dominio de $f(x) = 2^x$ para notar algo, entre más negativa es x, la gráfica se acerca más y más al eje x, pero nunca lo tocará, porque como ya se dijo, esta función nunca será igual a cero, es decir, $2^x = 0$ no tiene solución; así que se dice que esta función tiene una asíntota en el eje x, cuya ecuación, según se sabe por el estudio de rectas, sería la ecuación $y = 0$. La asíntota se marca con gris en la figura 5.2.

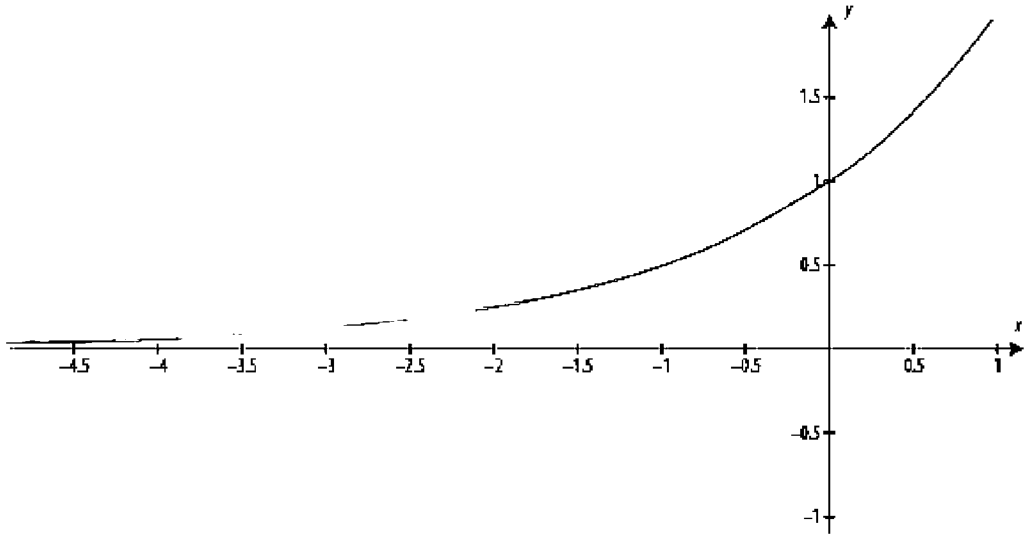


Figura 5.2 Gráfica de la función $f(x) = 2^x$.

Ahora se graficará la función $f(x) = 3^x$ para observar qué sucede cuando cambiamos la base. Nuevamente se hace una tabla de valores y se unen los puntos para obtener la gráfica que se muestra en la figura 5.3 en color negro. La gráfica gris corresponde a $f(x) = 2^x$; se ha puesto en el mismo plano coordenado para poder apreciar que cuando la base de la función es más grande, en la parte positiva del dominio la función crece más rápido (se pega más rápido al eje y), y en la parte negativa del dominio la función decrece más rápido (se pega más rápido al eje x).

x	$f(x) = 3^x$
0	1
1	3
2	9
3	27
−1	1/3
−2	1/9
−3	1/27

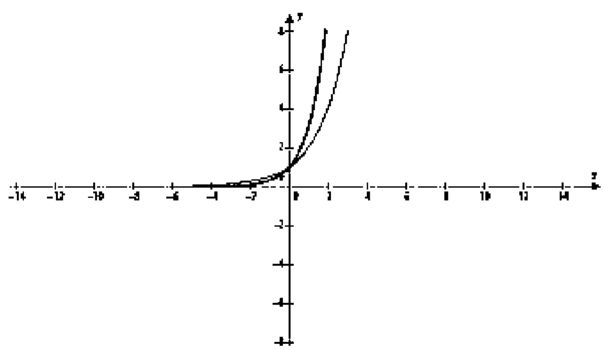


Figura 5.3 Gráficas de $f(x) = 2^x$ (en gris) y de $f(x) = 3^x$ (en negro).

Hay algo que estas dos gráficas tienen en común, además de que tienen la misma asíntota, que ambas pasan por el punto (0, 1). De hecho, sin importar cuál sea el valor de a

en $f(x) = a^x$, la gráfica siempre pasará por este punto debido a que cualquier número positivo elevado a la potencia cero da uno.

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de la función $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Dar el dominio y el rango.

Solución

No haremos la gráfica tabulando, usaremos las transformaciones que se vieron en la sección 3.4. Primero observamos que

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(2^{-1}\right)^x=2^{-x}$$

Entonces la gráfica de esta función es la misma que la de $f(x) = 2^x$ pero reflejada respecto del eje y debido al signo menos que multiplica a la x. La gráfica se muestra en la figura 5.4. El dominio y el rango son los mismos que los de $f(x) = 2^x$, $(-\infty, \infty)$ y $(0, \infty)$, respectivamente.

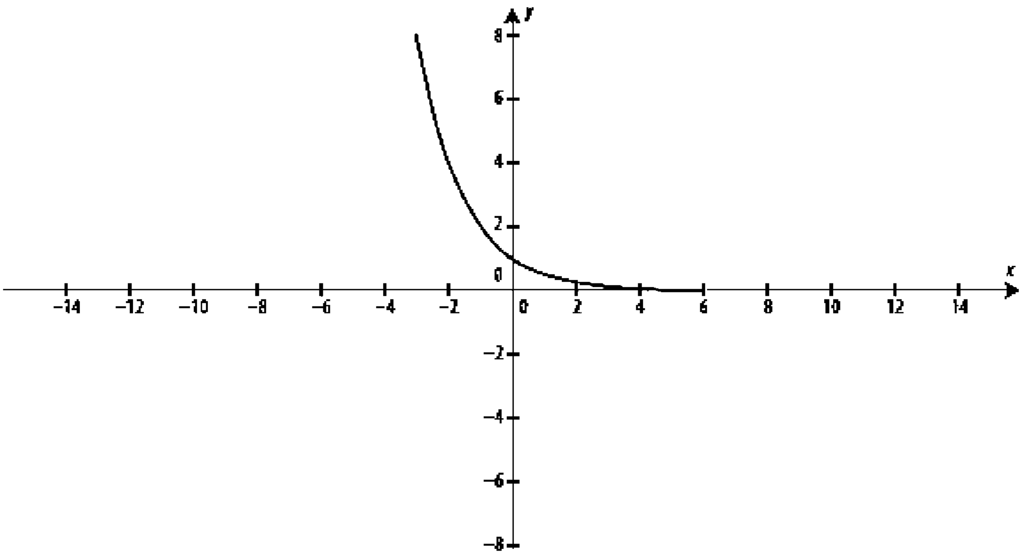


Figura 5.4 Gráfica de la función $f(x) = 2^{-x}$.

Ejemplo 2

Trazar la gráfica de la función $f(x) = -3^x + 1$. Dar el dominio y el rango.

Solución

Partimos de la gráfica de la función $f(x) = 3^x$ que ya graficamos antes y usamos las transformaciones de la sección 3.4. Primero reflejamos la gráfica con respecto al eje x para obtener la gráfica de $f(x) = -3^x$ que se muestra en la figura 5.5.

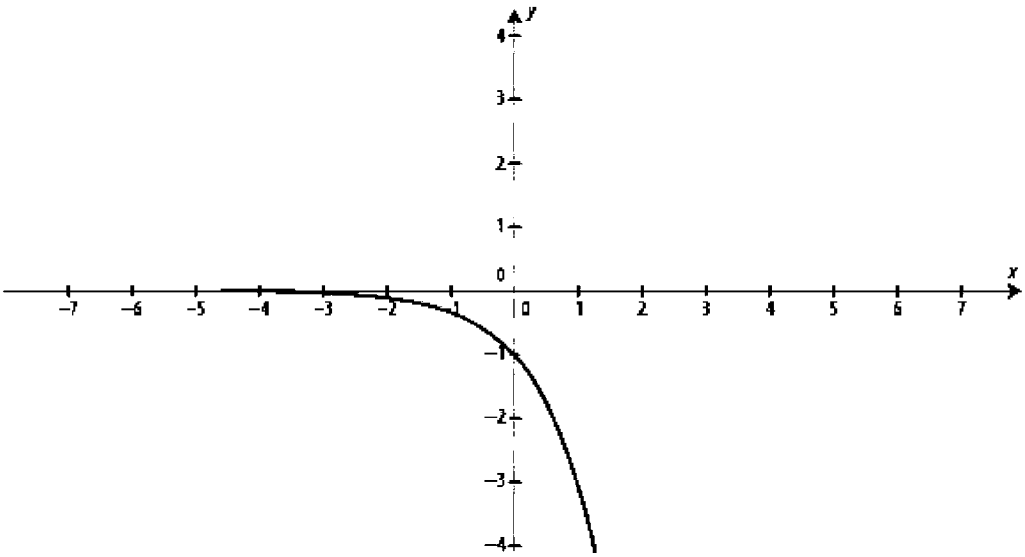


Figura 5.5 Gráfica de la función $f(x) = -3^x$.

Y por último desplazamos esta gráfica una unidad hacia arriba para obtener la gráfica de la función $f(x) = -3^x + 1$, que se muestra en la figura 5.6 en negro. En gris claro se ha graficado la asíntota, que ahora es la recta $y = 1$, porque también subió una unidad. El dominio sigue siendo $(-\infty, \infty)$ pero ahora el rango es el intervalo $(-\infty, 1)$.

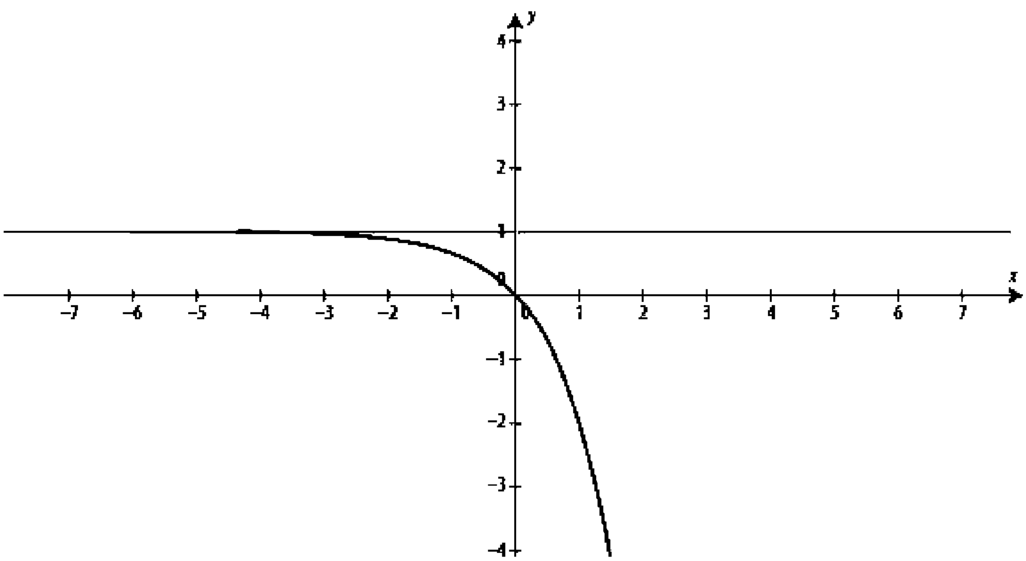


Figura 5.6 Gráfica de la función $f(x) = -3^x + 1$.

Ejemplo 3

Trazar la gráfica de la función $f(x) = 5^{x-1} - 2$. Dar dominio y rango. Hallar las intersecciones con los ejes.

Solución

Partimos de la gráfica de $f(x) = 5^x$, que no hemos graficado antes pero tendrá la misma forma que las de $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$, solo que crecerá aún más rápido. Su gráfica se muestra en la figura 5.7.

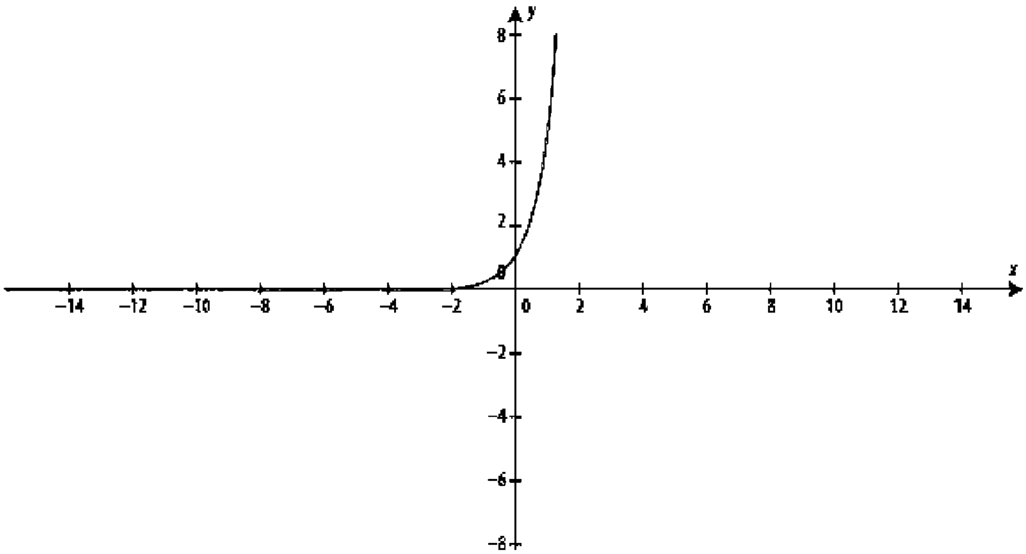


Figura 5.7 Gráfica de la función $f(x) = 5$.

La primera transformación que aplicaremos será desplazar la gráfica a la derecha una unidad para obtener la gráfica de $f(x) = 5^{x-1}$. Esta gráfica se muestra en la figura 5.8.

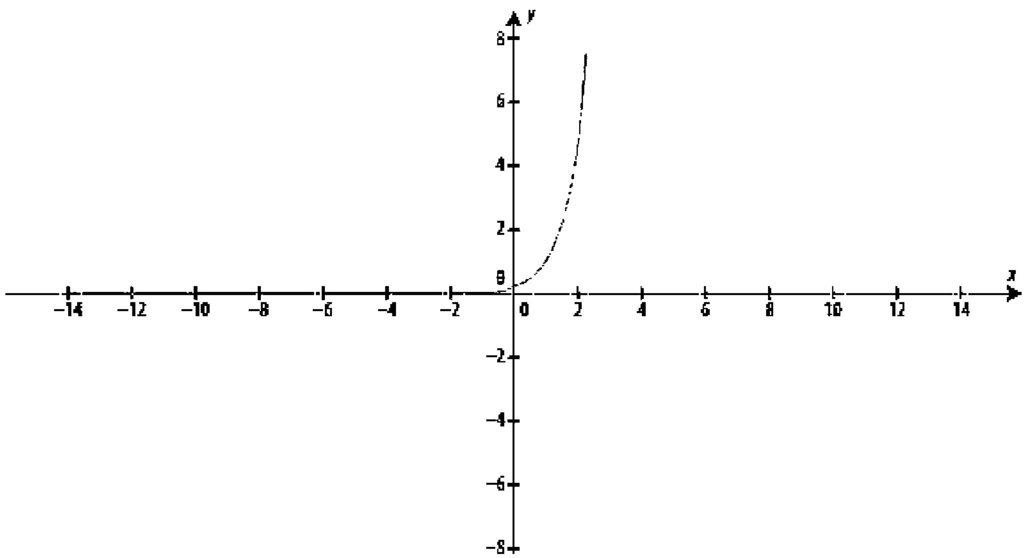


Figura 5.8 Gráfica de la función $f(x) = 5^{x-1}$.

Ahora desplazamos esta gráfica dos unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $f(x) = 5^{x-1} - 2$, que se muestra en la figura 5.9.

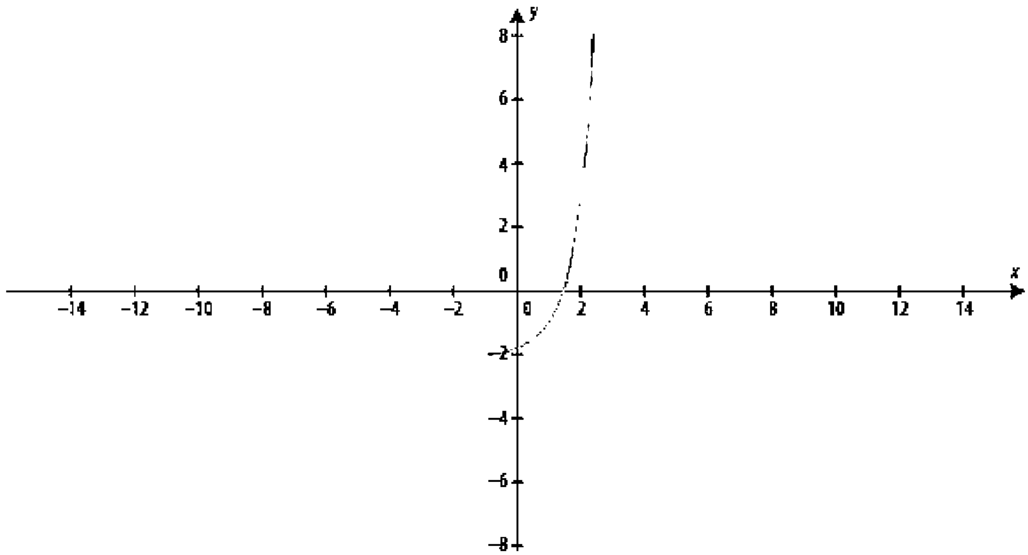


Figura 5.9 Gráfica de la función $f(x) = 5^{x-1}-2$.

En la gráfica podemos ver que el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(-2, \infty)$. Para encontrar la intersección con el eje y evaluamos la función en cero:

$$f(0)=5^{0-1}-2=5^{-1}-2=\frac{1}{5}-2=-\frac{9}{5}$$

Para la intersección con el eje x igualamos la función a cero y despejamos x:

$$5^{x-1}-2=0$$

$$5^{x-1}=2$$

Aquí nos topamos con un problema, ¿cómo despejamos x? Esta es una ecuación exponencial, y para resolverla necesitamos conocer la teoría de logaritmos, que es el tema siguiente, así que dejaremos pendiente la solución de esta ecuación para la sección siguiente.

Ahora se introducirá un nuevo número, el número irracional e, el cual es necesario para graficar la función $f(x) = e^x$, cuyo nombre es función exponencial natural.

Para encontrar el valor aproximado de e se evalúa la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para valores de n cada vez más grandes. Los resultados aparecen en la siguiente tabla.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.25
10	2.59374246
100	2.704813829
1 000	2.716923932
10 000	2.718145927
100 000	2.718268237
1 000 000	2.718280469

Puede verse que conforme x se hace grande, el valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ parece acercarse al número 2.7182...; pues esta es una aproximación al valor del número e. El número e se conoce como el número de Euler y es muy importante en Cálculo.

La función exponencial natural tiene diversas aplicaciones, desde matemáticas financieras, crecimiento de poblaciones, desintegración radioactiva o circuitos eléctricos, por citar algunas.

Ejemplo 4

Trazar la gráfica de $f(x) = e^x$.

Solución

Tabulamos usando una calculadora para aproximar los valores de la función (las calculadoras científicas tienen una tecla especial para elevar e a alguna potencia). La gráfica se muestra en la figura 5.10.

x	$f(x) = e^x$
0	1
1	2.718281828
2	7.389056099
3	20.08553692
−1	0.3678794412
−2	0.1353352832
−3	0.04978706837

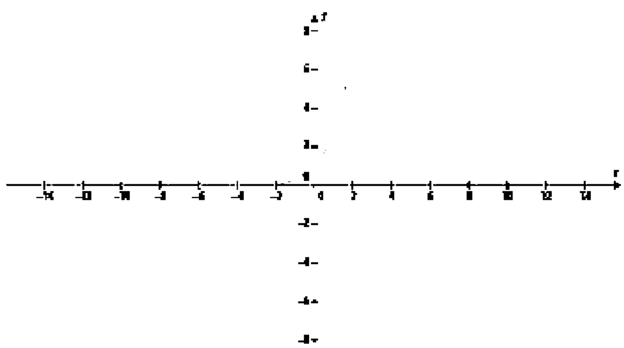


Figura 5.10 Gráfica de la función $f(x) = e^x$.

Como podemos ver, también esta gráfica cruza el eje y en 1, su dominio es $(-\infty, \infty)$ y su rango es $(0, \infty)$.

Ejemplo 5

Un cultivo de bacterias inicia con dos bacterias. Se reproducen duplicándose cada segundo. Escribir una función que dé la población p de bacterias en función del tiempo t (en segundos). ¿Cuántas bacterias habrá en un minuto?

Solución

Podemos empezar haciendo una tabla donde observemos cómo va creciendo la población de bacterias cada segundo:

t	$P(t)$
0	2
1	4
2	8
3	16
4	32

Esta tabla debe darnos una idea de cómo puede ser la ecuación de la función. Si la población se va duplicando, podemos usar la función $f(x) = 2^x$. Compara esta tabla con la que hicimos para trazar la gráfica de $f(x) = 2^x$; observa que los valores de nuestra tabla son los de la tabla de $f(x) = 2^x$ pero multiplicados por dos, entonces la función que buscamos es $f(x) = 2(2^x)$.

En un minuto habrá por tanto $f(60) = 2(2^{60}) \approx 2.3058 \times 10^{18}$ bacterias.

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 a 8 traza la gráfica de la función y da su dominio y rango.

1. $f(x) = 2^{x+2}$
2. $f(x) = 3^{-x}$
3. $g(x) = -4^{-x}$
4. $f(x) = e^{x} - 3$
5. $f(x) = 5^{-x} - 2$
6. $f(x) = e^{x-1} + 1$
7. $h(x) = -2^{x-2}$
8. $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 4$

9. Una población de bacterias inicia con dos bacterias, una de las cuales se reproduce triplicándose cada segundo (las dos bacterias que surgen de ella también se triplican cada segundo y así sucesivamente), pero la otra bacteria no puede reproducirse. Escribe una función que dé la población de bacterias p en función del tiempo t (en segundos). ¿En qué momento habrá 59 050 bacterias?

10. Una empresa predice que el valor de la misma se duplicará cada año. Si se toma $t = 0$ como el año 2012, ¿en qué año el valor de la empresa es de \$180 000.00?, escribe el valor V de la empresa en función del tiempo t (en años). ¿Cuál sería el valor de la empresa en 2019?

5.2 Funciones logarítmicas

Primero se definirá qué es un logaritmo. La siguiente expresión

$$\log_a x = y$$

se lee "logaritmo base a de x es igual a y" donde x es el argumento del logaritmo. Esta expresión quiere decir que

$$a^y = x$$

Es decir, un logaritmo es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el argumento. Por ejemplo, ¿cuál sería el $\log_2 8$? Para contestar esta pregunta tenemos que encontrar el exponente al cual se debe elevar el 2 para que dé 8; es decir 3. Entonces $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$. Las ecuaciones $\log_2 8 = 3$ y $2^3 = 8$ corresponden a las ecuaciones $\log_a x = y$ y $a^y = x$, respectivamente.

Siempre se puede pasar de una ecuación a otra, es decir, de forma logarítmica a forma exponencial y viceversa. Por ejemplo, la ecuación $\log_3 9 = 2$, que está escrita en forma logarítmica, sería equivalente a la ecuación $3^2 = 9$, que está en forma exponencial; y la ecuación $2^{-1} = \frac{1}{2}$, que está en forma exponencial, sería equivalente a la ecuación $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, que está en forma logarítmica.

Ejemplo 6

Hallar el logaritmo y escribir la ecuación en forma exponencial.

a) $\log_4 64$

b) $\log_6 1$

c) $\log_8 \frac{1}{64}$

Solución

Recordemos que un logaritmo es el exponente al cual debemos elevar la base para obtener el argumento. Entonces, en el caso del inciso a), ¿a qué exponente hay que elevar el 4 para obtener 64? La respuesta es 3. Haciendo el mismo análisis obtenemos las siguientes respuestas.

a) $\log_4 64 = 3$

b) $\log_6 1 = 0$

c) $\log_8 \frac{1}{64} = -2$

La forma exponencial de cada ecuación quedaría como sigue.

a) $4^3 = 64$

b) $6^0 = 1$

c) $8^{-2} = \frac{1}{64}$

Logaritmos común y natural

Cuando la base de un logaritmo es 10, se llama logaritmo común, debido a que 10 es una base muy usada. Al escribir un logaritmo común, la base se omite, es decir, para escribir $\log_{10} x$, realmente solo se escribe $\log x$.

Otro tipo especial de logaritmo es el logaritmo natural, cuya base es el número irracional e introducido en la sección anterior. Al escribir un logaritmo natural no se acostumbra ponerlo como $\log_e x$ sino como $\ln x$.

Ejemplo 7

Pasar la ecuación a forma exponencial o logarítmica según corresponda.

a) $\log 3x = 8$

b) $\ln(x + 2) = a$

c) $10^{2x+3} = 1$

d) $e^{\frac{1}{x}} = z - 2$

Solución

Usando las ecuaciones dadas al inicio del tema, donde $\log_a x = y$ implica que $a^y = x$ y viceversa, podemos escribir la otra forma de cada ecuación. Los resultados son:

a) $10^8 = 3x$

b) $e^a = x + 2$

c) $\log 1 = 2x + 3$

d) $\ln(x-2)=\dfrac{1}{x}$

Ejemplo 8

Hallar la intersección con el eje x de la función del ejemplo 3 de la sección 5.1.

Solución

En dicho ejemplo dejamos pendiente la resolución de la ecuación $5^{x-1} = 2$, que nos daría la intersección de la función con el eje x. Ahora ya podemos resolverla, simplemente la pasamos a forma logarítmica para obtener

$$\log_5 2 = x - 1$$

Despejamos y tenemos que $x = \log_5 2 + 1$.

Ese es el valor exacto de la intersección con el eje x, pero ¿cuánto vale? El $\log_5 2$ no es un número entero; es la potencia a la que hay que elevar 5 para obtener 2, y ciertamente debe ser un número menor que 1. Para aproximarlo podemos usar una calculadora; sin embargo, no todas las calculadoras pueden obtener un logaritmo con la base que deseemos, muchas solo tienen teclas para los logaritmos común y natural. Si tu calculadora no te permite escribir la base que quieras, tendrás que hacer un cambio de base para calcular este logaritmo, pero eso lo veremos un poco más adelante. Si tienes una calculadora con opción de introducir cualquier base, podrás corroborar que la respuesta aproximada es

$$x \approx 1.430677$$

Lo cual concuerda con la gráfica mostrada en la figura 5.9 de la sección 5.1.

Propiedades de los logaritmos

A continuación se enlistan algunas propiedades inherentes a los logaritmos que pueden resultar útiles al momento de calcular un logaritmo.

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^x = x$
4. $a^{\log_a x} = x$

Para estas propiedades se supone que $a > 0$. Las primeras dos son muy obvias. La primera propiedad simplemente dice que el logaritmo (con cualquier base) de 1 es 0, esto debido a que cualquier número positivo elevado a la 0 da 1. La segunda dice que cuando la base y el argumento son iguales, el logaritmo es 1, esto desde luego es así porque $a^1 = a$.

Si se escribe en forma exponencial la tercera propiedad, indica que $a^x = a^x$, lo cual obviamente es cierto. Esta propiedad puede parecer un poco redundante pero es de mucha utilidad. Se puede resumir como sigue: si se tiene el logaritmo de una potencia, y la base del logaritmo y de la potencia es la misma, entonces el resultado es el exponente.

A simple vista, la cuarta propiedad puede resultar difícil de entender, por lo que se verá con un ejemplo.

$$6^{\log_6 36} = 6^2 = 36$$

Simplemente quiere decir que cuando se tenga una base elevada a un logaritmo con esa misma base, el resultado es el argumento.

Ejemplo 9

Simplificar las siguientes expresiones.

a) $\log 0.001$

b) $e^{\ln 4}$

Solución

Desde luego, el objetivo no es hacerlo con calculadora, sino usando las propiedades de los logaritmos. Para el inciso a) iremos trabajando el argumento hasta convertirlo en una potencia de base 10, y así podremos usar la propiedad 3. Esto sería:

a) $\log 0.001 = \log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3$

donde en el último paso hemos aplicado la tercera propiedad.

En el inciso b) podemos aplicar directamente la cuarta propiedad porque la base de la potencia y del logaritmo es la misma: el número e. Entonces la respuesta es:

b) $e^{\ln 4} = 4$

Gráficas de funciones logarítmicas

Ya se vio lo que es un logaritmo, ahora se graficarán funciones logarítmicas. Una función logarítmica es una función del tipo

$$f(x) = \log_a x,\ a > 0$$

Nuevamente, igual que en las funciones exponenciales, solo se trabajará con bases positivas porque aseguran que las funciones serán continuas y, por tanto, útiles para modelar situaciones reales.

Ejemplo 10

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \log_2 x$.

Solución

Primero elaboramos una tabla de valores para obtener la gráfica.

x	$f(x) = \log_2 x$
1	0
2	1
4	2
8	3
1/2	−1
1/4	−2
1/8	−3

Observamos en la tabla que no asignamos valores negativos a x, esto debido a que no se puede obtener el logaritmo base 2 de un número negativo. En general, siempre que la base sea positiva, no se puede obtener el logaritmo de un número negativo ni de cero, porque no existe algún exponente al cual elevar un número positivo y que el resultado sea negativo o cero.

La gráfica se muestra en la figura 5.11.

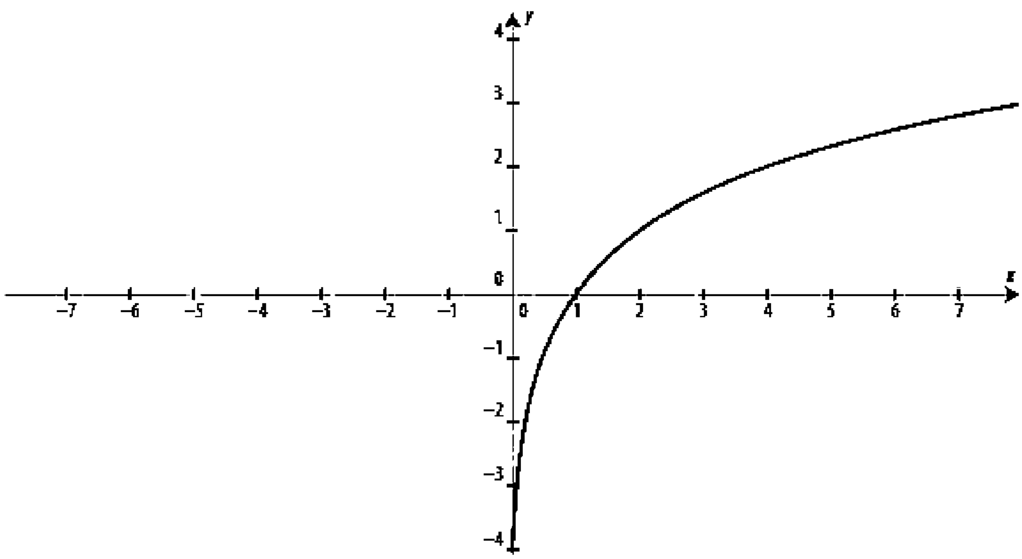


Figura 5.11 Gráfica de la función $f(x) = \log_2 x$.

Entonces concluimos que el dominio de una función logarítmica (considerando la base positiva) es el intervalo $(0, \infty)$ y el rango es el intervalo $(-\infty, \infty)$. Notamos también que así como en las funciones exponenciales se considera al eje x como una asíntota, en las funciones logarítmicas la asíntota es el eje y (siempre y cuando la función no esté desplazada hacia la derecha o izquierda) porque cuando x se acerca al origen por la derecha, es decir cuando x es positiva y muy pequeña, la función se hace cada vez más negativa, digamos que se va pegando al eje y, pero nunca lo tocará.

En la figura 5.12 se han graficado en el mismo plano coordenado las funciones $f(x) = 2^x$ y $f(x) = \log_2 x$. Se observa que son simétricas con respecto a la recta $y = x$ y que el rango de una es el dominio de la otra y viceversa. Esto significa que una función exponencial y una función logarítmica que tengan la misma base son funciones inversas.

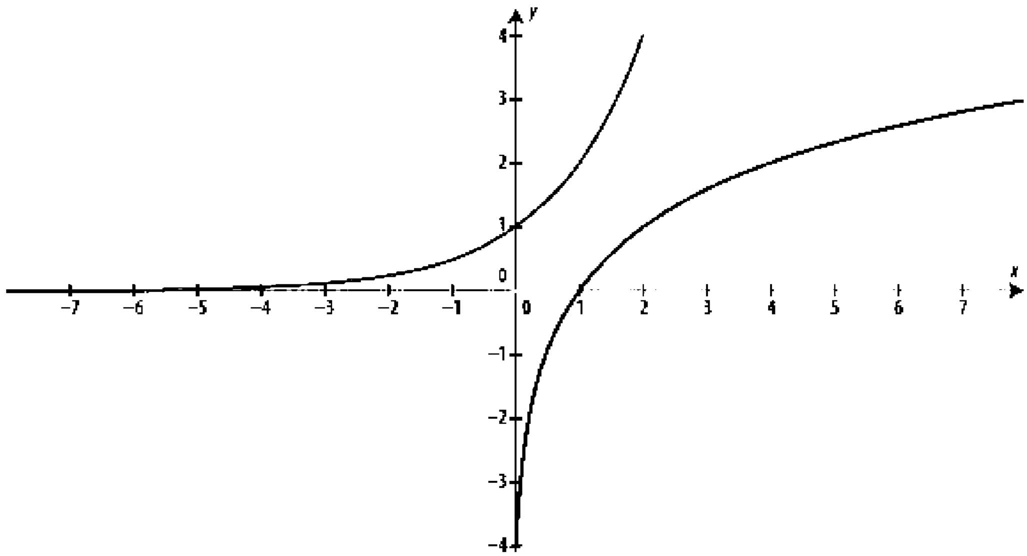


Figura 5.12

Ejemplo 11

Trazar la gráfica de la función $f(x) = -\log_3 x - 1$.

Solución

Comenzaremos trazando la gráfica de $f(x) = \log_3 x$ haciendo una tabla de valores.

x	$f(x) = \log_3 x$
1	0
3	1
9	2
27	3
1/3	−1
1/9	−2

La gráfica de $f(x) = \log_3 x$ se muestra en la figura 5.13.

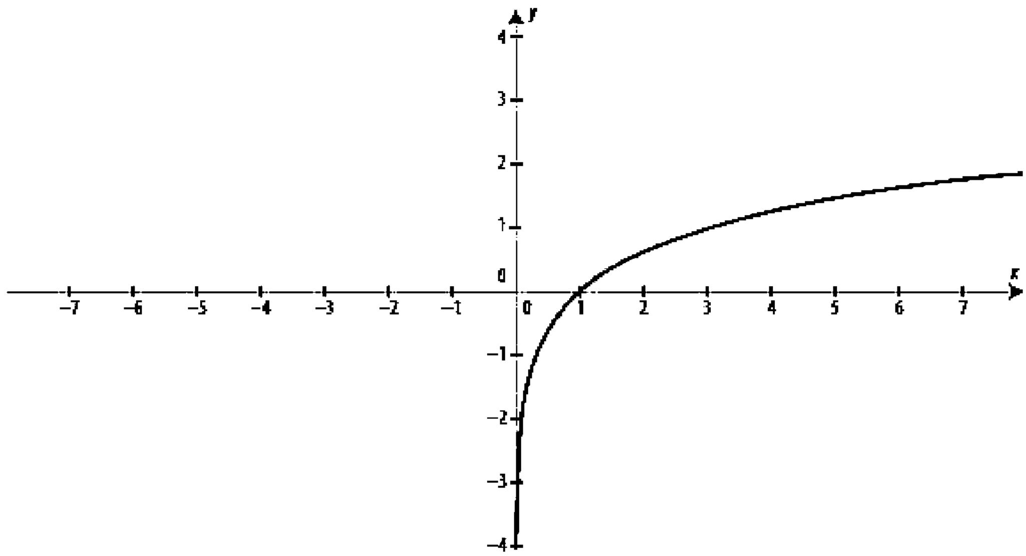


Figura 5.13 Gráfica de $f(x) = \log_3 x$.

Notamos que así como todas las funciones exponenciales pasan (si no está transformada) por el punto (0,1), todas las funciones logarítmicas pasan por el punto (1, 0) (si no está desplazada) sin importar cuál sea la base.

Ahora transformamos esta gráfica para obtener la gráfica de $f(x) = -\log_3 x - 1$. Primero reflejamos con respecto al eje x y luego desplazamos la gráfica una unidad hacia abajo. La gráfica se muestra en la figura 5.14.

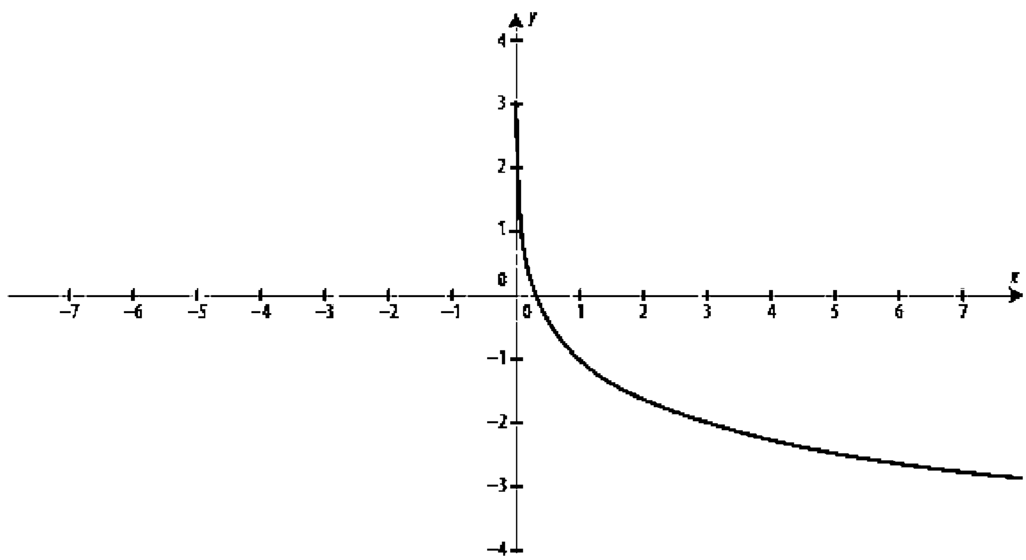


Figura 5.14 Gráfica de $f(x) = -\log_3 x - 1$.

Leyes de los logaritmos

A continuación se deducirán las leyes de los logaritmos. Es importante resaltar que no deben confundirse con las propiedades de los logaritmos que se dieron antes en esta misma sección.

Primero definimos $\log_a A = u$ y $\log_a B = v$. En forma exponencial estas ecuaciones se convierten en $a^u = A$ y $a^v = B$, respectivamente. Entonces:

$$\log_a AB = \log_a a^u a^v = \log_a a^{u+v} = u + v = \log_a A + \log_a B$$

Donde en el segundo paso se usó una ley de los exponentes vista en el capítulo 1, y en el tercer paso se usó la tercera propiedad de los logaritmos que se vio antes. Se acaba de deducir la primera ley de los logaritmos que puede resumirse como:

$$1.\ \log_a AB = \log_a A + \log_a B$$

Esta ley dice que cuando el argumento de un logaritmo es una multiplicación, entonces se puede escribir como la suma de los logaritmos de cada factor de la multiplicación.

Si el argumento es una división, tenemos que:

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a \frac{a^u}{a^v} = \log_a a^{u-v} = u - v = \log_a A - \log_a B$$

Aquí nuevamente en el segundo paso se ha usado una ley de los exponentes y en el tercer paso se aplicó la tercera propiedad de los logaritmos. Esta ley se resume como:

$$2.\ \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

Y esta ley dice que cuando el argumento de un logaritmo es una división, se puede escribir como la resta del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

La última ley se refiere al caso en que el argumento es una potencia. O sea:

$$\log_a A^c = \log_a (a^u)^c = \log_a a^{cu} = cu = c \log_a A$$

Se enuncia esta ley como

$$3.\ \log_a A^c = c \log_a A$$

Y dice que si el argumento de un logaritmo es una potencia, entonces se puede "bajar" el exponente y queda multiplicando al logaritmo.

Estas tres leyes ayudarán en la siguiente sección a resolver ecuaciones logarítmicas de complejidad moderada.

Ejemplo 12

Usar las leyes de los logaritmos para escribir las expresiones como una suma, resta o multiplicación.

a) $\log_3 5x$

b) $\ln \dfrac{10}{x+1}$

c) $\log 4^{x\;\;2}$

Solución

Como los argumentos de estas tres expresiones son una multiplicación, una división y una potencia, usaremos las leyes 1, 2 y 3 para los incisos a, b y c respectivamente. Las nuevas expresiones son:

a) $\log_3 5 + \log_3 x$

b) $\ln 10 - \ln(x + 1)$

c) $(x - 2) \log 4$

Ejemplo 13

Escribir la expresión como un solo logaritmo.

$$\log_5 x + 2\log_5(2x - 1) - \log_5(1 - x)$$

Solución

Aquí aplicaremos las leyes de los logaritmos pero a la inversa. Primero usamos la ley 3 para pasar al 2 que multiplica al segundo logaritmo como exponente:

$$\log_5 x + \log_5(2x - 1)^2 - \log_5(1 - x)$$

Ahora escribimos los primeros dos logaritmos que se están sumando como uno solo usando la ley 1:

$$\log_5\left[x(2x - 1)^2\right] - \log_5(1 - x)$$

Por último, como tenemos una resta de logaritmos, usamos la ley 2 para escribirlos como uno solo:

$$\log_5 \frac{x(2x - 1)^2}{1 - x}$$

Cambio de base

Ahora se verá cómo escribir un logaritmo de cierta base en términos de logaritmos de cualquier otra base.

Sea $u = \log_a x$. Así que en forma exponencial esto es $a^u = x$.

A esta última ecuación se le saca logaritmo base b de ambos lados (donde b será cualquier base que se desee).

$$\log_b a^u = \log_b x$$

Por la ley 3 de los logaritmos puede pasarse la u multiplicando y luego despejarla:

$$u \log_b a = \log_b x$$

$$u = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Pero se sabe que $u = \log_a x$, entonces:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Esta es la fórmula para realizar un cambio de base, a continuación se verá cómo usarla.

Ejemplo 14

Cambiar $\log_5 2$ a base 10.

Solución

Este logaritmo es el que teníamos en el ejemplo 3. Si lo queremos pasar a base 10 entonces en la fórmula de cambio de base $b = 10$ y tenemos que

$$\log_5 2 = \frac{\log 2}{\log 5} \approx 0.4306765581$$

Lo cual hemos aproximado con una calculadora.

Vamos a comprobar que no importa qué base tomemos. Si tomamos logaritmos naturales ($b = e$) entonces tendríamos que

$$\log_5 2 = \frac{\ln 2}{\ln 5} \approx 0.4306765581$$

que es lo mismo que cuando tomamos base 10.

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 11 a 16, escribe la ecuación en forma exponencial.

11. $\log_4 x = 10$

12. $\log_x 2 = 5$

13. $\log_{x-1} 9 = y$

14. $\log_x (x+3) = 8 + y$

15. $\log(x^2 - 1) = y$

16. $\ln y^3 = \frac{1}{x}$

En los ejercicios 17 a 22, escribe la ecuación en forma logarítmica.

17. $2^x = 7$

18. $e^4 = x + 3$

19. $(x+6)^5 = \frac{2}{3}$

20. $10^{x-8} = y$

21. $3^{1-x} = t^5$

22. $e^{r^3} = 4 - r$

En los ejercicios 23 a 34, evalúa la expresión.

23. $\log_7 1$

24. $\log_4 0$

25. $\log_2 32$

26. $\log_3 81$

27. $\log_5 \frac{1}{5}$

28. $\log_3 \frac{1}{27}$

29. $\log 100$

30. $\ln e^2$

31. $\ln \frac{1}{e}$

32. $4^{\log_4 30}$

33. $10^{\log t}$

34. $e^{\ln 8}$

En los ejercicios 35 a 40, traza la gráfica de la función y da su dominio y rango.

35. $f(x) = \log_2(x-1)$

36. $f(x) = \log_3(-x)$

37. $g(x) = -\log x$

38. $h(x) = \ln x + 1$

39. $f(x) = 2\log_2 x$

40. $f(x) = \frac{1}{2}\log_3 x$

En los ejercicios 41 a 44, escribe la expresión como sumas o restas de logaritmos. Evita que los argumentos queden como potencias.

41. $\log \frac{x^2-1}{xy}$

42. $\log_2 xy^2\sqrt{z}$

43. $\ln \frac{2}{(t+3)(t-4)^2}$

44. $\log_a \frac{\sqrt[3]{x+2}(x-2)}{4}$

En los ejercicios 45 a 48, escribe la expresión como un solo logaritmo.

45. $\log_3 x + \log_3(x-1) - \log_3(x+3)$

46. $\log(x^3+1) - 2\log_x - \log(1-x)$

47. $\frac{1}{2}\ln y - \ln\frac{1}{y+2} + \ln(x+7)$

48. $-3\log_8 x + \log_8 \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}\log_8 8$

En los ejercicios 49 y 50, haz un cambio de base y aproxima el resultado con una calculadora.

49. $\log_7 40$

50. $\log_{11} 230$

5.3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ahora ya se pueden resolver ecuaciones exponenciales (aquellas en las que la variable a despejar está en el exponente) y logarítmicas (aquellas en las que la variable a despejar está en el argumento de un logaritmo).

Ecuaciones exponenciales

Ya se resolvió una ecuación exponencial. En el ejemplo 3 de la sección 5.1 se tenía la ecuación $5^{x-1} = 2$ y se resolvió pasando la ecuación a forma logarítmica y luego despejando x. Se repite el proceso aquí:

$$\log_5 2 = x - 1$$

$$x = \log_5 2 + 1$$

Esto es lo que hay que hacer siempre, pasar la ecuación a forma logarítmica y despejar x si es necesario.

Ejemplo 15

Resolver la ecuación $3^{\frac{1}{z}} = 6$.

Solución

Pasamos a forma logarítmica:

$$\log_3 6 = \frac{1}{z}$$

Despejamos z:

$$z \log_3 6 = 1$$

$$z = \frac{1}{\log_3 6}$$

Ejemplo 16

Resolver la ecuación $2^{x^2} = 8$.

Solución

Pasamos a forma logarítmica:

$$\log_2 8 = x^2$$

$$3 = x^2$$

Despejamos x:

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Ejemplo 17

Resolver la ecuación $2^{x+1} = 4^{2x-1}$.

Solución

En esta ecuación tenemos dos potencias que tienen x en el exponente, entonces pasarla a forma logarítmica en este punto no nos ayudará. Hay dos formas de resolver esta ecuación:

Opción 1

Debemos lograr que solo nos quede una x en la ecuación, así que usando leyes de exponentes tenemos que:

$$2^x\left(2^1\right) = \frac{4^{2x}}{4^1}$$

$$2\left(2^x\right) = \frac{\left(4^2\right)^x}{4}$$

$$8\left(2^x\right) = 16^x$$

$$8 = \frac{16^x}{2^x}$$

$$8 = \left(\frac{16}{2}\right)^x = 8^x$$

Ahora sí pasamos a forma logarítmica:

$$\log_8 8 = x$$

Y entonces tenemos que:

$$x = 1$$

Opción 2

La otra forma de hacerlo es aplicar logaritmo en ambos lados de la ecuación; usaremos logaritmos comunes:

$$\log 2^{x+1} = \log 4^{2x-1}$$

Luego aplicamos la ley 3 de los logaritmos:

$$(x+1)\log 2 = (2x-1)\log 4$$

Multiplicamos y pasamos los términos con x de un mismo lado:

$$x\log 2 + \log 2 = 2x\log 4 - \log 4$$

$$\log 2 + \log 4 = 2x\log 4 - x\log 2$$

Factorizamos el lado derecho de la ecuación:

$$\log 2 + \log 4 = x\left(2\log 4 - \log 2\right)$$

Despejamos x:

$$x = \frac{\log 2 + \log 4}{2\log 4 - \log 2}$$

Podemos simplificar este resultado usando las leyes de los logaritmos:

$$x = \frac{\log 2 + \log 4}{\log 16 - \log 2} = \frac{\log 8}{\log 8} = 1$$

Ejemplo 18

Resolver la ecuación $4^x + 4^{-x} - 3 = 0$.

Solución

Hacemos positivo el exponente del segundo término:

$$4^x + \frac{1}{4^x} - 3 = 0$$

Recordemos que en una ecuación racional siempre conviene multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, en este caso 4^x:

$$\left(4^x + \frac{1}{4^x} - 3 = 0\right)4^x$$

$$\left(4^x\right)^2 + \frac{4x}{4x} - 3\left(4^x\right) = 0\left(4^x\right)$$

$$\left(4^x\right)^2 + 1 - 3\left(4^x\right) = 0$$

$$\left(4^x\right)^2 - 3\left(4^x\right) + 1 = 0$$

Si ahora tomamos $4^x = z$, entonces la ecuación se transforma en una ecuación cuadrática (capítulo 2):

$$z^2 - 3z + 1 = 0$$

Resolvemos para z usando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas:

$$z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tenemos dos soluciones para z:

$$z_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ y } z_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Y como $z = 4^x$, entonces tenemos dos ecuaciones exponenciales que resolver:

$$4^{x_1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ y } 4^{x_2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Se despejan x pasándolas a forma logarítmica. Para la primera ecuación tenemos que:

$$x_1 = \log_4 \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Y para la segunda nos queda:

$$x_2 = \log_4 \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Solo falta verificar que estos dos logaritmos existan, es decir, que sus argumentos sean números positivos. Podemos hacerlo mentalmente: sabemos que $\sqrt{5}$ debe ser un número mayor que 2 y menor que 3 puesto que $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{9} = 3$. Esto asegura que tanto $3+\sqrt{5}$ como $3-\sqrt{5}$ son números positivos y por tanto ambas soluciones son válidas. Aproximándolas con una calculadora tenemos que

$$x_1 \approx 0.694242 \text{ y } x_2 \approx -0.69424$$

Ecuaciones logarítmicas

Así como las ecuaciones exponenciales debían expresarse en forma logarítmica para encontrar su solución, las ecuaciones logarítmicas deben pasarse a forma exponencial para encontrar su solución. A continuación se dan algunos ejemplos.

Ejemplo 19

Resolver la ecuación $\log_6(2x-4) = 0$.

Solución

Pasamos a forma exponencial:

$$6^0 = 2x - 4$$

Y despejamos :

$$1 = 2x - 4$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Ejemplo 20

Resolver la ecuación $2 + \ln(x^2 - 3x + 1) = 3$.

Solución

Despejamos el logaritmo:

$$\ln(x^2 - 3x + 1) = 1$$

Pasamos a forma exponencial:

$$e^1 = x^2 - 3x + 1$$

Igualamos a cero:

$$x^2 - 3x + 1 - e = 0$$

Resolvemos con la fórmula general tomando $c = 1 - e$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(1 - e)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5 + 4e}}{2}$$

Aproximando las soluciones tenemos que:

$$x_1 \approx 3.492055 \text{ y } x_2 \approx -0.492055$$

Al resolver ecuaciones logarítmicas podemos encontrarnos con soluciones "extrañas" o inválidas, así que debemos revisar que en efecto satisfagan la ecuación, la cual se cumplirá siempre que el o los logaritmos presentes en ella estén definidos, es decir, que sus argumentos sean positivos.

En este caso solo hay un logaritmo donde el argumento es el polinomio $x^2 - 3x + 1$; este polinomio debe ser positivo para los valores x_1 y x_2 obtenidos como soluciones. Se puede comprobar que dicho polinomio toma aproximadamente el valor 2.718 para ambas soluciones; de hecho, si encontráramos este valor de forma exacta usando los valores exactos: $\frac{3 \pm \sqrt{5 + 4e}}{2}$, obtendríamos que dicho valor es el número e. Y como e es un número positivo, entonces ambas soluciones son válidas.

Ejemplo 21

Resolver la ecuación $\log(x + 3) + \log x - \log(x - 1) = 1$.

Solución

En este caso primero debemos lograr que solo nos quede un logaritmo, entonces usamos las leyes de los logaritmos vistas en la sección 5.2.

Usando la ley 1 tenemos que:

$$\log[(x + 3)x] - \log(x - 1) = 1$$

Ahora con la ley 2 obtenemos:

$$\log \frac{x(x+3)}{x-1} = 1$$

Ya teniendo un solo logaritmo, pasamos la ecuación a forma exponencial:

$$10^1 = \frac{x(x+3)}{x-1}$$

Convertimos esta ecuación racional en una cuadrática:

$$10(x-1) = x^2 + 3x$$

$$10x - 10 = x^2 + 3x$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Y la resolvemos por factorización:

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 5$$

Para comprobar que ambas respuestas sean válidas, debemos asegurarnos de que los tres logaritmos de la ecuación original tengan argumentos positivos cuando $x = 2$ y cuando $x = 5$. Sustituyendo $x = 2$ y $x = 5$ en los tres logaritmos obtenemos siempre argumentos positivos, entonces ambas soluciones son válidas.

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 51 a 55, resuelve las ecuaciones exponenciales.

51. $7^{2x-3} = 4$

52. $e^{3-x} = 2$

53. $3^{x+2} = 4^{-x}$

54. $5^{x-1} = 10^{x+1}$

55. $3^x + 3^{-x} - 6 = 0$

56. La función coseno hiperbólico es una función especial que tiene algunas aplicaciones, por ejemplo, en la construcción de puentes. Esta función se define como:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

¿Con qué valor o valores de x el coseno hiperbólico es igual a 1?

57. La dosis M (en miligramos) presente en el torrente sanguineo de una persona que ingiere una pastilla de 100 mg de cierto medicamento está dada por la función:

$$M = 100\left[1 - 0.7^t\right] \text{ para } 0 \leq t \leq 10$$

donde t es el tiempo en minutos después de haberla ingerido. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que haya 80 mg del medicamento en el torrente sanguíneo?

En los ejercicios 58 a 63, resuelve la ecuación logarítmica.

58. $\log(3x + 7) = 2$

59. $\ln \dfrac{2}{x^2} = 0$

60. $\log_2 x^2 - \log_2(2 - x) = 2$

61. $\log_3 \dfrac{1}{x} + \log_3(x + 3) = \log_3 5 + 1$

62. $\log_4 x - \log_{16}(x - 2) = 1$ (***Sugerencia:*** Aplica un cambio de base.)

63. $\log(\log 2x) = 1$ (***Sugerencia:*** Pasa dos veces a forma exponencial.)

Capítulo 6

Funciones trigonométricas

Al final de este capítulo el alumno será capaz de:

- Identificar las diferentes formas de medir ángulos y conocer cómo transformar una medida en otra.
- Conocer las diferentes funciones trigonométricas y sus principales características.
- Graficar las funciones trigonométricas.
- Manejar las identidades trigonométricas fundamentales y demostrar con ellas otras identidades.
- Utilizar las funciones trigonométricas y sus propiedades para resolver problemas.

6.1 Ángulos

En este capítulo se presentan los ángulos y algunas formas de medirlos. Para una mejor comprensión del tema, es importante destacar aquí que *ángulo* se define como la abertura entre dos semirrectas que inician en el mismo punto.

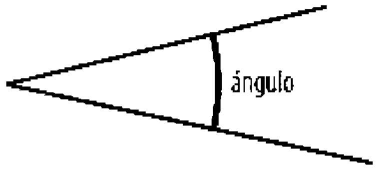


Figura 6.1

No obstante, esta definición tiene el inconveniente, de que dos semirrectas desde el mismo punto no definen un ángulo sino dos (véase la figura 6.2).

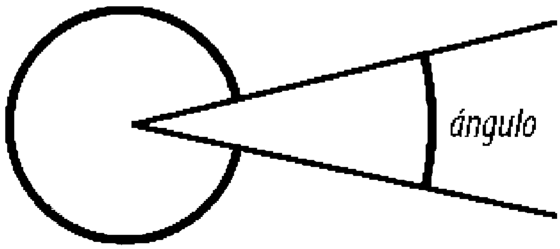


Figura 6.2

Esta ambigüedad se elimina al colocar el ángulo en *posición estándar*; esto es, cuando el vértice del ángulo coincide con el origen del plano cartesiano y el lado inicial del ángulo corresponde a la parte positiva del eje x. Cuando se recorre el ángulo en la dirección contraria al sentido del recorrido de las manecillas del reloj (dirección levógira), se dice que el ángulo es positivo. En cambio, cuando se recorre el ángulo en el sentido de la dirección de las manecillas del reloj (dirección dextrógira), se considera que el ángulo es negativo.

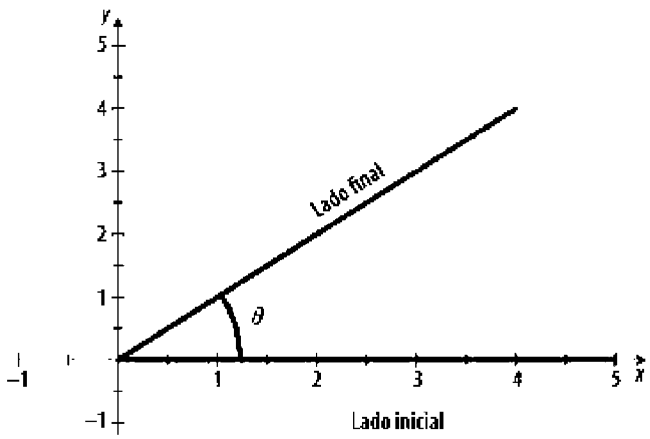


Figura 6.3

Como se recordará de cursos anteriores, los ángulos se miden en *grados* y los grados, a su vez, son el resultado de medir la circunferencia en 360 partes iguales; cada una de estas partes es precisamente un grado, que también se conoce con el nombre de *grado sexagesimal* (término que proviene de contar o subdividir de 60 en 60). Los grados se denotan con el símbolo ° delante del número. Así, por ejemplo, 90° representa noventa grados, que corresponden a un ángulo recto. Los grados sexagesimales fueron utilizados por primera vez por los babilonios, quienes utilizaban un sistema numérico de base 60. Hoy día, aún se emplea algo de este sistema numérico, sin que se tenga clara conciencia de ello: los minutos son una sesentava parte parte de una hora (1 min = (1/60) h), y los segundos son una sesentava parte de un minuto (1 s = (1/60) min).

Esta forma de medir los ángulos no es la mejor. Dividir la circunferencia completa en 360 partes iguales es totalmente arbitrario, ¿por qué no dividirla en 100, 200 o 400 partes iguales? De hecho, existe otra medida en la que la circunferencia completa se divide en 400 partes iguales, cada una de las cuales se conoce como un *grado centesimal*; esto es, un grado centesimal es el ángulo que es subtendido por un arco de 1/400 de la longitud de la circunferencia completa de un círculo. Asismimo, constituye la centésima parte de un ángulo recto (de ahí su nombre). Los grados centesimales también se conocen con el nombre de *grados centígrados* (centígrado = 100 grados) o *gradianes*.

Pero esta medida también es arbitraria, proviene del hecho de haber querido cambiar las mediciones de ángulos al sistema decimal en el siglo XVIII. Entonces, ¿cuál es la forma adecuada de medir los ángulos? La respuesta es medir los ángulos mediante radianes. Un *radián* se define como la medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia cuyos lados cortan un arco igual en longitud al radio de la circunferencia. Es decir, un radián es el ángulo que subtiende un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio. En otras palabras, la magnitud de un ángulo medido en radianes está dada por la longitud del arco de circunferencia que subtiende, dividida entre el valor del radio de la circunferencia.

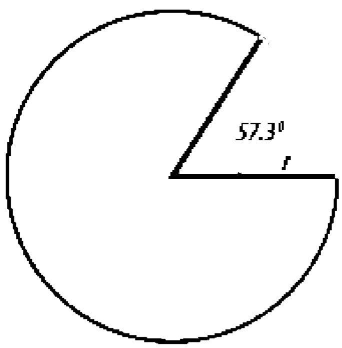


Figura 6.4

Aunque los radianes son la forma correcta de medir los ángulos, se acostumbra medir los ángulos en grados sexagesimales, que en adelante se denominarán solo como grados. Existen diferentes métodos para convertir los grados a radianes, pero aquí solo se presenta un método de conversión de grados a radianes y de radianes a grados. Por fortuna, este proceso es muy sencillo, solo basta aplicar una regla de tres simple y saber que una circunferencia completa equivale a 360° y a 2 π *rad*, por lo que 180° corresponden a π *rad*. Esto permite el cambio de grados a radianes y viceversa.

Ejemplo 1

Convertir 30° a radianes.

Solución

Primero, utilizamos la regla de tres:

Grados		Radianes
180°	---	π
30°	---	x

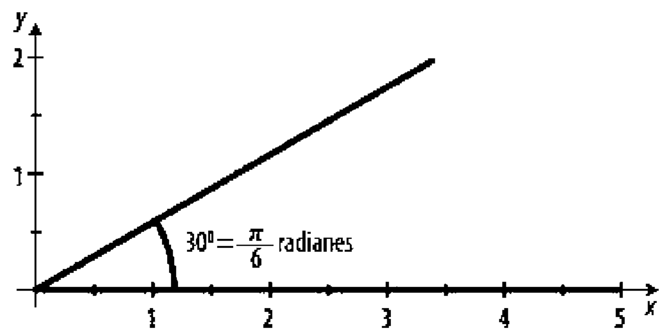


Figura 6.5

Así, al resolver la regla de tres tenemos:

$$x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ radianes}$$

Ejemplo 2

Cambiar $\frac{\pi}{3}$ radianes a grados.

Solución

En este caso, utilizamos la regla de tres:

Grados		Radianes
180°	---	π
x	---	$\frac{\pi}{3}$

Así, al resolver la regla de tres tenemos:

$$x = \frac{180\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\pi} = 60°$$

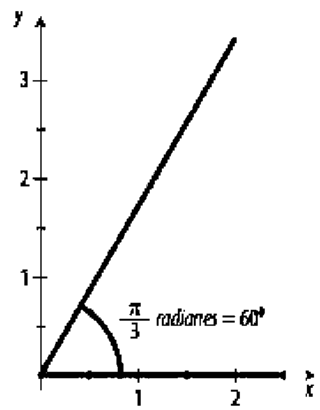


Figura 6.6

Ejemplo 3

Encontrar la medida en radianes de:

a) 90°

b) 12°

Solución

a) Dado que 90° es la mitad de 180°, su medida en radianes es la mitad de π. Así tenemos:

$$90° = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

b) En este caso solo hay que resolver una regla de tres:

Grados		Radianes
180°	–––	π
12°	–––	x

Entonces, tenemos que:

$$x = \frac{12\pi}{180} = \frac{\pi}{15} \text{ radianes}$$

Ejemplo 4

Calcular la medida en grados de:

a) $\dfrac{\pi}{12}$ radianes.

b) $\dfrac{9\pi}{4}$ radianes.

Solución

a) En este caso, utilizamos la regla de tres:

Grados		Radianes
180°	---	π
x	---	$\dfrac{\pi}{12}$

Entonces, tenemos que:

$$x = \frac{180\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\pi} = 15°$$

b) En este caso, también usamos la regla de tres:

Grados		Radianes
180°	---	π
x	---	$\dfrac{9\pi}{4}$

Entonces, tenemos que:

$$x = \frac{180\left(\frac{9\pi}{4}\right)}{\pi} = 405°$$

Obsérvese, en este último inciso, que el ángulo es mayor a 360°, por lo que su representación es una vuelta completa (360°) más otros 45°, que al sumarlos dan como resultado 405°.

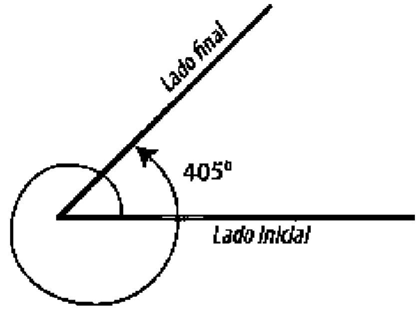


Figura 6.7

■ Ejemplo 5

Cambiar a grados y dibujar un ángulo de:

a) 1 radián.

b) 3 radianes.

Solución

a) En este caso, recurrimos (al igual que en ejemplos anteriores) a la regla de tres:

Grados		Radianes
180°	– – –	π
x	– – –	1

Entonces, tenemos que:

$$x = \frac{180(1)}{\pi} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

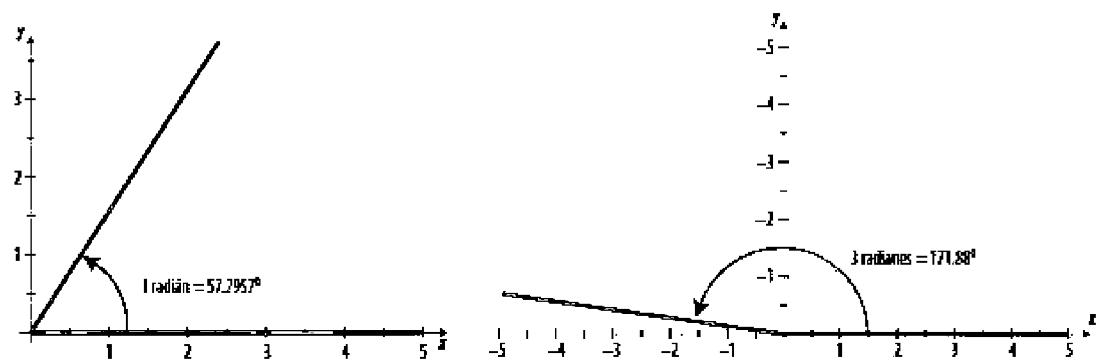
Luego, hacemos uso de la calculadora para tener una idea geométrica de esta cantidad de grados. De esta manera, tenemos que:

$$\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = (57.2957...)^{\circ}$$

Así que 57.3° corresponden, aproximadamente, a un ángulo de 1 radián (véase la figura 6.8).

b) Aquí simplemente multiplicamos la medida obtenida en a) por 3 (véase la figura 6.8). Por tanto:

$$1 \text{ radián} \approx 57.2957^{\circ}... \Rightarrow 3 \text{ radianes} \approx 171.887...^{\circ}$$



a) **b)**

Figura 6.8

De los ejemplos anteriores, se pueden obtener las reglas generales para cambiar las unidades de un ángulo de grados a radianes y de radianes a grados:

I. Para cambiar de grados a radianes

- Se multiplica el valor del ángulo en grados por $\frac{\pi}{180°}$.

II. Para cambiar de radianes a grados

- Se multiplica el valor del ángulo en radianes por $\frac{180°}{\pi}$.

Los ángulos negativos se tratan igual en cuanto al cambio de grados a radianes. Para una mejor comprensión del tema, a continuación se presentan algunos ejemplos para convertir de grados a radianes y viceversa.

Ejemplo 6

Convertir a radianes y dibujar los siguentes ángulos:

a) $-45°$

b) $-405°$

c) $315°$

Solución

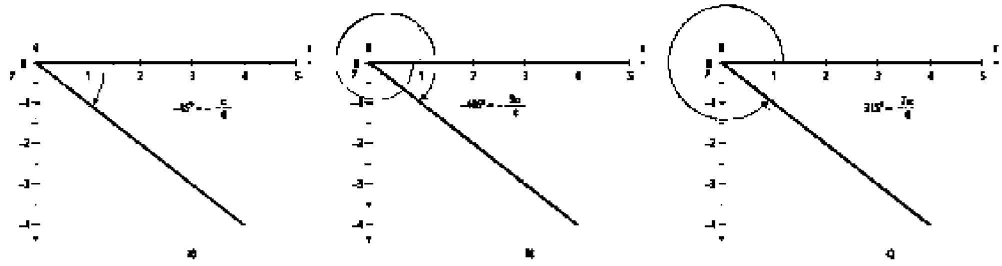
En el caso de los tres incisos basta con multiplicar las unidades del ángulo dado por $\frac{\pi}{180°}$. Así:

a) $(-45°)\frac{\pi}{180°}=-\frac{\pi}{4}$ radianes.

b) $(-405°)\frac{\pi}{180°}=-\frac{9\pi}{4}$ radianes.

c) $(315°)\frac{\pi}{180°}=\frac{7\pi}{4}$ radianes.

Para realizar la gráfica correspondiente de cada inciso, debemos recordar que, en posición estándar, un ángulo negativo se mide en la dirección en que se mueven las manecillas del reloj, mientras que un ángulo positivo se mide en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Entonces:



a) b) c)

Figura 6.9

Como podemos notar, en todos los incisos el lado terminal del ángulo es el mismo.

Ejemplo 7

Convertir a grados y dibujar los siguentes ángulos:

a) $-\frac{5\pi}{3}$ radianes.

b) $\frac{7\pi}{3}$ radianes.

c) $-\frac{5\pi}{2}$ radianes.

d) $-\frac{\pi}{2}$ radianes.

Solución

Para cambiar de radianes a grados, multiplicamos por $\frac{180°}{\pi}$ el valor del ángulo dado. Así tenemos:

a) $-\frac{5\pi}{3}$ radianes $=\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right)=-300°$

b) $\frac{7\pi}{3}$ radianes $=\left(\frac{7\pi}{3}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right)=420°$

c) $-\frac{5\pi}{2}$ radianes $=\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right)=-450°$

d) $-\frac{\pi}{2}$ radianes $=\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right)=-90°$

Por tanto, las gráficas son las siguientes:

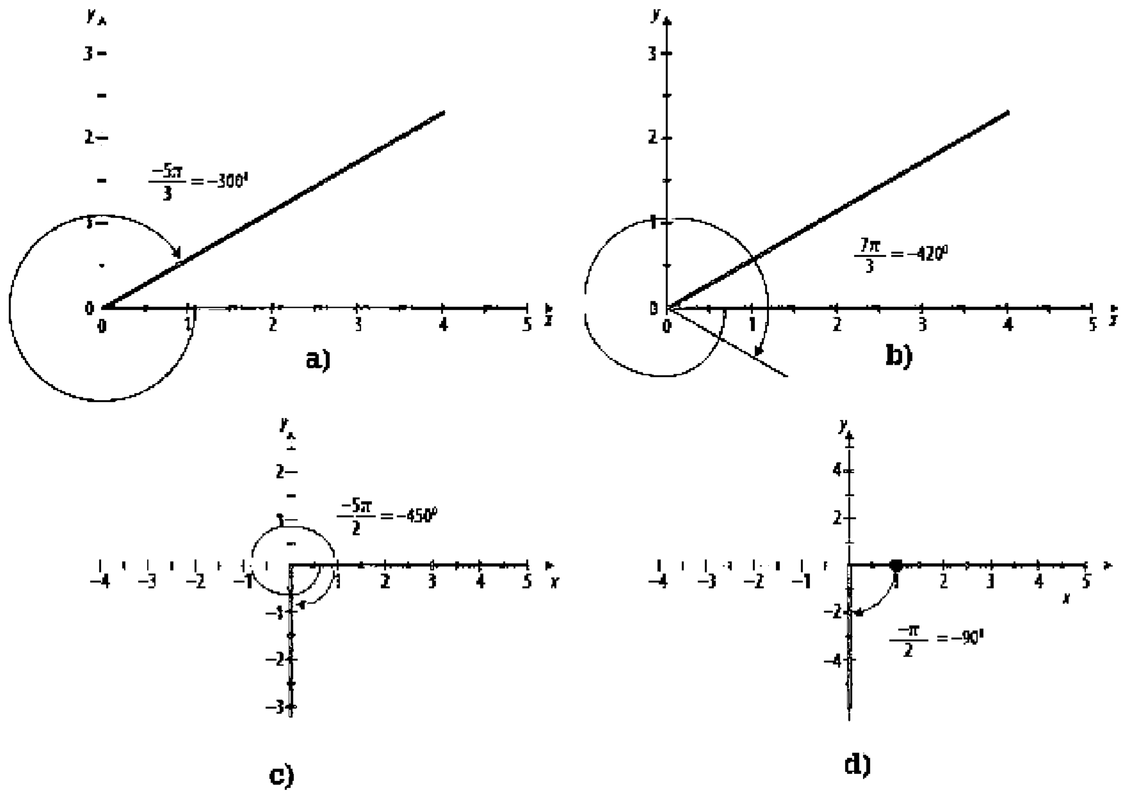


Figura 6.10

Conversión de grados y/o radianes a grados centesimales

No obstante la importancia de este tema, esta sección puede omitirse sin pérdida ni menoscabo de continuidad en un curso estándar previo al cálculo.

Como ya se dijo antes, los ángulos deben medirse en radianes, pero algunas veces se miden en grados. Pocas veces, pero cada vez más debido a las calculadoras, los ángulos se miden en grados centesimales. Por tanto, en este apartado se estudia cómo convertir las unidades de un ángulo en radianes o grados a grados centesimales y viceversa.

Al igual que sucede con la conversión de grados sexagesimales a radianes, para convertir unidades de grados centesimales a radianes y viceversa se utiliza una regla de tres simple junto con la relación obtenida del hecho de que 100 grados centesimales corresponden a un ángulo recto. Esto es:

$$200 \text{ grados centesimales} = \pi \text{ radianes}$$

Ejemplo 8

Convertir a radianes:

a) 40 grados centesimales.

b) 250 grados centesimales.

Solución

a) Primero, utilizamos la regla de tres:

Grados centesimales	Radianes
200	π
40	x

Luego, al resolver, obtenemos:

$$x = 40\left(\frac{\pi}{200}\right) = \frac{\pi}{5} \text{ radianes}$$

b) Para este caso, la regla de tres es:

Grados centesimales	Radianes
200	π
250	x

Así, tenemos que:

$$x = 250\left(\frac{\pi}{200}\right) = \frac{5\pi}{4} \text{ radianes}$$

Ejemplo 9

Convertir a grados centesimales:

a) $\frac{\pi}{3}$ radianes.

b) $\frac{5\pi}{6}$ radianes.

Solución

a) Primero, utilizamos la regla de tres:

Grados centesimales	Radianes
200	π
x	$\frac{\pi}{3}$

Luego, al resolver, obtenemos:

$$x = \frac{\pi}{3}\left(\frac{200}{\pi}\right) = \frac{200}{3} = 66.66\overline{6} \text{ grados centesimales}$$

b) En este caso, la regla de tres es:

Grados centesimales	Radianes
200	π
x	$\frac{5\pi}{6}$

Luego, al resolver, obtenemos:

$$x = \frac{5\pi}{6} = \left(\frac{200}{\pi}\right) = \frac{500}{3} = 166.66\overline{6} \text{ grados centesimales}$$

Ejemplo 10

Realizar las siguientes conversiones:

a) Convertir -35 grados centesimales a radianes.

b) Convertir $-\frac{\pi}{8}$ radianes a grados centesimales.

Solución

a) Primero, utilizamos la regla de tres:

Grados centesimales	Radianes
200	π
-35	x

Luego, al resolver, obtenemos:

$$x = -35\left(\frac{\pi}{200}\right) = -\frac{7\pi}{40} \text{ radianes}$$

b) Para este caso, la regla de tres es:

Grados centesimales	Radianes
200	π
x	$-\frac{\pi}{8}$

Ahora, al resolverla, obtenemos:

$$x = -\frac{\pi}{8} = \left(\frac{200}{\pi}\right) = -25 \text{ grados centesimales}$$

De los ejemplos anteriores, se puede observar que para convertir las unidades de un ángulo en grados centesimales a radianes, basta multiplicar las unidades por el factor $\frac{\pi}{200}$.

También es posible observar que para convertir las unidades de un ángulo en radianes a grados centesimales, se deben multiplicar las unidades por el factor $\frac{200}{\pi}$.

Ahora se analiza cómo convertir las unidades entre grados centesimales y grados (sexagesimales). De esta manera, cabe explicar que un ángulo recto corresponde a 100 grados centesimales y a 90°, por lo que resulta necesario utilizar una regla de tres simple junto con esta relación. Así pues, se tiene:

$$100 \text{ grados centesimales} = 90 \text{ grados (sexagesimales)}$$

Ejemplo 11

Convertir 120 grados centesimales a grados.

Solución

Primero, utilizamos la regla de tres:

Grados centesimales	Grados
100	90
120	x

Luego, al resolver, obtenemos:

$$x = \frac{120(90)}{100} = 108 \text{ grados}$$

Ejemplo 12

Convertir 405 grados a grados centesimales.

Solución

Primero, utilizamos la regla de tres:

Grados centesimales	Grados
100	90
x	405

Luego, al resolver, obtenemos:

$$x = \frac{405(100)}{90} = 450 \text{ grados centesimales}$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 a 15 convierte a radianes.

1. $25°$
2. $85°$
3. $120°$
4. $215°$
5. $-18°$
6. $92°$
7. $45°$
8. $400°$
9. $-630°$
10. $105°$
11. $-135°$
12. $150°$
13. $-165°$
14. $-180°$
15. $195°$

En los ejercicios 16 a 24 dibuja el ángulo dado en posición estándar.

16. $\left(\frac{23}{45}\right)\pi$
17. $\left(\frac{20}{9}\right)\pi$
18. $-\left(\frac{7}{2}\right)\pi$
19. $\left(\frac{7}{12}\right)\pi$
20. $-\left(\frac{3}{4}\right)\pi$
21. $\left(\frac{5}{6}\right)\pi$

22. $-\left(\frac{11}{12}\right)\pi$

23. $-\pi$

24. $\left(\frac{13}{12}\right)\pi$

En los ejercicios 25 a 32 convierte a radianes los siguientes ángulos que están dados en grados centesimales.

25. 150

26. 45

27. 22

28. 30

29. 75

30. -400

31. -350

32. -275

En los ejercicios 33 a 42 convierte cada uno de los ángulos dados en radianes a grados y a grados centesimales.

33. $\left(\frac{5}{36}\right)\pi$

34. $\left(\frac{17}{36}\right)\pi$

35. $\left(\frac{2}{3}\right)\pi$

36. $\left(\frac{43}{36}\right)\pi$

37. $-\left(\frac{1}{10}\right)\pi$

38. $\left(\frac{23}{45}\right)\pi$

39. $\left(\frac{20}{9}\right)\pi = 0$

40. $-\left(\frac{7}{2}\right)\pi$

41. $\left(\frac{7}{12}\right)\pi$

42. $\left(\frac{13}{12}\right)\pi$

6.2 Funciones trigonométricas

En esta sección se definen las funciones trigonométricas y se exponen sus principales características.

En la sección anterior se mencionó que la forma correcta de medir los ángulos es en radianes; por tanto, de aquí en adelante cualquier ángulo siempre estará dado en radianes, a menos que se exprese lo contrario. Es decir, no se escribirán las unidades; por ejemplo, $\frac{\pi}{3}$ significa $\frac{\pi}{3}$ radianes. Así, cuando un ángulo esté dado en otras unidades, estas se escribirán explícitamente. Por ejemplo, 30 significa 30 radianes, 30° representa 30 grados (sexagesimales), mientras que para grados centesimales se escribirá 30 grados centesimales.

Asimismo, a partir de esta sección se utilizarán algunos valores que es posible obtener con calculadora; por tanto, resulta buena idea que a partir de este momento cambies tu calculadora a modo de radianes, los cuales, por lo normal, se representan con la letra R (o rad). En tanto, los grados sexagesimales aparecen en la calculadora como el modo D (de *Degree*, grado en inglés) y los grados centesimales corresponden al modo G (o Grad, por eso algunos les llaman gradianes).

Como se sabe, existen seis funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. El orden en que se presentan aquí es importante, dado que siguiendo este orden es más fácil recordar algunas de sus propiedades.

Primero se definen las funciones trigonométricas para los ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y luego se extiende a otros ángulos; así, sea t un ángulo tal que $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Considérese un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos precisamente igual a t (véase la figura 6.11).

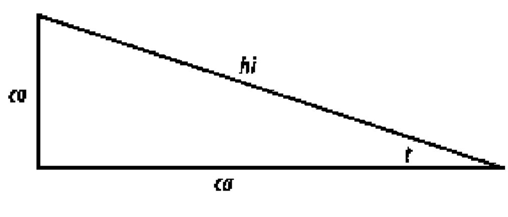


Figura 6.11

En la figura 6.11 se designa con *ca* al cateto adyacente al ángulo t, con *co* al cateto opuesto al ángulo t y con *hi* a la hipotenusa del triángulo. Con esta notación, es posible definir las funciones trigonométricas del ángulo t como sigue:

- Seno de t: $\operatorname{sen}(t)=\dfrac{co}{hi}$
- Coseno de t: $\cos(t)=\dfrac{ca}{hi}$
- Tangente de t: $\tan(t)=\dfrac{co}{ca}$
- Cotangente de t: $\cot(t)=\dfrac{ca}{co}$
- Secante de t: $\sec(t)=\dfrac{hi}{ca}$
- Cosecante de t: $\csc(t)=\dfrac{hi}{co}$

Para no olvidar estas definiciones, como se puede observar, basta recordar que los numeradores de las funciones trigonométricas de arriba hacia abajo tienen el siguiente orden: co−ca−co−ca−hi−hi; mientras que los denominadores de abajo hacia arriba también tienen el mismo orden: co−ca−co−ca−hi−hi.

Una propiedad importante de las funciones trigonométricas es que solo basta conocer los valores de seno y coseno de t, para obtener el resto de las funciones trigonométricas porque:

$$\tan(t)=\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} \quad \cot(t)=\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}$$
$$\sec(t)=\frac{1}{\cos(t)} \quad \csc(t)=\frac{1}{\operatorname{sen}(t)}$$

Asimismo, se tiene que: $\tan(t)=\dfrac{1}{\cot(t)}$, $\cot(t)=\dfrac{1}{\tan(t)}$, $\operatorname{sen}(t)=\dfrac{1}{\csc(t)}$ y $\cos(t)=\dfrac{1}{\sec(t)}$.

Entonces, se advierte que $\operatorname{sen}(t)$ y $\csc(t)$; $\cos(t)$ y $\sec(t)$; $\tan(t)$ y $\cot(t)$, son funciones recíprocas:

Recíprocos

$$\operatorname{sen}(t)=\frac{1}{\csc(t)}$$

$$\cos(t)=\frac{1}{\sec(t)}$$

$$\tan(t)=\frac{1}{\cot(t)}$$

$$\cot(t)=\frac{1}{\tan(t)}$$

$$\sec(t)=\frac{1}{\cos(t)}$$

$$\csc(t)=\frac{1}{\operatorname{sen}(t)}$$

A continuación se presenta un ejemplo, para el cual es indispensable tener una calculadora a la mano.

Ejemplo 13

Calcular los valores de las funciones trigonométricas para los siguientes ángulos:

a) $t=\frac{\pi}{6}$.

b) $t = 1$.

c) $t = 80°$.

d) $t = 50$ grados centesimales.

Solución

a) En este caso, basta con que obtengamos los valores de seno y coseno en la calculadora. Por tanto, debemos asegurarnos de que nuestra calculadora esté en modo de radianes. De esta manera:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \text{ y } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

No obstante, quizá nuestra calculadora nos dé los valores con números decimales; si esto es así, entonces:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.5 \text{ y } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866025403...$$

Ahora, podemos calcular los valores de las demás funciones como sigue:

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ o } \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{0.5}{0.866025403\ldots}=0.57735026$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3} \text{ o } \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{0.57735026\ldots}=1.732050807$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ o } \sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{0.866025403\ldots}=1.154700538$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2 \text{ o } \csc\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{0.5}=2$$

Muchas calculadoras solo tienen una tecla para calcular de manera directa las funciones seno, coseno y tangente; por tanto, las otras tres funciones trigonométricas (cotangente, secante y cosecante) se calculan como los recíprocos de las tres primeras.

Recuerda: Cuando uses la calculadora utiliza todos los decimales que resulten. En adelante escribiremos solo algunos decimales, pero las operaciones están hechas con todos los decimales que nuestra calculadora nos da.

b) Igual que en el inciso anterior, el ángulo está medido en radianes. Una vez que la calculadora está en este modo (R), obtenemos los valores de seno, coseno y tangente. Los valores de cosecante, secante y cotangente son respectivamente los recíprocos de los tres primeros. Así, tenemos:

$$\operatorname{sen}(1)=0.84147\ldots \Rightarrow \csc(1)=\frac{1}{\operatorname{sen}(1)}=\frac{1}{0.84147\ldots}=1.18839\ldots$$

$$\cos(1)=0.5403\ldots \Rightarrow \sec(1)=\frac{1}{\cos(1)}=\frac{1}{0.5403\ldots}=1.8508\ldots$$

$$\tan(1)=1.5574\ldots \Rightarrow \cot(1)=\frac{1}{\tan(1)}=\frac{1}{1.5574\ldots}=0.64209\ldots$$

c) En este caso, el ángulo está dado en grados (sexagesimales). Por tanto, podemos cambiar a radianes o podemos poner la calculadora en modo de grados sexagesimales. Aquí preferimos cambiar las unidades a radianes, porque estos constituyen la forma natural de medir ángulos (aquí no se encontrará ninguna diferencia si se cambia a grados el modo de la calculadora, pero en cursos de otras asignaturas, como cálculo, **¡sí hay una gran diferencia al tratar las funciones trigonométricas en radianes en lugar de grados!**), de esta manera, tenemos:

$$80° = 80°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{4}{9}\pi \text{ radianes}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{4}{9}\pi\right) = 0.984807... \Rightarrow \csc\left(\frac{4}{9}\pi\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{4}{9}\pi\right)} = 1.0154...$$

$$\cos\left(\frac{4}{9}\pi\right) = 0.173648... \Rightarrow \sec\left(\frac{4}{9}\pi\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{4}{9}\pi\right)} = 5.7587...$$

$$\tan\left(\frac{4}{9}\pi\right) = 5.6713... \Rightarrow \cot\left(\frac{4}{9}\pi\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{4}{9}\pi\right)} = 0.17632...$$

d) Para este ejemplo cambiamos las unidades de los ángulos a radianes, pero también es posible cambiar la calculadora a modo de grados centesimales (grad) para obtener los mismos valores que obtuvimos aquí. Así:

$$50 \text{ grados centesimales} = 50\left(\frac{\pi}{200}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ radianes}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.707106... \Rightarrow \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1.4142...a$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = 0.707106... \Rightarrow \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1.4142...$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1$$

Aquí trabajamos con los números decimales, pero muchas calculadoras dan el resultado exacto como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ o $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ al racionalizar, por lo que $\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}$.

Existen algunos ángulos que se utilizan con frecuencia, que se conocen como *ángulos notables*, por tanto sus valores en las funciones trigonométricas son fáciles de obtener; estos ángulos son $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$. Para calcular los valores de las funciones trigonométricas en estos ángulos, primero se construye un triángulo rectángulo con lados conocidos y el ángulo en uno de los vértices.

De esta manera, para $t=\frac{\pi}{4}$ se considera un triángulo rectángulo con catetos iguales a 1 unidad. Como los lados son iguales, los ángulos opuestos a estos lados son iguales y como la suma de los tres ángulos es π radianes (180°), cada ángulo opuesto a un cateto mide la mitad de un ángulo recto; esto es: $\frac{\pi}{4}$ radianes.

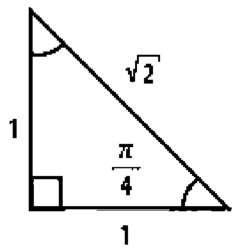


Figura 6.12

De acuerdo con el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ unidades. Como se dijo antes, primero se calculan los valores de las primeras tres funciones trigonométricas, de acuerdo con la primera definición, y las segundas tres como sus recíprocos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{co}{hi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \csc\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{ca}{hi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \sec\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{co}{ca}=\frac{1}{1}=1\Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=1$$

Para los ángulos notables $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$ se comienza con un triángulo equilátero con lados de 2 unidades cada uno, esto significa que cada uno de sus ángulos es la tercera parte de π; es decir, cada uno de sus ángulos mide $\frac{\pi}{3}$, que equivale a 60°.

Figura 6.13

Si se traza la altura desde el vértice superior, este queda dividido en dos triángulos iguales con hipotenusa de 2 unidades, un cateto de 1 unidad y el otro, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, de $\sqrt{3}$ unidades.

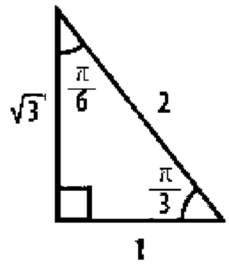


Figura 6.14

En la figura 6.14, el ángulo inferior derecho mide $\frac{\pi}{3}$, mientras que el valor del ángulo superior es la mitad de esto, es decir: $\frac{\pi}{6}$. Con este triángulo es fácil calcular los valores de las funciones trigonométricas.

Así, para $\frac{\pi}{3}$ se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{co}{hi}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \csc\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{ca}{hi}=\frac{1}{2}\Rightarrow \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=2$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{co}{ca}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Para $\frac{\pi}{6}$ se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{co}{hi}=\frac{1}{2}\Rightarrow \csc\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}=2$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{ca}{hi}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{co}{ca}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{3}$$

Hasta este momento solo se ha trabajado con ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Ahora, se extiende a otros valores de ángulos como sigue:

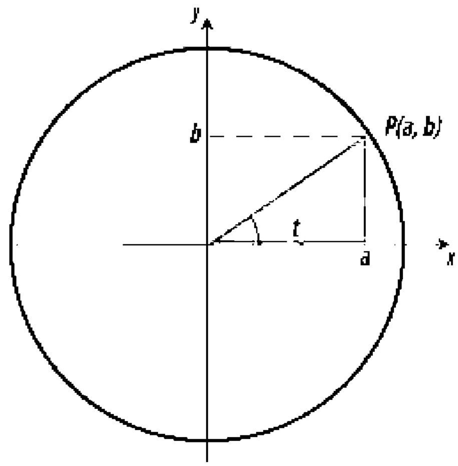


Figura 6.15

De la figura 6.15 se puede observar que el ángulo t está en posición estándar, que el lado terminal interseca a la circunferencia con centro en el origen y radio 1 (cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$), en un punto $P(a, b)$. De esta manera, se define: $a = \cos(t)$, $b = \operatorname{sen}(t)$. Las otras funciones trigonométricas se definen como:

$$\tan(t)=\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}, \cot(t)=\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}, \sec(t)=\frac{1}{\cos(t)}, \csc(t)=\frac{1}{\operatorname{sen}(t)}$$

siempre y cuando el cociente tenga sentido, es decir, cuando el denominador no se anula.

La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ (véase el capítulo 7) se conoce como el *círculo trigonométrico* o *círculo unitario*. En este caso, se nota que para un ángulo entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ la definición que se acaba de dar coincide con la primera definición que se dio, dado que la hipotenusa del triángulo es 1.

Los siguientes ejemplos utilizan esta definición.

Ejemplo 14

Calcular directamente de la definición, el valor de cada una de las funciones trigonométricas para el ángulo $\frac{\pi}{2}$.

Solución

Primero, dibujamos el ángulo en posición estándar; así, podemos ver que el lado terminal coincide con la parte positiva del eje y, por lo que interseca al círculo trigonométrico en el punto $P(0, 1)$.

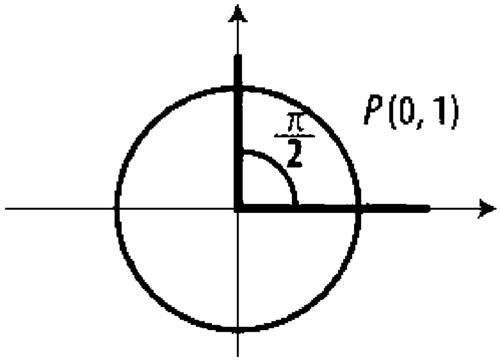


Figura 6.16

De acuerdo con la definición anterior, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Por tanto, las otras funciones trigonométricas tienen los siguientes valores:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$ *no existe,* porque el denominador se anula.

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$ *no existe*, porque el denominador se anula.

$$\csc\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}=1$$

Podemos comprobar estos valores en nuestra calculadora, solo debemos tener en cuenta que esta debe estar en radianes.

Ejemplo 15

Calcular el valor de las funciones trigonométricas para el ángulo $t=-\frac{5\pi}{2}$.

Solución

Primero, dibujamos el ángulo en posición estándar:

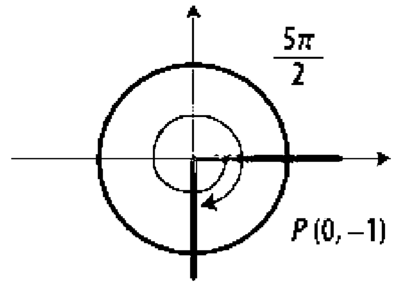


Figura 6.17

De la figura 6.17, podemos observar que el lado terminal interseca al círculo trigonométrico en el punto $P(0,-1)$. Así, por definición, $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=0$ y $\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=-1$. Dado que el coseno es cero, la tangente y la secante no están definidas. Siguiendo la definición, $\cot\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=\frac{\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}=\frac{0}{-1}=0$ y $\csc\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}=-1$.

Ejemplo 16

Calcular los valores de las funciones trigonométricas para los siguientes ángulos:

a) $t=\frac{\pi}{4}$

b) $t=-\frac{\pi}{4}$

c) $t=\frac{3\pi}{4}$

d) $t=\frac{5\pi}{4}$

Solución

a) Primero, dibujamos el ángulo en posición estándar; su lado terminal corresponde a la recta $y=x$, que interseca al círculo trigonométrico en el punto $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (véase el ejercicio 63).

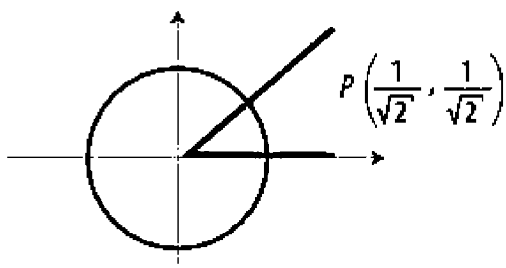


Figura 6.18

Por definición, tenemos que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

O, al racionalizar, tenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como se recordará, estos son los mismos valores que obtuvimos cuando vimos los ángulos notables.

Ahora, los valores de las otras funciones trigonométricas son:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=1,\ \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}=1$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2},\ \csc\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}$$

b) Al dibujar el ángulo en posición estándar, podemos observar que el punto de intersección del lado terminal es simétrico, respecto al eje x, al punto de intersección del inciso anterior.

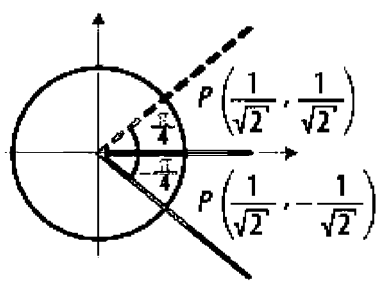


Figura 6.19

Por tanto, el punto de intersección tiene las coordenadas:

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ahora, por definición tenemos:

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=-\sqrt{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=-1 \text{ y } \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=-1$$

c) En este caso, primero dibujamos el ángulo en posición estándar y podemos advertir que el punto de intersección del lado terminal del ángulo con el círculo trigonométrico es simétrico, respecto al eje y, con el punto de intersección del inciso a). Por tanto, sus coordenadas son:

$$P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

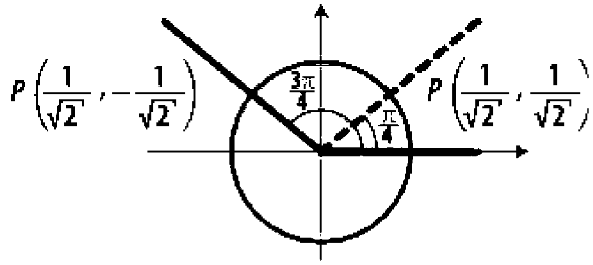


Figura 6.20

Así, tenemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \csc\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \sec\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=-\sqrt{2}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=-1 \text{ y } \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=-1$$

d) Aquí, de nueva cuenta usamos la simetría del punto de intersección para encontrar sus coordenadas. Por tanto, sus coordenadas son:

$$P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Entonces, tenemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \csc\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=-\sqrt{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \sec\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=-\sqrt{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=1 \text{ y } \cot\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=1$$

De los ejemplos anteriores se desprenden algunas propiedades, las cuales estudiamos a continuación:

1. El signo de las funciones trigonométricas depende del cuadrante en el que se halla el lado terminal del ángulo, cuando este está en posición estándar (véase la tabla 6.1).

Tabla 6.1 Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante	Función	Signo
I	seno	+
I	coseno	+
I	tangente	+
I	cotangente	+
I	secante	+
I	cosecante	+
II	seno	+
II	coseno	–
II	tangente	–
II	cotangente	–
II	secante	–
II	cosecante	+
III	seno	–
III	coseno	–
III	tangente	+
III	cotangente	+
III	secante	–
III	cosecante	–

IV	seno	−
IV	coseno	+
IV	tangente	−
IV	cotangente	−
IV	secante	+
IV	cosecante	

II. Para ángulos simétricos respecto al eje x, los valores de coseno no cambian, sin embargo los valores de seno difieren por un signo. En símbolos:

$$\operatorname{sen}(-t)=-\operatorname{sen}(t) \text{ y } \cos(-t)=\cos(t)$$

Esta propiedad indica que la función seno es una función impar, mientras que la función coseno es par.

Así, los valores de un ángulo negativo en las otras funciones son:

$$\tan(-t)=-\tan(t) \text{ y } \cot(-t)=-\cot(t)$$

$$\sec(-t)=\sec(t) \text{ y } \csc(-t)=-\csc(t) \text{ (véase el ejercicio 64)}$$

III. Si $t \in \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{sen}^2(t)+\cos^2(t)=1$ (identidad pitagórica).

Esta es una propiedad que se obtiene directamente de la definición: el punto $P(a, b) = P(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ se encuentra sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Debido a esta propiedad, las funciones trigonométricas son conocidas también como funciones *circulares*.

IV. $\operatorname{sen}(A+B)=\operatorname{sen}(A)\cos(B)+\operatorname{sen}(B)\cos(A)$

V. $\operatorname{sen}(A-B)=\operatorname{sen}(A)\cos(B)-\operatorname{sen}(B)\cos(A)$

VI. $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$

VII. $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$

Además de estas, hay muchas más propiedades e identidades de las funciones trigonométricas que se obtienen de las anteriores. De esta manera, aquí se llamará a las propiedades I−VII *identidades básicas*. Un esbozo de la prueba de las propiedades IV a VII aparece en los ejercicios 23 a 26.

Como puede observarse aquí, $\operatorname{sen}^2(t)$ es una abreviación de la notación $[\operatorname{sen}(t)]^2$ en la propiedad III. En general, $[\operatorname{sen}(t)]^k$ se denotará por $\operatorname{sen}^k(t)$. Lo mismo ocurre para cualquier función trigonométrica. Por ejemplo, $[\tan(t)]^6=\tan^6(t)$, $[\csc(t)]^4=\csc^4(t)$, etcétera.

A continuación se presentan algunas identidades que se obtienen de estas identidades o propiedades básicas.

Ejemplo 17

a) Probar la identidad $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$.

b) Calcular $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Solución

a) En este caso, nos basta con expresar $2t = t + t$ y utilizar la identidad básica IV con $A = B = t$. Así, tenemos:

$$\operatorname{sen}(2t) = \operatorname{sen}(t+t) = \operatorname{sen}(t)\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\cos(t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$$

b) Ahora, usamos la identidad de a) junto con los valores de ángulos notables, lo que nos da:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 18

Demostrar las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

b) $\cos(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

Solución

a) En este caso, usamos la identidad básica VII. Por tanto, tenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(t) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(t) \text{ y como } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ y } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Así obtenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(t) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(t) = (0)\cos(t) + (1)\operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(t)$$

b) Aquí usamos la identidad básica V y tenemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(t) = (1)\cos(t) + (0)\operatorname{sen}(t) = \cos(t)$$

Ejemplo 19

Probar la identidad $\sec(t)-\cos(t)=\operatorname{sen}(t)\tan(t)$.

Solución

Primero, usamos el hecho de que $\sec(t)=\dfrac{1}{\cos(t)}$. Por tanto:

$$\sec(t)-\cos(t)=\frac{1}{\cos(t)}-\cos(t)$$

Ahora, convertimos en una sola fracción:

$$\frac{1}{\cos(t)}-\cos(t)=\frac{1-\cos^2(t)}{\cos(t)}$$

De la identidad básica II, tenemos que:

$$1-\cos^2(t)=\operatorname{sen}^2(t)$$
$$\frac{1-\cos^2(t)}{\cos(t)}=\frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\cos(t)}$$

Por último, reescribimos la última fracción como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\cos(t)}=\operatorname{sen}(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}=\operatorname{sen}(t)\tan(t)$$

Ejemplo 20

Demostrar que $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}(w)}+\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}(w)}=2\sec^2(w)$.

Solución

En este caso, comenzamos sumando las fracciones del lado izquierdo:

$$\frac{1}{1-\operatorname{sen}(w)}+\frac{1}{1+\operatorname{sen}(w)}=\frac{1+\operatorname{sen}(w)+1-\operatorname{sen}(w)}{(1-\operatorname{sen}(w))(1+\operatorname{sen}(w))}=\frac{2}{1-\operatorname{sen}^2(w)}$$

Ahora, de la identidad básica III, tenemos:

$$1-\operatorname{sen}^2(w)=\cos^2(w)$$

$$\frac{2}{1-\operatorname{sen}^2(w)}=\frac{2}{\cos^2(w)}=2\left(\frac{1}{\cos(w)}\right)^2=2\sec^2(w)$$

Ejemplo 21

Probar que $\operatorname{sen}A\cos B=\left(\frac{1}{2}\right)[sen(A+B)+sen(A-B)]$.

Solución

Primero, usamos las identidades básicas IV y V; así, tenemos:

$$sen(A+B)=sen(A)\cos(B)+sen(B)\cos(A)$$
$$sen(A-B)=sen(A)\cos(B)-sen(B)\cos(A)$$

Ahora, sumamos estas identidades y luego eliminamos el término . De esta manera, obtenemos:

$$\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)=2\operatorname{sen}(A)\cos(B)$$

Enseguida, dividimos entre 2 cada lado de la igualdad para obtener:

$$\operatorname{sen}A\cos B=\left(\frac{1}{2}\right)[\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)]$$

Ejemplo 22

a) Mostrar que la identidad $\cos^2(t)=\frac{1}{2}(1+\cos(2t))$ es cierta.

b) Calcular $\frac{\pi}{12}$.

Solución

a) En este caso, nos conviene comenzar con $\cos(2t)$ y usar la identidad básica de la suma de ángulos. Así, tenemos:

$$\cos(2t)=\cos(t+t)=\cos(t)\cos(t)-\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(t)=\cos^2(t)-\operatorname{sen}^2(t) \qquad (1)$$

Como en la identidad a la que queremos llegar aparecen solo cosenos, despejamos $\operatorname{sen}^2(t)$ de la identidad básica III:

$$\operatorname{sen}^2(t)=1-\cos^2(t) \qquad (2)$$

Ahora, sustituimos (2) en (1):

$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\operatorname{sen}^2(t)=\cos^2(t)-[1-\cos^2(t)]=2\cos^2(t)-1$$

Por tanto:

$$\cos(2t)=2\cos^2(t)-1$$

Enseguida, despejamos el coseno al cuadrado:

$$\cos(2t)=2\cos^2(t)-1\Rightarrow 2\cos^2(t)=1+\cos(2t)\Rightarrow \cos^2(t)=\frac{1}{2}(1+\cos(2t))$$

b) Notése que $\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{\pi}{6}}{2}$, y que de la identidad anterior:

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos(t))}$$

Por lo que:

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}$$

Como se observa, aquí utilizamos el signo positivo de la raíz, porque el ángulo está en el primer cuadrante (propiedad básica I).

Luego, sustituimos $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, que obtuvimos al estudiar los ángulos notables.

De esta manera, tenemos:

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

Ejemplo 23

a) Establecer una identidad para la tangente de la suma de dos ángulos.

b) Demostrar que $\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan(t)}{1-\tan(t)}$.

Solución

a) Sean A y B dos números en donde $\tan(A)$, $\tan(B)$ y $\tan(A + B)$ están definidas. En este caso, queremos determinar una identidad para $\tan(A + B)$ en términos de $\tan(A)$ y $\tan(B)$. Por tanto, usamos la definición de tangente como cociente de seno entre coseno y luego las identidades básicas de la suma de ángulos. Así:

$$\tan(A+B)=\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\operatorname{sen}(A)\cos(B)+\operatorname{sen}(B)\cos(A)}{\cos(A)\cos(B)-\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)}$$

Enseguida, dividimos cada término del lado derecho entre $\cos(A)$ $\cos(B)$ y simplificamos:

$$\tan(A+B)=\frac{\frac{\operatorname{sen}(A)\cos(B)}{\cos(A)\cos(B)}+\frac{\operatorname{sen}(B)\cos(A)}{\cos(A)\cos(B)}}{\frac{\cos(A)\cos(B)}{\cos(A)\cos(B)}-\frac{\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)}{\cos(A)\cos(B)}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}(A)}{\cos(A)}+\frac{\operatorname{sen}(B)}{\cos(B)}}{1-\frac{\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)}{\cos(A)\cos(B)}}$$

Por último, reescribimos en términos de tangentes:

$$\tan(A+B)=\frac{\tan(A)+\tan(B)}{1-\tan(A)\tan(B)}$$

b) Aquí usamos la identidad establecida en el inciso anterior:

$$\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan(t)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan(t)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\tan(t)+1}{1-\tan(t)}=\frac{1+\tan(t)}{1-\tan(t)}$$

Ejemplo 24

Demostrar que $\operatorname{sen}(3t)=3\operatorname{sen}(t)-4\operatorname{sen}^3(t)$.

Solución

Primero, reescribimos sen($3t$) para utilizar el seno de la suma de ángulos:

$$\operatorname{sen}(3t)=\operatorname{sen}(2t+t)=\operatorname{sen}(2t)\cos(t)+\operatorname{sen}(t)\cos(2t)$$

Ahora, utilizamos la identidad $\operatorname{sen}(2t)=2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$ y $\cos(2t)=1-2\operatorname{sen}^2(t)$ del ejercicio 31:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2t)\cos(t)+\operatorname{sen}(t)\cos(2t)&=2\operatorname{sen}(t)\cos^2(t)+\operatorname{sen}(t)\left[1-2\operatorname{sen}^2(t)\right]\\&=2\operatorname{sen}(t)\left[1-\operatorname{sen}^2(t)\right]+\operatorname{sen}(t)\left[1-2\operatorname{sen}^2(t)\right]=3\operatorname{sen}(t)-4\operatorname{sen}^3(t)\end{aligned}$$

Como se podrá observar, en el penúltimo paso usamos la identidad pitagórica.

Ejemplo 25

Simplificar:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}^2(t)}{1+\cos(t)}$

b) $\dfrac{\tan(t)}{\tan(t)+\cot(t)}$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}^3(t)\cos^3(t)}{\operatorname{sen}(t)+\cos(t)}$

Solución

a) En este caso, primero usamos la identidad pitagórica. Así:

$$\frac{\operatorname{sen}^2(t)}{1+\cos(t)}=\frac{1-\cos^2(t)}{1+\cos(t)}=\frac{[1-\cos(t)][1+\cos(t)]}{1+\cos(t)}=1-\cos(t)$$

b) Aquí reescribimos en términos de senos y cosenos:

$$\frac{\tan(t)}{\tan(t)+\cot(t)}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}}{\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}+\dfrac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2(t)+\cos^2(t)}{\cos(t)\operatorname{sen}(t)}}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}}{\dfrac{1}{\cos(t)\operatorname{sen}(t)}}=\frac{\operatorname{sen}^2(t)\cos(t)}{\cos(t)}=\operatorname{sen}^2(t)$$

c) Usamos la suma de cubos vista en la sección de productos notables y la identidad pitagórica. Así, tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}^3(t)+\cos^3(t)}{\operatorname{sen}(t)+\cos(t)}=\frac{(\operatorname{sen}(t)+\cos(t))(\operatorname{sen}^2(t)-\operatorname{sen}(t)\cos(t)+\cos^2(t))}{\operatorname{sen}(t)+\cos(t)}$$

$$=\operatorname{sen}^2(t)-\operatorname{sen}(t)\cos(t)+\cos^2(t)=1-\operatorname{sen}(t)\cos(t)=1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$$

Ejemplo 26

Demostrar que $\cos^4(t)-\operatorname{sen}^4(t)=\cos^2(t)-\operatorname{sen}^2(t)$.

Solución

Primero, usamos la diferencia de cuadrados vista en productos notables y en la identidad pitagórica. De esta manera, tenemos:

$$\cos^4(t)-\operatorname{sen}^4(t)=\left[\cos^2(t)\right]^2-\left[\operatorname{sen}^2(t)\right]^2=\left[\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t)\right]\left[\cos^2(t)-\operatorname{sen}^2(t)\right]$$
$$=\cos^2(t)-\operatorname{sen}^2(t)$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 43 a 47 dibuja el ángulo dado en posición estándar. Recuerda que si no se indican sus unidades, el ángulo está dado en radianes.

43. $t=\dfrac{7\pi}{3}$

44. a) $t = -200°$.

b) $t = -200$.

c) $t = -200$ grados centesimales.

45. a) $t = 4$.

b) $t = -4$.

46. a) $t = 18\pi$ b) $t = -18\pi$

47. a) $t = \frac{5\pi}{12}$ b) $t = -\frac{5\pi}{12}$

En los ejercicios 48 a 53 usa tu calculadora para calcular los valores solicitados.

48. a) $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

b) $\cot\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

c) $\csc\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

49. a) $\operatorname{sen}(-200)$

b) $\tan(-200)$

c) $\sec(-200)$

50. a) $\cos\left(\frac{2}{3}\right)$

b) $\cot\left(\frac{2}{3}\right)$

c) $\csc\left(\frac{2}{3}\right)$

51. a) $\tan(200^{o})$

b) $\sec(200^{o})$

c) $\csc(200^{o})$

52. a) $\cos\frac{1}{10}$

b) $\sec\frac{1}{10}$

c) $\tan\frac{1}{10}$

53. a) tan(30 grados centesimales).

b) csc(30 grados centesimales).

c) sec(30 grados sexagesimales).

En los ejercicios 54 a 62 determina si la aseveración es falsa o verdadera.

54. Las funciones seno y coseno solo están definidas para valores de t entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

55. Los valores de las funciones seno y coseno siempre son positivos.

56. $\operatorname{sen}^2(10^\circ) + \cos^2(10^\circ) = 1$.

57. Las funciones trigonométricas están definidas para cualquier número real t.

58. $\frac{\operatorname{sen}^3(1)+\cos^3(1)}{\operatorname{sen}(1)+\cos(1)} = 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2)$

59. $\operatorname{sen}(4t) = 2\operatorname{sen}(2t)\cos(4t)$.

60. Los signos de los valores de tangente y seno para un ángulo en el tercer cuadrante son signos contrarios.

61. $\tan(45) = 1$.

62. $\operatorname{sen}^2(t) - \cos^2(t) = \operatorname{sen}(t) - \cos(t)$.

63. Prueba que la intersección de $y = x$ con $x^2 + y^2 = 1$ es $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

64. Prueba que $\tan(-t) = -\tan(t)$ y $\cot(-t) = -\cot(t)$

$$\sec(-t) = \sec(t) \text{ y } \csc(-t) = -\csc(t)$$

65. Prueba la identidad básica VII como sigue: sean A, B dos ángulos con $A > B$ y sea $t = A - B$, todos en posición estándar. Considera las intersecciones de estos ángulos con el círculo trigonométrico para:

$A, P(x, y)$.

$B, P(w, z)$

$\theta, P(p, q)$; es decir, $x = \cos A$, $y = \operatorname{sen} A$, $w = \cos B$, $z = \operatorname{sen} B$, $p = \cos\theta$ y $q = \operatorname{sen}\theta$.

Establece qué distancia $((1, 0), (p, q))$ = distancia $((x, y), (w, z))$. Eleva al cuadrado cada fórmula de la distancia y simplifica.

66. Prueba la identidad básica VI mediante las identidades básicas VII y II.

67. Usa la identidad básica VII y la identidad $sen(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ (vista en los ejemplos), para probar la identidad básica IV.

68. Usa las identidades básicas IV y II para probar la identidad básica V.

Prueba la identidad en los ejercicios 69 a 86.

69. $\operatorname{sen}^2(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2t)]$

70. $\tan(A - B) = \frac{\tan(A) - \tan(B)}{1 + \tan(A)\tan(B)}$

71. $\cot(A + B) = \frac{\cot(A)\cot(B) - 1}{\cot(A) + \cot(B)}$

72. $\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$

73. $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(t)$

74. $\tan(t) = -\cot\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

75. $\cos(t)\sec(t) = 1$

76. $\frac{\tan(t)}{\sec(t)} = \operatorname{sen}(t)$

77. $\frac{\tan(t)}{\sec^2(t)} = \operatorname{sen}(t)\cos(t)$

78. $(1 + \cos(2t))(1 - \cos(2t)) = \operatorname{sen}^2(2t)$

79. $1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1$

80. $-\frac{1}{\csc(-t)} - \frac{\cot(-t)}{\sec(-t)} = \csc(t)$

81. $\frac{\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)}{1 - \tan^2(t)} = \cos^2(t)$

82. $\sec^2(t) - \tan^2(t) = 1$

83. $\operatorname{sen}(t) = \frac{\tan(t)}{\sqrt{1 + \tan^2(t)}}$

84. $\operatorname{sen}(2t) = \frac{2\tan(t)}{1 + \tan^2(t)}$

85. $\cos(2t) = \frac{1 - \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}$

86. $\operatorname{sen}^2(t)\cos^2(t) = \frac{1 - \cos(4t)}{8}$

87. Simplifica: **a)** $\left(\dfrac{2-\tan x}{2\csc x-\sec x}\right)$

b) $\left(\dfrac{\tan(4x+1)}{\sec(4x+1)}\right)$

c) $\cos^2 w\left(\sec^2 w-1\right)$

d) $\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\left(1+\tan^2 x\right)$

6.3 Gráficas de funciones trigonométricas

En esta sección se grafican las funciones trigonométricas y algunas traslaciones y compresiones-estiramientos de las funciones seno y coseno.

Una función $y = f(x)$ es *cíclica* (o *periódica*) si existe un valor p para el cual $f(x + p) = f(x)$; esto es, los valores de la función se repiten cada p unidades. Al menor de los valores $p > 0$, tal que $f(x + p) = f(x)$, se le conoce como el *periodo* de la función f.

Las funciones seno y coseno son cíclicas con periodo 2π; es decir, $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen}(t)$ y $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Por su parte, las funciones tangente y cotangente son cíclicas, pero con periodo π (ejercicio 88). En tanto, las funciones secante y cosecante son funciones cíclicas con periodo 2π (ejercicio 89).

Dado que las funciones trigonométricas son cíclicas, basta graficar un periodo y repetir la gráfica.

Así, aquí se inicia con la realización de la gráfica de seno. Como se recordará, la definición de $f(t) = \operatorname{sen}(t)$. Así que primero se dibuja el ángulo t en posición estándar; esto es, su lado terminal interseca al círculo trigonométrico en un punto P, la altura de ese punto es precisamente el seno del ángulo t, $\operatorname{sen}(t)$.

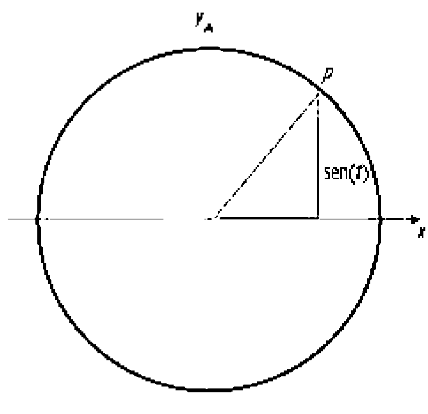
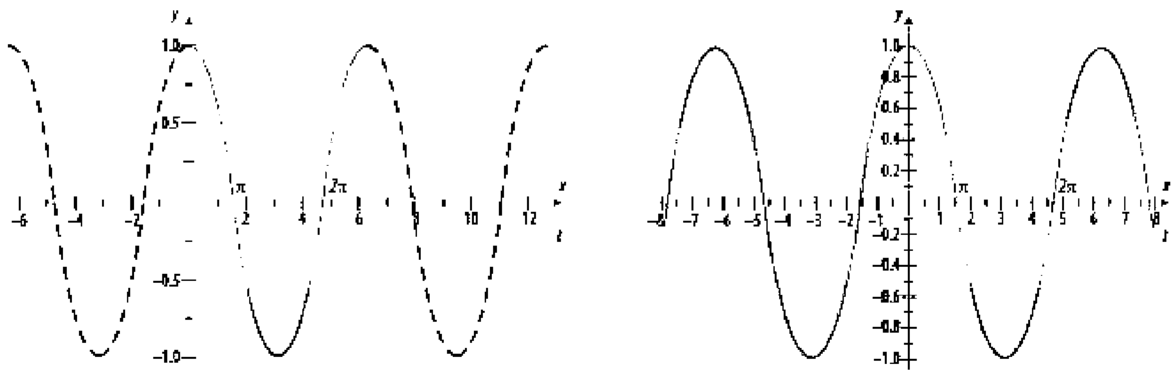


Figura 6.21

Por tanto, el ángulo 0 tiene seno 0; es decir, la gráfica de $f(t) = \text{sen}(t)$ pasa por el origen. Si se consideran ángulos positivos cada vez mayores en el primer cuadrante, las alturas de los puntos de intersección de los lados terminales de los ángulos con el círculo trigonométrico van aumentando cada vez más desde cero (para $t = 0$) hasta 1 para el ángulo $t=\frac{\pi}{2}$. Después, disminuyen hasta llegar otra vez a cero para el ángulo $t = \pi$. Para t entre π y $\frac{3\pi}{2}$ (cuadrante III), los valores de seno son negativos, desde cero hasta -1 para $t=\frac{3\pi}{2}$. Para ángulos entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π (cuadrante IV), los valores de seno son negativos y van de -1 hasta 0 en $t = 2\pi$. Para ángulos mayores, los valores de seno se repiten en cada cuadrante de acuerdo con lo que se describió antes.

Dado que el seno es una función impar, su gráfica es simétrica respecto del origen. Esto es, basta graficar el seno para ángulos positivos y reflejar esta gráfica respecto del origen (véase la figura 6.22). No obstante, también es posible graficar solo un periodo, es decir, graficar en el intervalo $[0,2\pi]$ y repetir la gráfica.



a) Gráfica de un periodo de coseno.

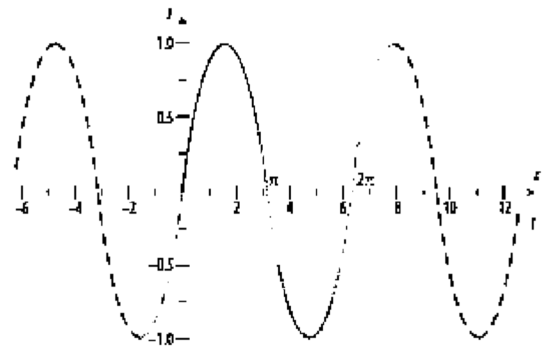
b) Gráfica de $y = \cos(t)$.

Figura 6.22

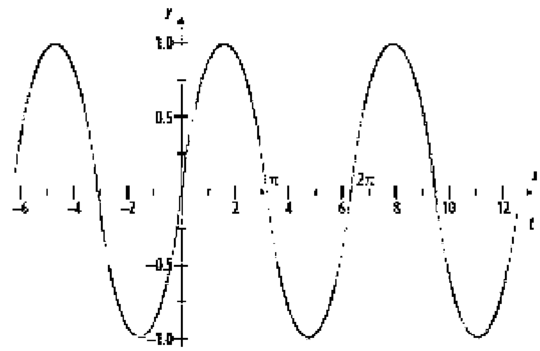
Ahora, toca el turno de analizar la gráfica de la función coseno. Al igual que la gráfica de la función seno, esta también se construye en cada cuadrante. Si t es un ángulo entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, $\cos(t)$ corresponde a la distancia horizontal desde el eje al punto de intersección del lado terminal de t (en posición estándar) con el círculo trigonométrico. Por tanto, $\cos(0) = 1$; sin embargo, este valor va disminuyendo a medida que el ángulo aumenta, hasta que en $t=\frac{\pi}{2}$ el valor de coseno es cero. Para ángulos entre $\frac{\pi}{2}$ y π (cuadrante II), el coseno tiene valores negativos, desde cero hasta -1 en $t = \pi$. En tanto, para ángulos entre π

y $\frac{3\pi}{2}$ (cuadrante III), los valores de coseno son negativos, y van de -1 hasta 0 en $t=\frac{3\pi}{2}$. En el caso de ángulos entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π (cuadrante IV), los valores de coseno son positivos y van de 0 hasta 1 en $t = 2\pi$. Con estos datos es posible graficar un periodo de $f(t) = \cos(t)$, mientras que el resto de la gráfica se obtiene al repetirla.

Dado que el coseno es una función par, su gráfica es simétrica respecto al eje y. Esto es, basta graficar el coseno para ángulos positivos y reflejar esta gráfica respecto al eje y (véase la figura 6.23). También es posible graficar solo un periodo; es decir, graficar en el intervalos $[0,2\pi]$ y repetir la gráfica.



a) Gráfica de un periodo de seno.



b) Gráfica de $y = \text{sen}(t)$.

Figura 6.23

Ahora, se analiza la construcción de la gráfica de la función tangente. Para este efecto, recuérdese que $\tan(t)=\frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)}$; por tanto, su dominio son los números reales en donde $\cos(t)$ no se anule. Dado que $\cos(t)=0 \Rightarrow t=\frac{(2n+1)\pi}{2}$ para $n\in\mathbb{Z}$, el dominio de la función tangente es el conjunto $\mathbb{R}-\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2} \text{ para } n\in\mathbb{Z}\right\}$.

La función tangente es cíclica con periodo π; de esta manera, basta construir la gráfica sobre el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Para $t=-\frac{\pi}{2}$ y $t=\frac{\pi}{2}$, la gráfica tiene asíntotas verticales; esto es, la gráfica se aproxima a las rectas verticales $t=-\frac{\pi}{2}$ y $t=\frac{\pi}{2}$. En el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, tanto seno como coseno son positivos, por lo que la tangente es positiva, pero en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, seno es negativo mientras que coseno es positivo, por lo que la tangente es negativa. Además, como se recordará, la tangente es una función impar, por lo que su gráfica es simétrica respecto al origen, así que basta tabular valores entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ para graficar:

Tabla 6.2

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.5	1.52
tan (t)	0	0.203	0.423	0.684	1.03	1.557	2.572	5.798	14.1	19.67

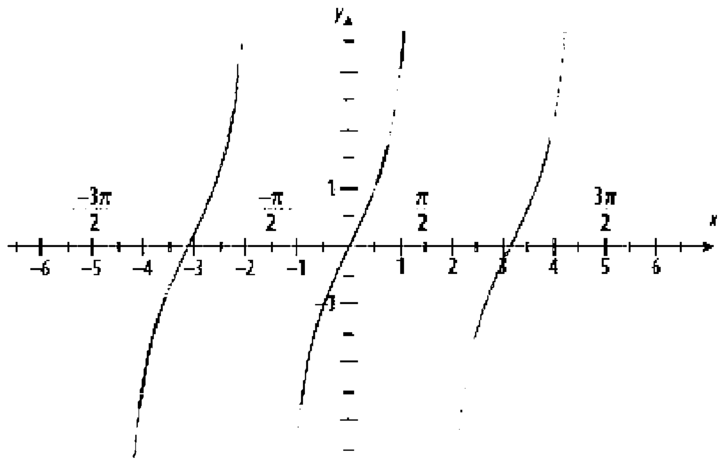


Figura 6.24 Gráfica de $y = \tan(t)$.

Por su parte, la función cotangente se grafica de una forma similar a las gráficas anteriores (véase el ejercicio 90).

Para graficar $y = \sec(t)$, recuérdese que los valores de la secante son los recíprocos de los valores del coseno, $\sec(t)=\dfrac{1}{\cos(t)}$, así que para valores positivos de $\cos(t)$ cercanos a 0, $\sec(t)$ toma valores muy grandes, mientras que para valores cercanos a 1, la secante toma valores cercanos también a 1. Esto indica que es posible utilizar la gráfica de la función coseno como guía para graficar la función secante. El dominio de la secante son los números reales donde el coseno no se anula, es decir: $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{(2n+1)\pi}{2} \text{ para } n\in\mathbb{Z}\right\}$.

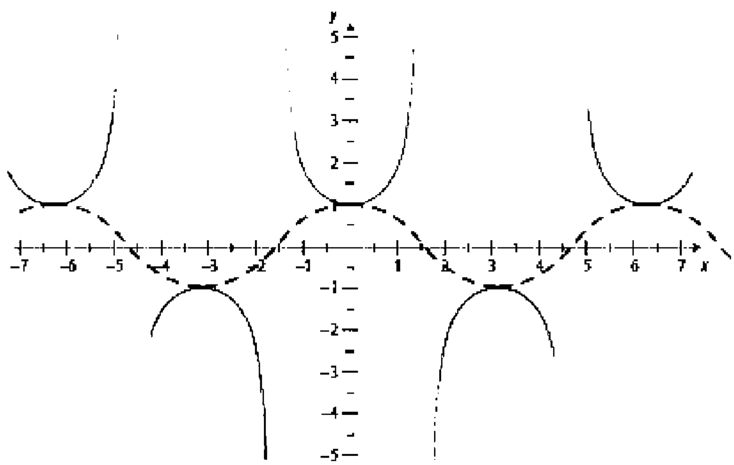


Figura 6.25 Gráfica de $y = \sec(t)$.

En tanto, la gráfica de la cosecante se construye de manera similar, solo basta tomar la gráfica del seno como guía (véase el ejercicio 91).

En algunas áreas, por ejemplo en la propagación de ondas, se requiere conocer la gráfica de una función de la forma:

$$f(x) = A\text{sen}(B(x-h))+k$$

$$f(x) = A\cos(B(x-h))+k$$

Donde A, B, h y k son constantes. En los ejemplos siguientes se verá, paso por paso, cómo cada una de estas constantes altera la gráfica. De acuerdo con el estudio de la sección 3.4, se sabe que h traslada horizontalmente la gráfica y que k la traslada verticalmente, mientras que A alarga o comprime verticalmente la gráfica y B alarga o comprime la gráfica de forma horizontal.

Ejemplo 27

Graficar la función $y = 3\text{sen}(t)$.

Solución

En este ejemplo comenzamos con la gráfica de $y = \text{sen}(t)$. De acuerdo con lo que se estudió antes, esta gráfica tiene una amplitud de -1 a 1; por tanto, la gráfica de $y = 3\text{sen}(t)$ simplemente se alarga a una amplitud de -3 a 3 (véase la figura 6.26).

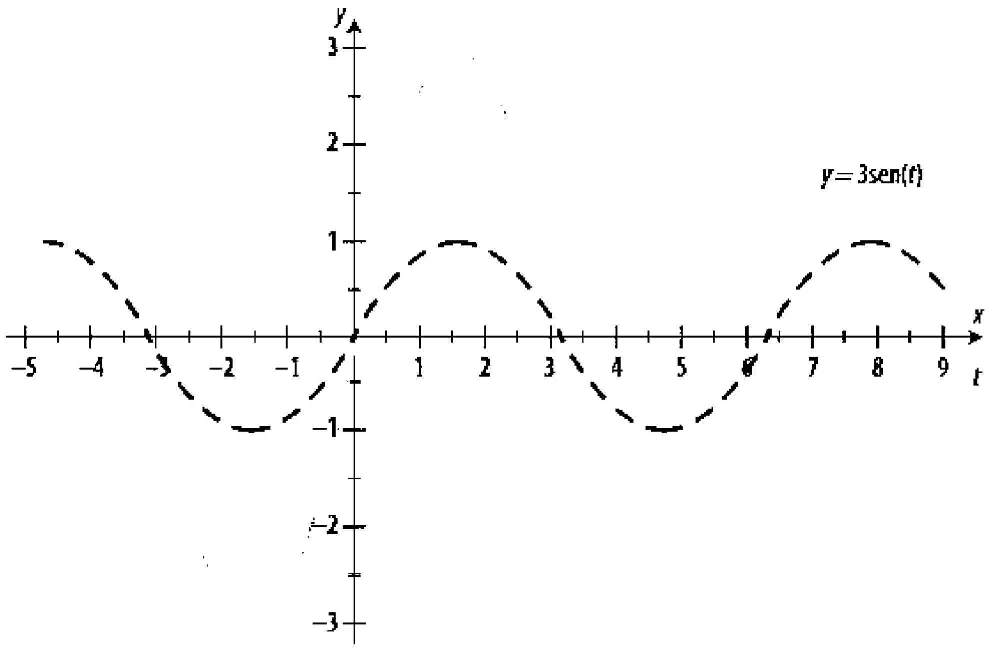


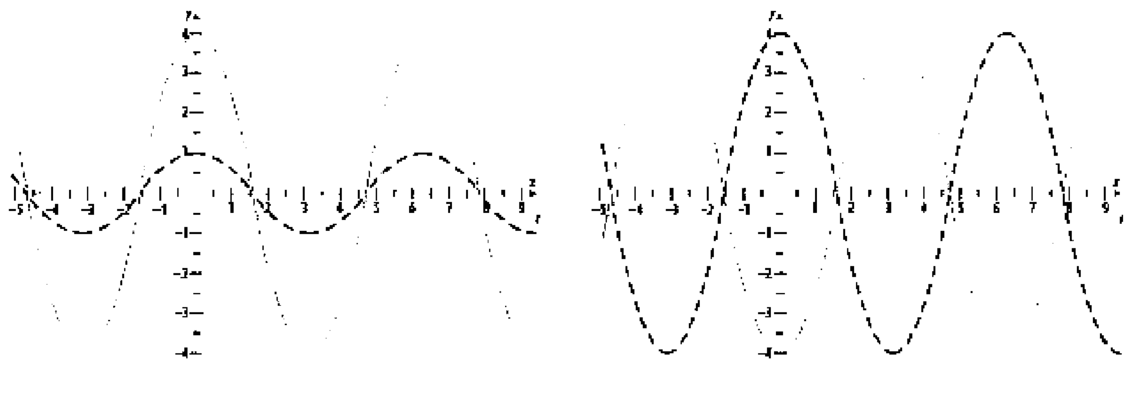
Figura 6.26 $y = \text{sen}(t)$ en línea punteada, $y = 3\text{sen}(t)$ en línea gris.

Ejemplo 28

Dibujar la función $y = -4\cos(t)$.

Solución

En este caso, no solo tenemos que aumentar la amplitud de $y = \cos(t)$, que es de -1 a 1, hasta -4 a 4, sino que debemos reflejar la gráfica con respecto al eje x (véase la figura 6.27). Esto es, debemos dibujar la parte de arriba del eje x debajo del eje x, y la parte debajo del eje x arriba del eje x.



a) Gráfica de $y = 4\cos(t)$. **b)** Gráfica de $y = -4\cos(t)$.

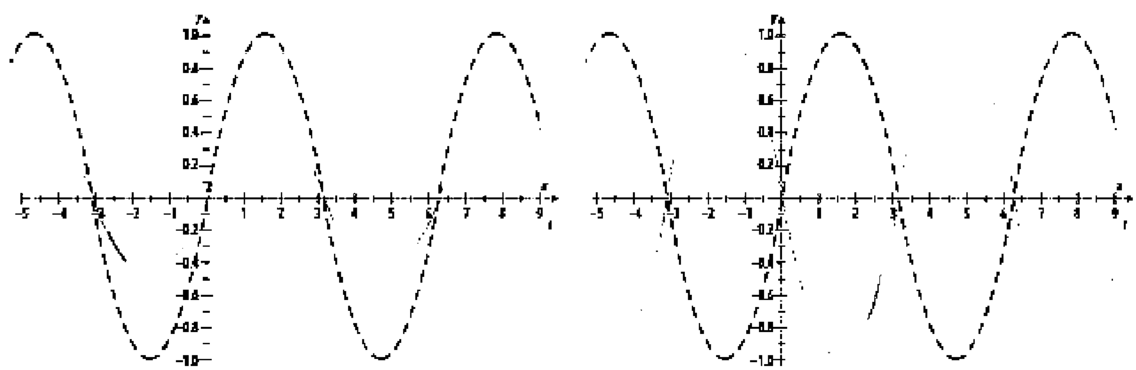
Figura 6.27

Ejemplo 29

Graficar la función $y = -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(t)$.

Solución

En este caso, la amplitud disminuye de $-\dfrac{1}{2}$ a $\dfrac{1}{2}$; el signo menos significa que la gráfica refleja respecto al eje x (véase la figura 6.28).



a) Gráfica de $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)\operatorname{sen}(t)$. **b)** Gráfica de $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)\operatorname{sen}(t)$.

Figura 6.28

Ejemplo 30

Graficar la función $y = \cos(2t)$.

Solución

Aquí, el factor 2 de t comprime horizontalmente en un factor de $\frac{1}{2}$ la gráfica $y = \cos(t)$. Podemos deducir esto como sigue: el coseno tiene un periodo en el intervalo $[0, 2\pi]$ y dado que $0 \leq 2t \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq t \leq \pi$, el periodo de la función dada es $[0, \pi]$. Esto es, lo que antes graficábamos para $y = \cos(t)$ entre 0 y 2π, ahora lo graficamos para $y = \cos(2t)$, entre 0 y π. Nótese que solo cambia el periodo, la amplitud permanece igual (véase la figura 6.29).

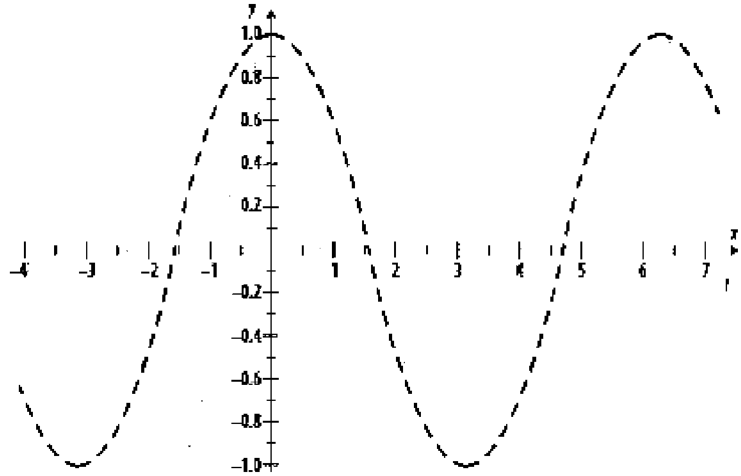


Figura 6.29 Gráfica de $y = \cos(2t)$. (Línea de color gris.)

Ejemplo 31

Dibujar la función $y = \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{3}t\right)$.

Solución

Primero, reescribimos la función con la identidad básica II:

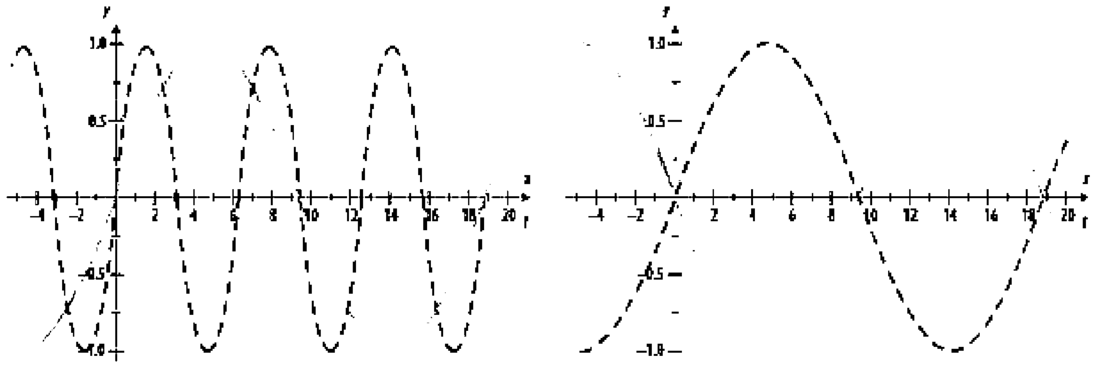
$$y = \operatorname{sen}\left(-\frac{t}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}t\right)$$

Ahora, obtenemos el nuevo periodo al resolver la siguiente desigualdad:

$$0 \leq \frac{1}{3}t \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq t \leq 6\pi$$

Así que lo que graficábamos para $y = \operatorname{sen}(t)$, entre 0 y 2π, ahora lo graficamos para $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}t\right)$, entre 0 y 6π.

Por último, el signo menos refleja la gráfica respecto al eje x, que debido a la identidad básica II, en este caso es igual a reflejarla respecto al eje y (véase la figura 6.30).



a) Gráfica de $y = \text{sen}\left(\frac{1}{3}t\right)$. **b)** Gráfica de $y = \text{sen}\left(-\frac{1}{3}t\right)$.

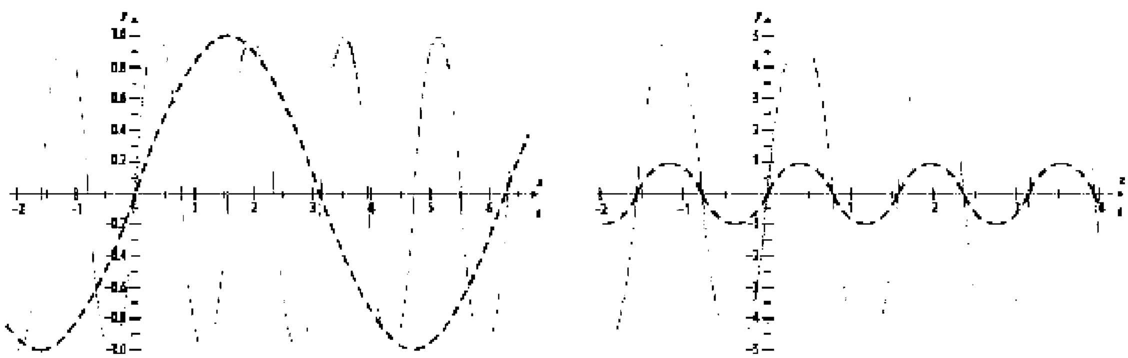
Figura 6.30

Ejemplo 32

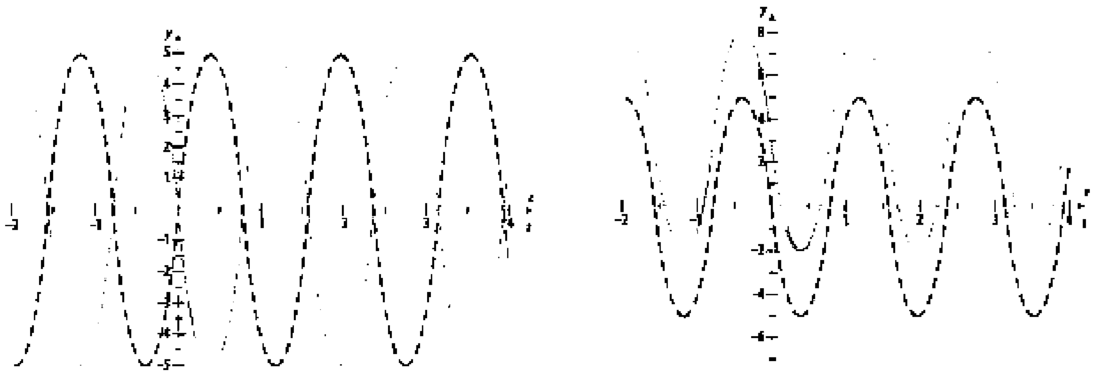
Graficar la función $y = 3 - 5\text{sen}(4t)$.

Solución

En este caso, comenzamos con el nuevo periodo: $0 \leq 4t \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Esto significa que lo que se grafica en $y = \text{sen}(t)$, entre 0 y 2π, ahora se grafica para $y = \text{sen}(4t)$, entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ (es decir, la gráfica se comprime horizontalmente). El factor 5 modifica la amplitud entre -5 a 5, el signo menos refleja la gráfica respecto al eje x. Por último, el número 3 que se suma a $y = -5\text{sen}(4t)$ traslada esta gráfica 3 unidades hacia arriba. Aquí destaca el orden que seguimos: primero compresión horizontal (nuevo periodo), luego estiramiento vertical (amplitud), enseguida reflejo respecto al eje x y, por último, traslación vertical. Las gráficas siguientes muestran este orden, desde $y = \text{sen}(t)$ hasta $y = 3-5\text{sen}(4t)$; no obstante, cabe aclarar que este no es el único orden posible.



a) Gráfica de $y = \text{sen}(4t)$. **b)** Gráfica de $y = 5\text{sen}(4t)$.



c) Gráfica de $y = -5\text{sen}(4t)$. d) Gráfica de $y = 3 - 5\text{sen}(4t)$.

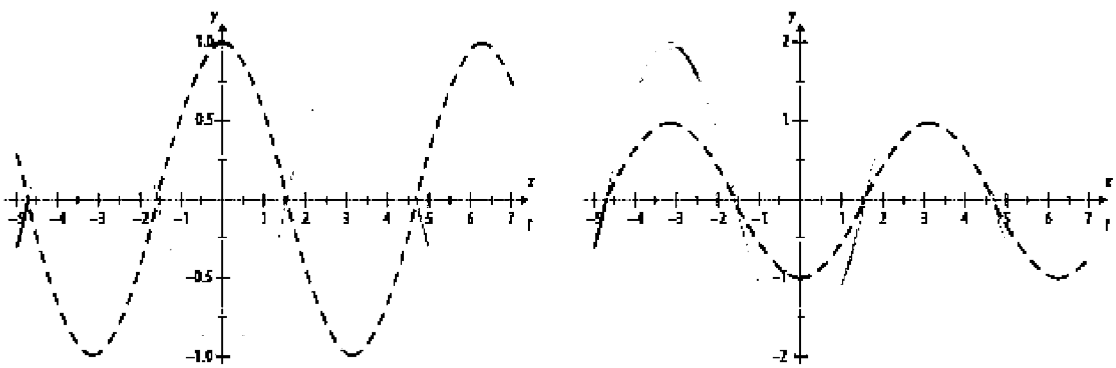
Figura 6.31

Ejemplo 33

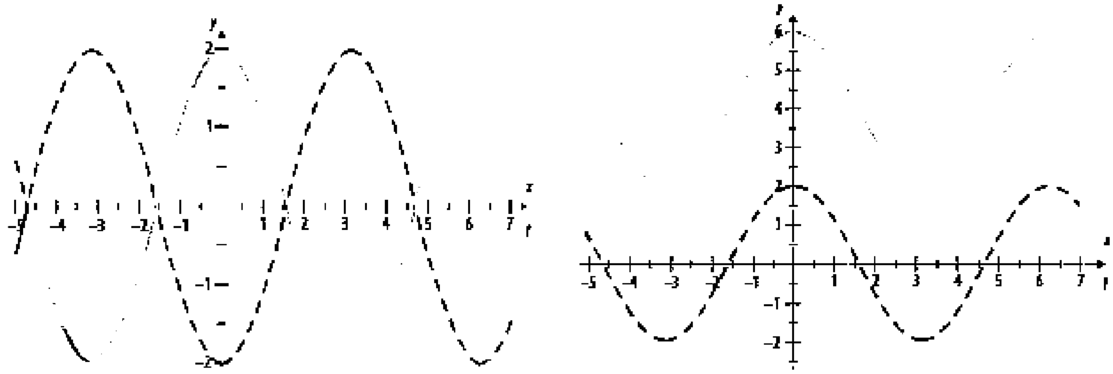
Graficar la función $y = 4 - 2\cos(t - \pi)$.

Solución

Dado que el periodo está trasladado π unidades hacia la derecha, entonces: $0 \leq t - \pi \leq 2\pi \Rightarrow \pi \leq t \leq 3\pi$. Esto significa que lo que graficamos para $y = \cos(t)$, entre 0 y 2π, lo graficamos para $y = \cos(t - \pi)$, entre π y 3π. El factor –2 modifica la amplitud entre -2 y 2 y refleja la gráfica respecto al eje x. Por último, el 4 que suma a $y = 2\cos(t - \pi)$ traslada su gráfica 4 unidades hacia arriba. Cada uno de los pasos referidos antes, lo mostramos en las gráficas siguientes.



a) Gráfica de $y = \cos(t - \pi)$. b) Gráfica de $y = 2\cos(t - \pi)$.



c) Gráfica de $y = -2\cos(t - \pi)$. d) Gráfica de $y = 4 - 2\cos(t - \pi)$.

Figura 6.32

Ejemplo 34

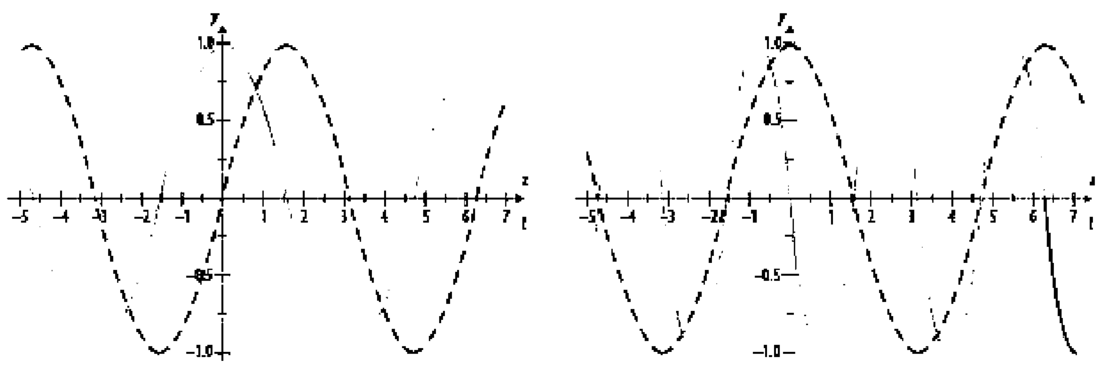
Graficar la función $y = 3\operatorname{sen}\left(2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 3$.

Solución

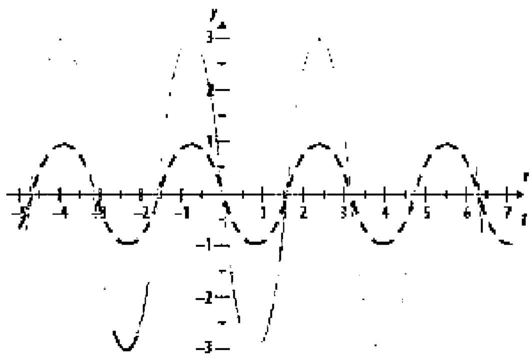
En este caso, la gráfica de $y = \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ traslada $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda la gráfica $y = \operatorname{sen}(t)$. El factor 2 dentro del paréntesis comprime la gráfica en sentido horizontal. Ahora determinamos el nuevo periodo:

$$0 \leq 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \leq 2\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

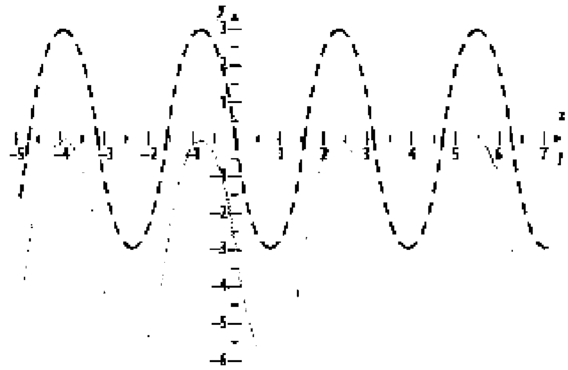
Por su parte, el factor 3 cambia la amplitud entre -3 y 3; a su vez, el 3 que resta traslada la gráfica 3 unidades hacia abajo (véase la figura 6.33).



a) Gráfica de $y = \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$. b) Gráfica de $y = \operatorname{sen}\left[2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right]$.



c) Gráfica de $y = 3\text{sen}\left[2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right]$.



d) Gráfica de $y = 3\text{sen}\left[2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right] - 3$.

Figura 6.33

Ejemplo 35

Dibujar la gráfica de $y = 4\text{sen}(\pi t + \pi) - 2$

Solución

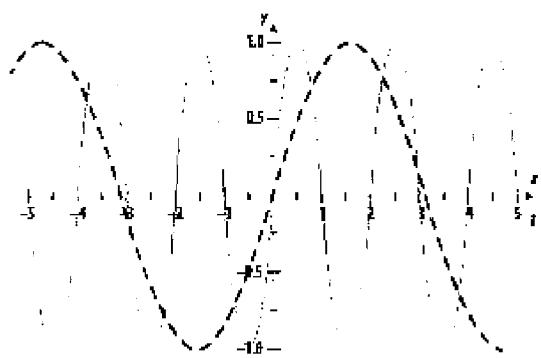
Primero, reexpresamos la función como:

$$y = 4\text{sen}(\pi t + \pi) - 2 = 4\text{sen}[\pi(t+1)] - 2$$

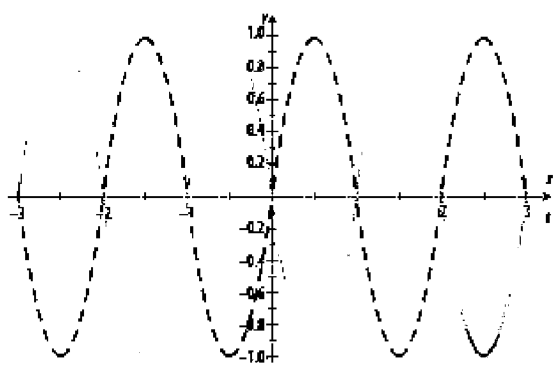
Ahora, ya queda claro que la traslación horizontal es una unidad hacia la izquierda. Determinamos el nuevo periodo:

$$0 \leq \pi(t+1) \leq 2\pi \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$$

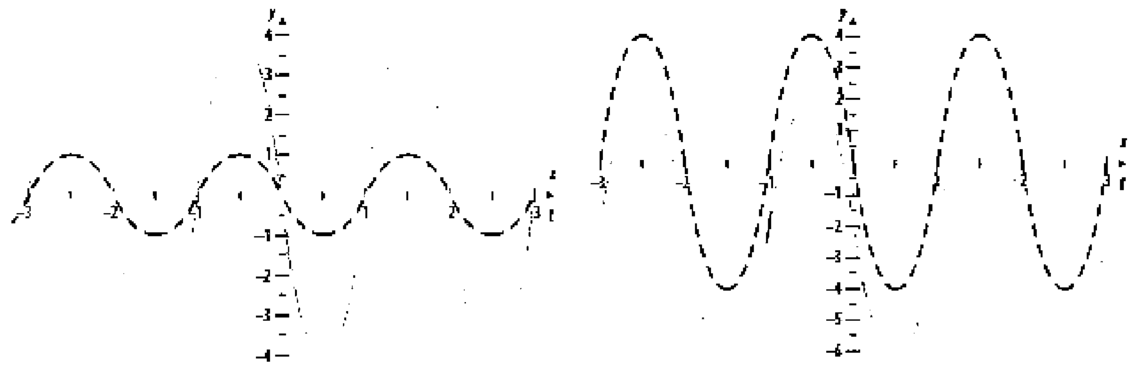
El factor 4 cambia la amplitud de -4 a 4 y el número 2 que resta traslada la gráfica 2 unidades hacia abajo (véase la figura 6.34).



a) Gráfica de $y = \text{sen}(\pi t)$.



b) Gráfica de $y = \text{sen}(\pi t + \pi)$.



c) Gráfica de $y = \text{sen}(\pi t + \pi)$ d) Gráfica de $y = \text{sen}(\pi t + \pi) - 2$

Figura 6.34

Con estos ejemplos quedó demostrado cómo funcionan los coeficientes en las gráficas de:

$$f(x) = A\,\text{sen}(B(x-h)) + k$$

$$f(x) = A\cos(B(x-h)) + k$$

En ambos casos, el coeficiente A modifica la amplitud entre $-A$ y A. Si A es negativo, además también refleja la gráfica con respecto al eje x. Por su parte, el coeficiente B modifica el periodo; si $B > 1$, lo comprime, en tanto si $0 < B < 1$, lo ensancha. Si B es negativo, en el caso de $y = \text{sen}(Bt)$, además hay que reflejar la gráfica con respecto al eje x, pero si se trata de $y = \cos(Bt)$ no es necesario el reflejo, debido a que coseno es una función par; por ejemplo, $\text{sen}(-3t) = -\text{sen}(3t)$, pero $\cos(-2t) = \cos(2t)$.

Por último, se estudian las traslaciones horizontales y verticales. Así, el número h traslada horizontalmente la gráfica de $f(x) = A\,\text{sen}(Bx)$ o $f(x) = A\cos(Bx)$, h unidades hacia la derecha si h es positivo y $|h|$ unidades hacia la izquierda si h es negativo. Por su parte, el número k traslada verticalmente la gráfica de $f(x) = A\,\text{sen}(B(x-h))$ o $f(x) = A\cos(B(x-h))$, k unidades hacia arriba si k es positivo y $|k|$ unidades hacia abajo si k es negativo.

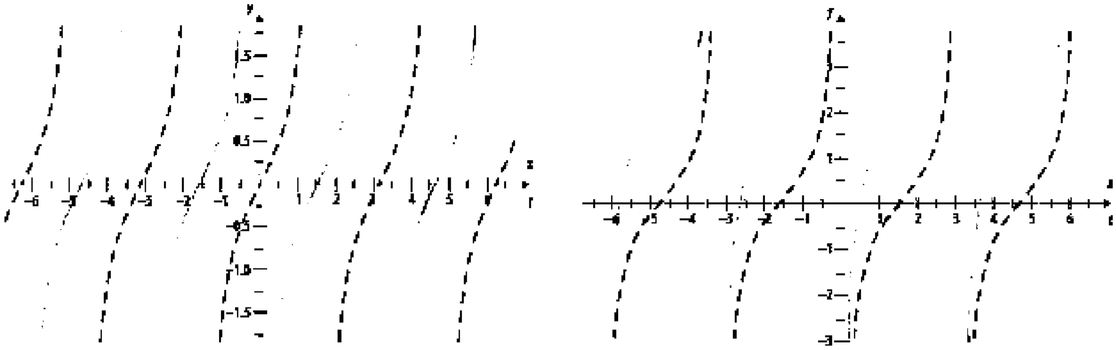
Enseguida se presentan algunos ejemplos de gráficas de las otras funciones trigonométricas.

Ejemplo 36

Graficar la función $y = 2 + \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución

En este caso, solo hay traslaciones. De esta manera, la gráfica de $y = \tan(x)$, se traslada $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha y 2 hacia arriba (véase la figura 6.35).



a) Gráfica de $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. **b)** Gráfica de $y = 2 + \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Figura 6.35

Ejemplo 37

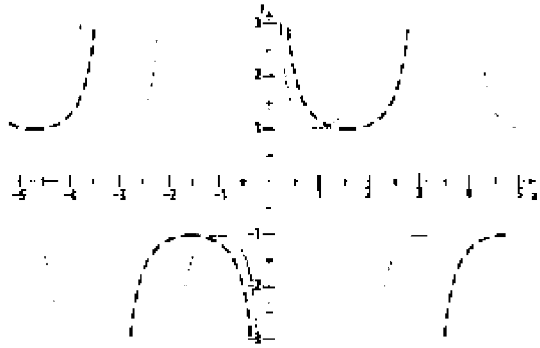
Graficar la función $y = 2 - 3\csc\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Solución

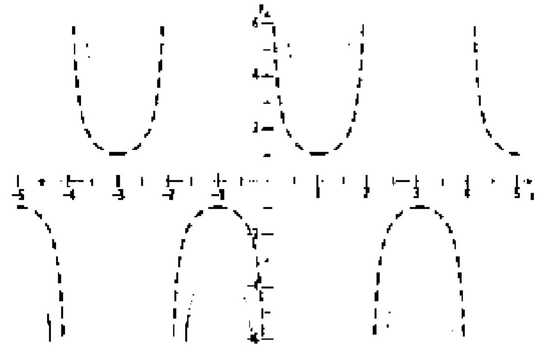
En este ejemplo, comenzamos calculando el nuevo periodo:

$$0 < \frac{\pi}{2}t < 2\pi \Rightarrow 0 < t < 4$$

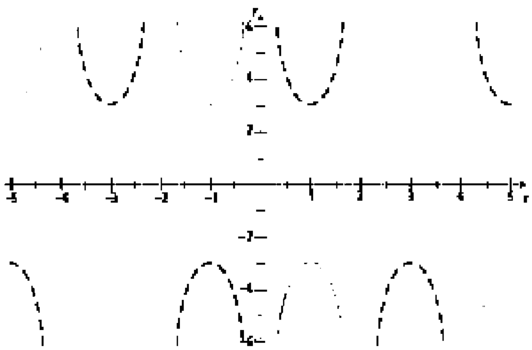
Por tanto, lo que graficamos entre 0 y 2π para $y = \csc(t)$, ahora se grafica entre 0 y 4 para $y = \csc\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, mientras que el factor 3 estira verticalmente la gráfica de $y = \csc(t)$ en un factor de 3. De esta manera, la gráfica de $y = 3\csc\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ tiene imagen $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$, donde el signo menos del factor 3 invierte la gráfica de $y = 3\csc\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ respecto al eje x. Por último, el 2 traslada hacia arriba 2 unidades la gráfica de $y = -3\csc\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ (véase la figura 6.36).



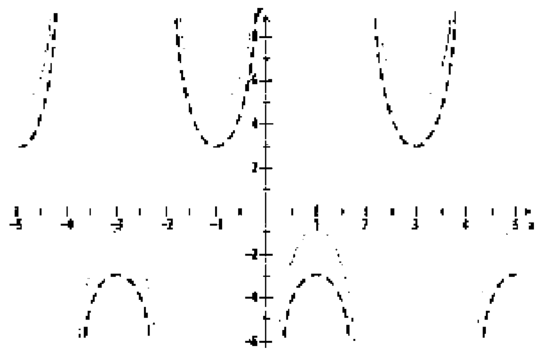
a) Gráfica de $y = \csc\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.



b) Gráfica de $y = 3\csc\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.



c) Gráfica de $y = -3\csc\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.



d) Gráfica de $y = 2 - 3\csc\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

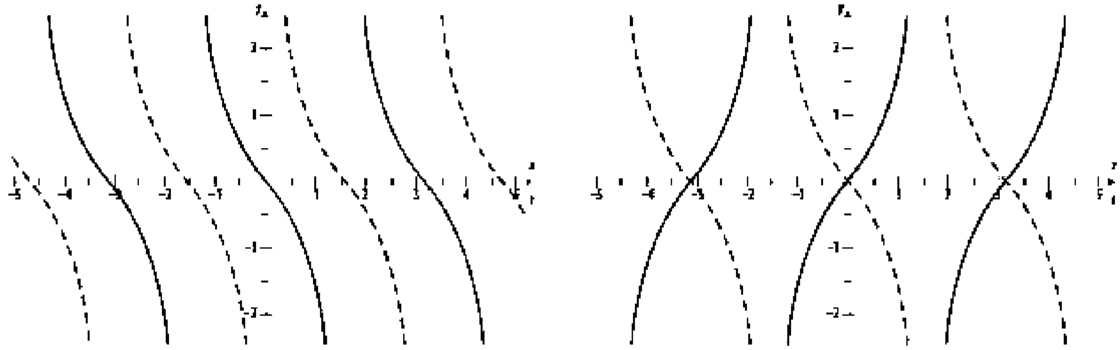
Figura 6.36

Ejemplo 38

Graficar la función $y = -\cot\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución

En este caso, la gráfica consiste en trasladar $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha la gráfica de $y = \cot(t)$ y después reflejarla con respecto al eje x. Así tenemos las siguientes gráficas:



a) Gráfica de $y = \cot\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$. b) Gráfica de $y = -\cot\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Figura 6.37

Como se puede observar, esta es la gráfica de $y = \tan(t)$, lo cual podemos comprobar mediante las identidades que aprendimos en la sección anterior. Así:

$$-\cot\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(t)}=-\frac{\operatorname{sen}(t)}{-\cos(t)}=\tan(t)$$

Ejemplo 39

Graficar la función $y = 1 - \dfrac{1}{2}\sec(\pi t + 2\pi)$.

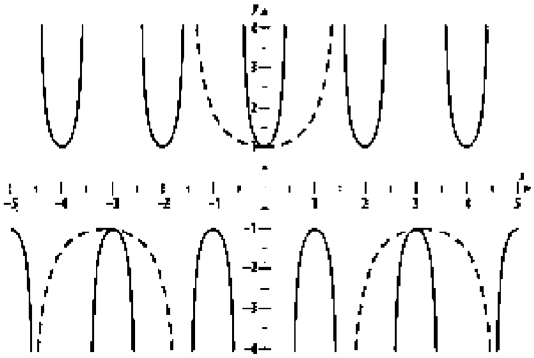
Solución

Aquí podemos observar que dado que la secante es una función cíclica con periodo 2π, $\sec(\pi t + 2\pi) = \sec(\pi t)$; por tanto, da lo mismo trasladar que no trasladar para construir la gráfica.

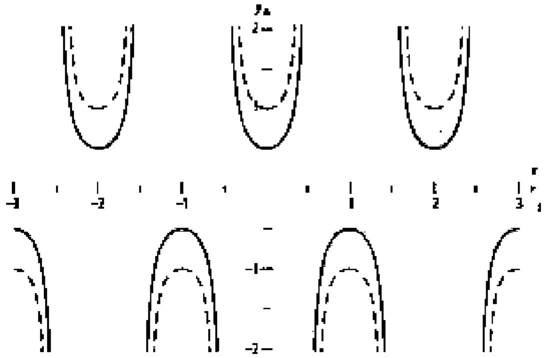
Así que aquí debemos obtener el periodo de $y = \sec(\pi t)$:

$$0 < \pi t < 2\pi \Rightarrow 0 < t < 2$$

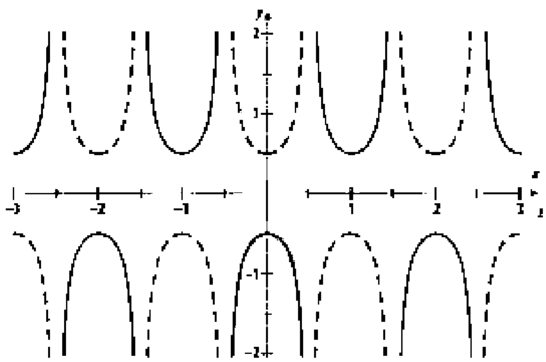
En este caso, el factor $\dfrac{1}{2}$ comprime verticalmente la gráfica de $y = \sec(\pi t)$; el signo menos refleja la gráfica de $y = \dfrac{1}{2}\sec(\pi t)$ respecto al eje x; por último, la gráfica anterior se traslada una unidad hacia arriba (véase la figura 6.38).



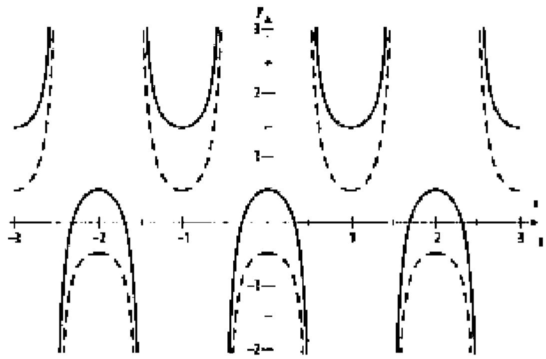
a) Gráfica de $y = \sec(\pi t)$.



b) Gráfica de $y = \dfrac{1}{2}\sec(\pi t)$.



c) Gráfica de $y = -\dfrac{1}{2}\sec(\pi t)$.



d) Gráfica de $y = 1 - \dfrac{1}{2}\sec(\pi t)$.

Figura 6.38

Ejemplo 40

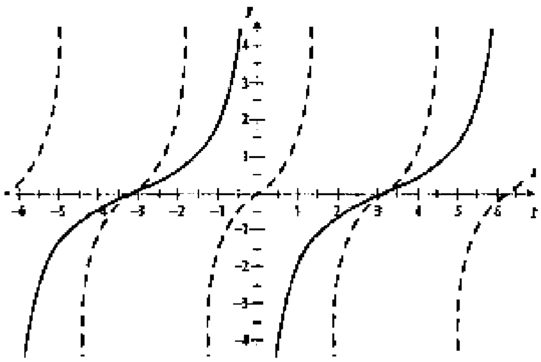
Graficar la función $y = 2.5 - 3\tan\left(\dfrac{1}{2}t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Solución

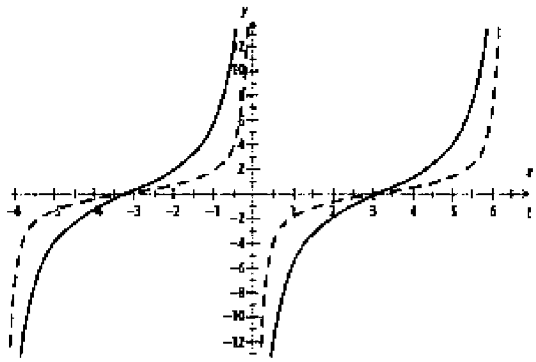
Primero, determinamos el periodo (como sabemos, el período se obtiene al resolver una desigualdad):

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < t < 2\pi$$

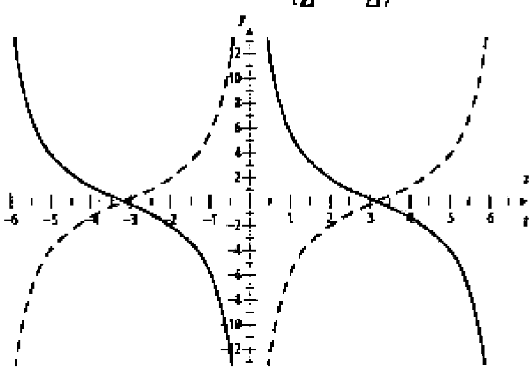
Como podemos observar, en este caso el factor de x alarga el periodo; por tanto, alarga horizontalmente la gráfica de $y = \tan(t)$. Por su parte, el factor -3 tiene dos efectos; por un lado alarga verticalmente la gráfica de $y = \tan\left(\dfrac{1}{2}t - \dfrac{\pi}{2}\right)$, y por el otro también la refleja respecto al eje x. El número 2.5, que suma a la función anterior, traslada la gráfica 2.5 unidades hacia arriba (véase la figura 6.39).



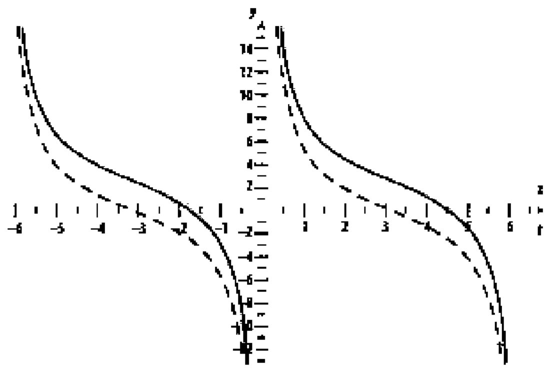
a) Gráfica de $y = \tan\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$.



b) Gráfica de $y = 3\tan\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$.



c) Gráfica de $y = -3\tan\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$.



d) Gráfica de $y = 2.5 - 3\tan\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Figura 6.39

Ejercicios propuestos

88. Prueba que las funciones tangente y cotangente son cíclicas con periodo π.
89. Prueba que las funciones secante y cosecante son cíclicas con periodo 2π.
90. Grafica la función cotangente.
91. Grafica la función cosecante.

En los ejercicios 92 a 111 dibuja la gráfica de la función dada.

92. $y = \operatorname{sen}(-t)$
93. $y = \cos(-t + \pi)$
94. $y = 3\operatorname{sen}(t - \pi)$

95. $y = \operatorname{sen}(3t + 3\pi)$

96. $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

97. $y = \frac{1}{2}\cos(\pi t)$

98. $y = 4\operatorname{sen}(-2t)$

99. $y = 1 + \operatorname{sen}(-t)$

100. $y = 2 - 2\operatorname{sen}(t + \pi)$

101. $y = 4 + 3\cos(\pi t + \pi)$

102. $y = 3 - 4\cos(3t - 6\pi)$

103. $y = 2 - \operatorname{sen}\left(-2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

104. $y = 2 - 2\cos\left(-3\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

105. $y = 3 + 3\operatorname{sen}(-3t)$

106. $y = 2.5 - 1.5\cos(2\pi t)$

107. $y = -4 + 5\operatorname{sen}(-t + \pi)$

108. $y = 3\tan(2\pi t) + 1$

109. $y = -1 - 2\sec(-t + \pi)$

110. $y = 3 + 2\cot(\pi(t + 1))$

111. $y = -2 + 2\csc(2t + 2\pi)$

6.4 Aplicaciones de las funciones trigonométricas

En esta sección se estudian algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas. Pero, para una mejor comprensión del tema, antes es importante definir el concepto de trigonometría. Así pues, la trigonometría es la parte de las matemáticas que estudia los elementos y la medición de los triángulos. La idea central de este tema es que si se conocen algunos elementos de un triángulo rectángulo, pueden deducirse los otros elementos del triángulo mediante las funciones trigonométricas (y el teorema de Pitágoras).

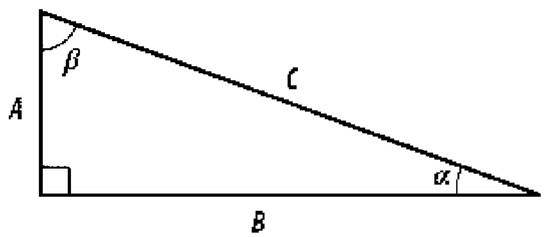


Figura 6.40

Como se vio antes, para el triángulo rectángulo de la figura 6.40 se tienen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{A}{C}, \cos(\alpha)=\frac{B}{C}, \tan(\alpha)=\frac{A}{B}, \operatorname{sen}(\beta)=\frac{B}{C}, \cos(\beta)=\frac{A}{C}, \tan(\beta)=\frac{B}{A}$$

Esto significa que si se conoce un ángulo y uno de los lados, con alguna de las relaciones anteriores es posible encontrar otro de los lados y mediante el teorema de Pitágoras ($A^2 + B^2 = C^2$) o a través de otra de las funciones trigonométricas, se puede conocer el tercer lado del triángulo; por tanto, se conocerá la información completa del triángulo. Debe advertirse que no se escribieron las otras funciones trigonométricas de los ángulos del triángulo, dado que por lo general no son necesarias. También es posible notar que los ángulos α y β son complementarios, por lo que $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$; es decir, $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$ y $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

A continuación, se analizan algunos ejemplos para una mejor comprensión del tema.

Ejemplo 41

Encontrar los elementos del triángulo de la figura 6.41.

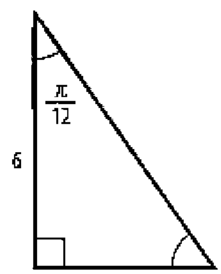


Figura 6.41

Solución

El otro ángulo del triángulo es $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$. Como conocemos el ángulo y su cateto adyacente, podemos utilizar las funciones coseno y tangente para encontrarlos valores de la hipotenusa y el cateto opuesto del triángulo, respectivamente. Entonces, sean B el cateto opuesto al ángulo $\frac{\pi}{12}$ y C la hipotenusa:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{6}{C}\Rightarrow C=\frac{6}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{6}{0.96593}=6.2117$$

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{B}{6}\Rightarrow B=6\tan\cdot\frac{\pi}{12}=1.6077$$

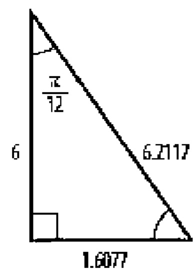


Figura 6.42

Ejemplo 42

Encontrar los elementos del triángulo de la figura 6.43.

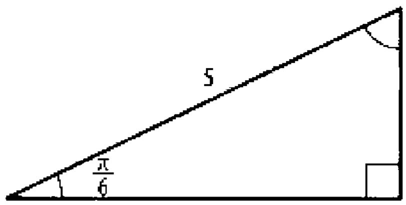


Figura 6.43

Solución

El ángulo que falta es el complementario a $\frac{\pi}{6}$; esto es: $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.
Sean A y B los catetos adyacente y opuesto, respectivamente:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{B}{5}\Rightarrow B=5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{A}{5}\Rightarrow 5\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

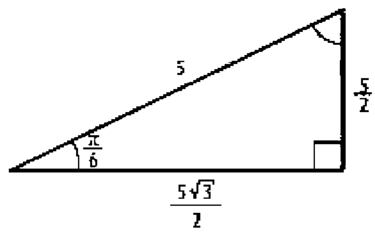


Figura 6.44

Ejemplo 43

Supóngase que una persona en la azotea de un edificio de 24 m de altura ve su auto con un ángulo de inclinación de 40°. Encontrar la distancia entre el edificio y el auto.

Solución

En la figura 6.45 bosquejamos el problema. De esta manera, observamos que tenemos un triángulo rectángulo del cual conocemos un ángulo y su cateto adyacente. Como queremos calcular el otro cateto, B, utilizamos la tangente. Así, tenemos:

$$\tan(40^\circ) = \frac{B}{24} \Rightarrow B = 24\tan(40^\circ) = 20.138$$

Entonces, podemos afirmar que la distancia del auto al edificio es de 20.14 m (véase la figura 6.45).

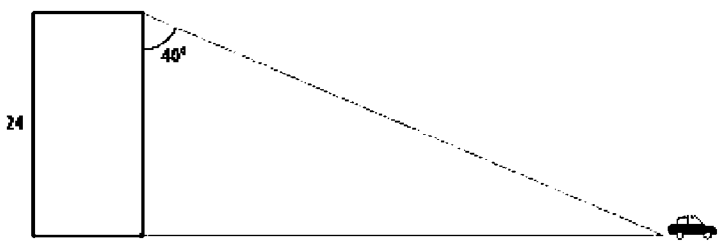


Figura 6.45

Ejemplo 44

Una canaleta para agua de lluvia se forma al doblar por la mitad una lámina plana de 5 m por 0.4 m (véase la figura 6.46). Expresar el volumen del canal en función del ángulo t entre los lados doblados.

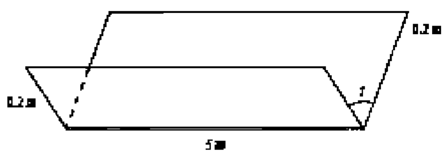


Figura 6.46

Solución

Si miramos la canaleta de perfil, podemos observar un triángulo isósceles con ángulo central t.

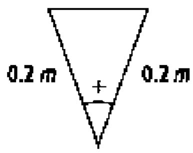


Figura 6.47

El volumen de la canaleta es el área de este triángulo multiplicada por el largo de la canaleta; de esta forma, solo debemos expresar el área del triángulo isósceles en función del ángulo t. Para esto, dividimos la canaleta en dos triángulos rectángulos iguales mediante la altura desde el vértice inferior:

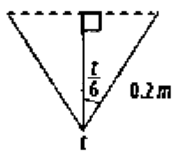


Figura 6.48

Para cada uno de estos triángulos, podemos expresar el área en términos del ángulo inferior, $\frac{t}{2}$, y la hipotenusa, 0.2 m por construcción. Si llamamos B a su base y H a su altura, tenemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{B}{0.2}\Rightarrow B=0.2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{H}{0.2}\Rightarrow H=0.2\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

Entonces, el área de cada triángulo rectángulo es $\frac{BH}{2}$, y el área del triángulo isósceles es $BH=\left[0.2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right]\left[0.2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]=0.04\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Por tanto, el volumen buscado es $V=5\left[0.04\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]=0.2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ para $0<t<\pi$, y t depende de lo que se haya abierto la canaleta.

■

Ejemplo 45

Dos árboles se encuentran directamente alineados en las orillas opuestas de un río. A 100 m, sobre una de las orillas del río, se mide el ángulo hacia el árbol de la orilla opuesta, el cual es de 35° (véase la figura 6.49). Calcular la distancia entre los árboles.

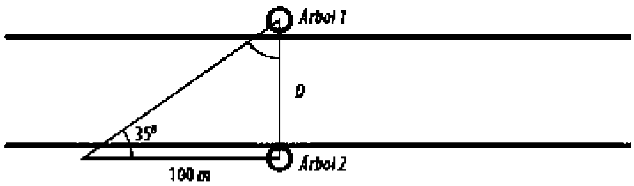


Figura 6.49

Solución

De la figura 6.49 podemos ver que la distancia, D, que buscamos corresponde al cateto opuesto del ángulo dado, por lo que en este caso utilizamos la función tangente:

$$\tan(35^\circ) = \frac{D}{100} \Rightarrow \text{la distancia entre los árboles es } D = 100\tan(35^\circ) = 70.02 \text{ m.}$$

Ejemplo 46

Una antena se encuentra en lo alto de un edificio; una persona que se encuentra a 50 m de distancia del edificio nota que si mira el inicio de la antena tiene un ángulo de elevación de $\frac{7}{36}\pi$ y si mira el final de la antena tiene un ángulo de elevación de $\frac{5}{18}\pi$ (véase la figura 6.50). Determinar la altura de la antena y del edificio.

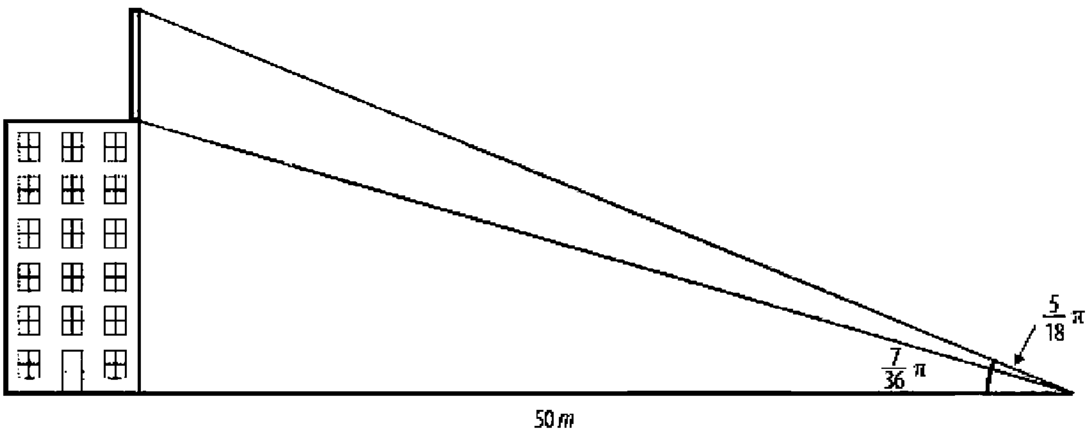


Figura 6.50

Solución

De la figura 6.50 podemos ver que tenemos dos triángulos rectángulos de los que conocemos un ángulo y su cateto adyacente. Dado que la altura del edificio corresponde al cateto opuesto del triángulo menor y la altura de la antena es la diferencia del cateto opuesto del triángulo mayor menos la altura del edificio, sean H la altura del edificio y A la altura de la antena. De esta manera, tenemos que:

$$\tan\left(\frac{7}{36}\pi\right)=\frac{H}{50}\Rightarrow H=50\tan\left(\frac{7}{36}\pi\right)=35.01\ m$$

$$\tan\left(\frac{5}{18}\pi\right)=\frac{H+A}{50}\Rightarrow H+A=50\tan\left(\frac{5}{18}\pi\right)=59.59\ \text{m}\Rightarrow A=59.59-35.01=24.58\ \text{metros}$$

Entonces, el edificio mide 35.01 m y la antena 24.58 m.

Ejemplo 47

La figura 6.51 muestra la estructura de un armazón para un puente. Determinar los valores de los segmentos C y B.

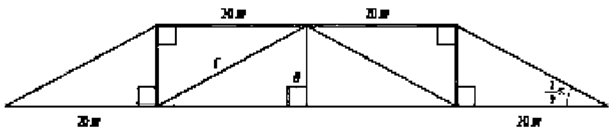


Figura 6.51

Solución

Como podemos observar en la figura, todos los triángulos del armazón son iguales. Por tanto, en cualquiera de estos, C es la hipotenusa, mientras que B es el cateto opuesto al ángulo dado. Entonces:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{20}{C}\Rightarrow C=\frac{20}{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}=26.11\ \text{m}$$

$$\tan\left(\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{B}{20}\Rightarrow B=20\tan\left(\frac{2\pi}{9}\right)=16.78\ \text{m}$$

Ejemplo 48

Una montaña que mide en su punto más alto 150 m tiene miradores en lados opuestos. En uno de los miradores el ángulo al ver hacia la cumbre de la montaña es de 20°, mientras que desde el otro mirador es de 25° (véase la figura 6.52). Calcular la distancia entre los dos miradores.

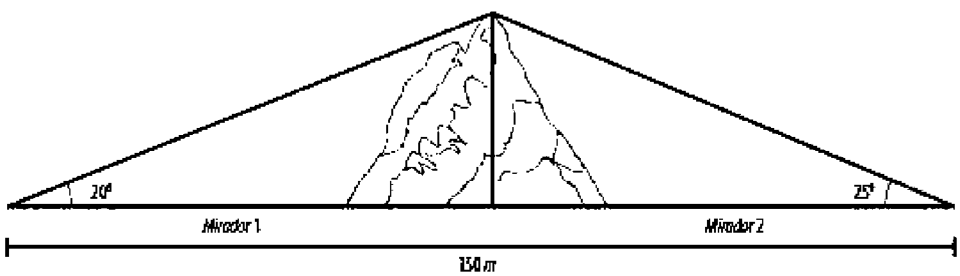


Figura 6.52

Solución

De acuerdo con la figura 6.53, podemos establecer que:

$$20^\circ = \frac{\pi}{9} \text{ radianes y } 25^\circ = \frac{5}{36}\pi \text{ radianes}$$

Sea P el punto en el suelo debajo de la cima de la montaña y A la distancia de P al mirador 1 y B la distancia de P al mirador 2. En la figura 6.52 también podemos ver que $\tan\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{150}{A}$ y $\tan\left(\frac{5}{36}\pi\right) = \frac{150}{B}$. Por tanto, la distancia entre los dos miradores es:

$$A + B = \frac{150}{\tan\left(\frac{\pi}{9}\right)} + \frac{150}{\tan\left(\frac{5}{36}\pi\right)} = 733.80 \text{ m}$$

En toda la serie de ejemplos anteriores se plantearon problemas en los que siempre se conocía un ángulo. Sin embargo, existen aplicaciones en las cuales se requiere conocer el ángulo de un triángulo rectángulo del cual solo se conocen dos lados; no obstante, el tercer lado es fácil de calcular por medio del teorema de Pitágoras. Así, para determinar el ángulo se requiere calcular la función inversa de alguna de las funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas inversas

En matemáticas, muchas operaciones tienen una operación contraria; por ejemplo, la operación contraria de la suma es la resta, de la división es el producto y de la raíz cuadrada es elevar al cuadrado. En esta sección, se estudia cuál es la operación contraria de la aplicación de alguna de las funciones trigonométricas.

Así, lo primero que se señala es que las funciones trigonométricas no siempre tienen una operación contrapuesta. Para decirlo con precisión, ninguna de las funciones trigonométricas tiene una función inversa en su dominio. Pero, si se restringe adecuadamente su dominio, sí tienen una función inversa. Existen muchas formas de restringir el dominio; en la tabla anexa se presentan las restricciones para cada una de las funciones trigonométricas que se usan más comúnmente. En las únicas funciones en donde no hay consenso es en la secante y en la cosecante.

Tabla 6.3

Función trigonométrica	Dominio restringido
Seno	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
Coseno	$[0, \pi]$
Tangente	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
Cotangente	$(0, \pi)$
Secante	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
Cosecante	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Entonces, las funciones inversas de las funciones trigonométricas se definen como sigue:

Arcoseno: $y = \arcsin(t)$ es el número en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ para el cual $\operatorname{sen}(y) = t$.

Arcocoseno: $y = \arccos(t)$ es el número en el intervalo $[0, \pi]$ para el cual $\cos(y) = t$.

Arcotangente: $y = \arctan(t)$ es el número en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ para el cual $\tan(y) = t$.

Arcocotangente: $y = \operatorname{arccot}(t)$ es el número en el intervalo $(0, \pi)$ para el cual $\cot(y) = t$.

Arcosecante: $y = \operatorname{arcsec}(t)$ es el número en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ para el cual $\sec(y) = t$.

Arcocosecante: $y = \operatorname{arccsc}(t)$ es el número en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ para el cual $\csc(y) = t$.

Pero, también hay otra notación muy utilizada para las funciones trigonométricas inversas:

$$\operatorname{arcsen}(t) = \operatorname{sen}^{-1}(t)$$

$$\arccos(t) = \cos^{-1}(t)$$

$$\arctan(t)=\tan^{-1}(t)$$

$$\operatorname{arccot}(t)=\cot^{-1}(t)$$

$$\operatorname{arcsec}(t)=\sec^{-1}(t)$$

$$\operatorname{arccsc}(t)=\csc^{-1}(t)$$

No obstante, esta notación solo es para una función inversa, no para un recíproco, esto es:

$$\operatorname{arcsen}(t)=\operatorname{sen}^{-1}(t)\neq\frac{1}{\operatorname{sen}(t)}=\csc(t)$$

$$\cos^{-1}(t)\neq\frac{1}{\cos(t)}=\sec(t)$$

$$\tan^{-1}(t)\neq\frac{1}{\tan(t)}=\cot(t)$$

$$\cot^{-1}(t)\neq\frac{1}{\cot(t)}=\tan(t)$$

$$\sec^{-1}(t)\neq\frac{1}{\sec(t)}=\cos(t)$$

$$\csc^{-1}(t)\neq\frac{1}{\csc(t)}=\operatorname{sen}(t)$$

En resumen, las funciones trigonométricas inversas permiten conocer el valor del ángulo en un triángulo rectángulo.

Ejemplo 49

Encontrar los valores de los ángulos α y β del triángulo de la figura 6.53, si se conocen dos de sus lados.

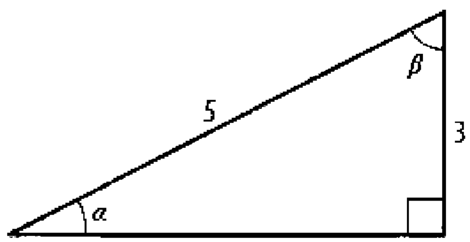


Figura 6.53

Solución

Dado que conocemos el valor del cateto opuesto a α y el valor de la hipotenusa, sabemos que $\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{3}{5}$, de donde $\alpha=\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)=0.6435$ radianes. En tanto, para el ángulo β conocemos los valores de su cateto adyacente y de la hipotenusa, por lo que utilizamos el coseno:

$$\cos(\alpha)=\frac{3}{5}\Rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{3}{5}\right)=0.92730 \text{ radianes}$$

Como podemos notar, no es necesario calcular el valor del otro cateto; sin embargo, si esto fuera necesario es fácil de calcular con el teorema de Pitágoras; en este caso, su longitud es de 4 unidades.

Ejemplo 50

Encontrar los valores de los ángulos α y β del triángulo de la figura 6.54.

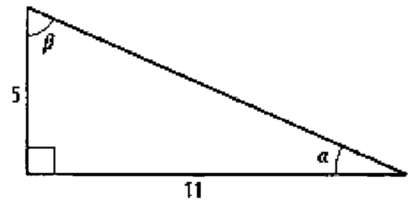


Figura 6.54

Solución

Dado que conocemos los valores de los catetos, utilizamos la función tangente y su inversa:

$$\tan(\alpha)=\frac{5}{11}\Rightarrow\alpha=\arctan\frac{5}{11}=0.42663$$

$$\tan(\beta)=\frac{11}{5}\Rightarrow\beta=\arctan\frac{11}{5}=1.1442$$

Como podemos ver, el resultado de la suma de los ángulos es $\frac{\pi}{2}$, tal como debe ser.

Ejemplo 51

La corriente en un circuito eléctrico está dada para el instante t como

$$I(t)=I_0[\operatorname{sen}(\omega t+\theta)\cos(\phi)+\cos(\omega t+\theta)\operatorname{sen}(\phi)]$$

Despejar t.

Solución

Primero, observamos que la expresión dentro del paréntesis cuadrado es el seno de una suma de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(\omega t+\theta)\cos(\phi)+\cos(\omega t+\theta)\operatorname{sen}(\phi)=\operatorname{sen}[(\omega t+\theta)+\phi]$$

Por tanto, la ecuación original queda como:

$$I(t)=I_0\operatorname{sen}(\omega t+\theta+\phi)$$

Entonces:

$$\operatorname{sen}(\omega t+\theta+\phi)=\frac{I(t)}{I_0}$$

Al aplicar arcoseno tenemos:

$$\omega t+\theta+\phi=\operatorname{arcsen}\left(\frac{I(t)}{I_0}\right)$$

Donde:

$$t=\frac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{I(t)}{I_0}\right)-\theta-\phi}{\omega}$$

Ejemplo 52

Una avioneta vuela a una altura de 2 millas y se encuentra a una distancia horizontal de 10 millas del inicio de una pista de aterrizaje. Determinar el ángulo al que debe descender para aterrizar en la pista.

Solución

En la figura 6.55 podemos notar que los datos dados corresponden a los catetos del triángulo rectángulo:

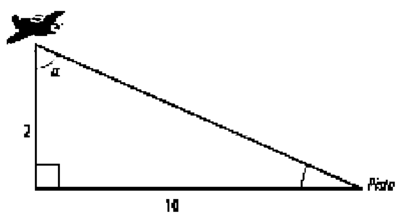


Figura 6.55

$$\tan(\alpha)=\frac{10}{5}\Rightarrow\alpha=\arctan(5)=1.3734\text{ (aproximadamente }78.69°)$$

Ejemplo 53

a) Calcular $\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

b) Probar que $\operatorname{sen}(\arccos(w)) = \sqrt{1-w^2}$ para $-1 \le w \le 1$.

Solución

a) Sea $t = \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$; primero, aplicamos la función tangente de cada lado y obtenemos:

$$\tan(t) = \frac{1}{4}$$

Luego, construimos un triángulo rectángulo con ángulo t, cateto opuesto 1 y cateto adyacente 4 (véase la figura 6.56):

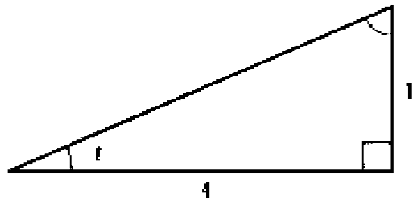


Figura 6.56

Por el teorema de Pitágoras, sabemos que la hipotenusa es $\sqrt{17}$. Por tanto, $\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \operatorname{sen}(t) = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

b) Sea $t = \arccos(w)$; entonces, $\cos(t) = w = \frac{w}{1}$. Por tanto, a continuación construimos un triángulo rectángulo con un ángulo t, cateto adyacente w e hipotenusa 1 (véase la figura 6.57).

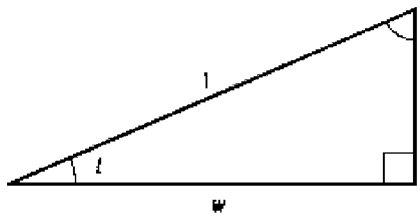


Figura 6.57

De acuerdo con el teorema de Pitágoras, el cateto opuesto al ángulo t es $\sqrt{1-w^2}$, por lo que $\operatorname{sen}(\arccos(w)) = \operatorname{sen}(t) = \frac{\sqrt{1-w^2}}{1} = \sqrt{1-w^2}$.

Ejemplo 54

Calcular $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{4}+\arccos\frac{2}{5}\right)$.

Solución

En este caso, usamos la fórmula de coseno de una suma:

$$\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{4}+\arccos\frac{2}{5}\right)=\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\arccos\frac{2}{5}\right)-\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$$

Por definición de función inversa, sabemos que $\cos\left(\arccos\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}$ y $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$.

Ahora, $\cos\left(\operatorname{aresen}\frac{3}{4}\right)$ se calcula construyendo un triángulo rectángulo con ángulo $t=\operatorname{arcsen}\frac{3}{4}$ o $\operatorname{sen}(t)=\frac{3}{4}$.

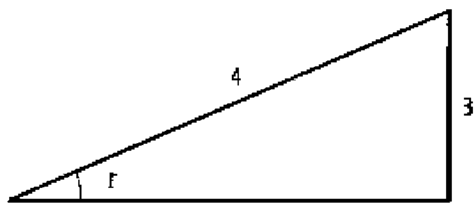


Figura 6.58

Por el teorema de Pitágoras, sabemos que el cateto adyacente es: $\sqrt{7}$, por lo que $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{4}\right)=\cos(t)=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

En tanto, para el otro factor, calculamos $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$. De igual modo, también construimos un triángulo rectángulo con ángulo $\theta=\arccos\frac{2}{5}$, por lo que $\cos\theta=\frac{2}{5}$:

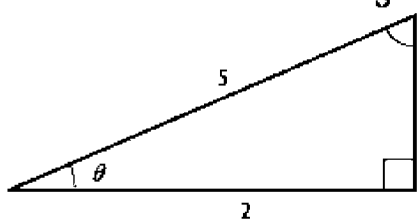


Figura 6.59

El cateto opuesto es, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, $\sqrt{21}$ y

$$\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{2}{5}\right)=\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Así, al reunir lo anterior, tenemos:

$$\cos\left(\text{arcsen}\,\frac{3}{4}+\text{arccos}\,\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)=\frac{2\sqrt{7}-3\sqrt{21}}{20}$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 112 a 121 encuentra los valores de los ángulos y lados que faltan del triángulo o figura dada.

112.

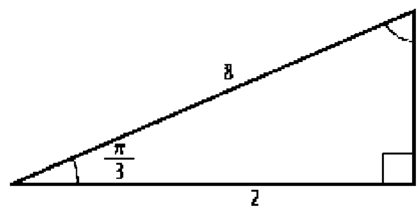


Figura 6.60

113.

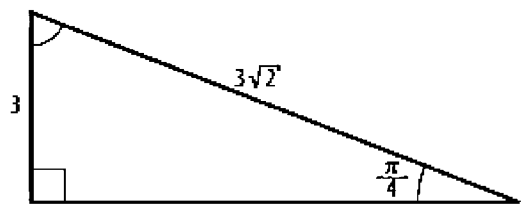


Figura 6.61

114.

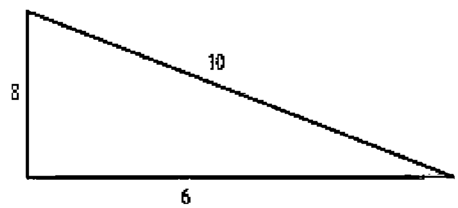


Figura 6.62

115.

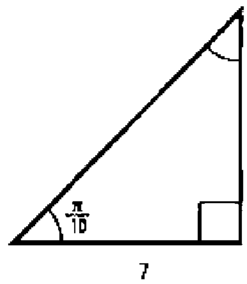


Figura 6.63

116.

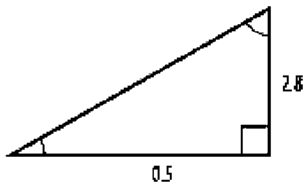


Figura 6.64

117.

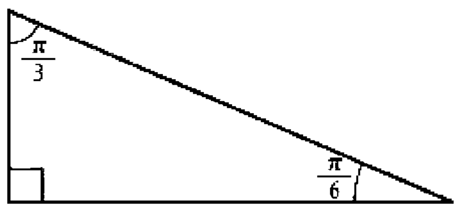


Figura 6.65

118.

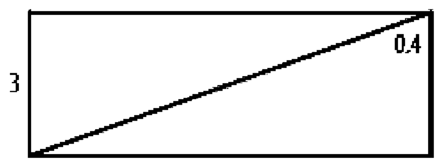


Figura 6.66

119.

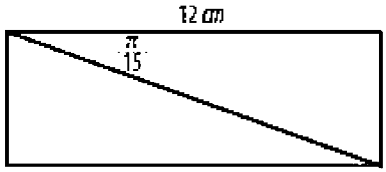


Figura 6.67

120.

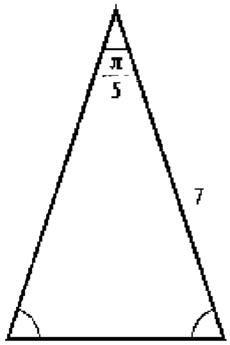


Figura 6.68

121.

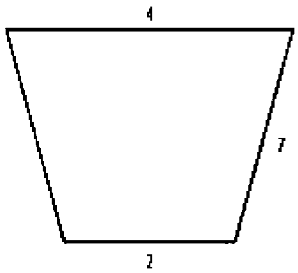


Figura 6.69

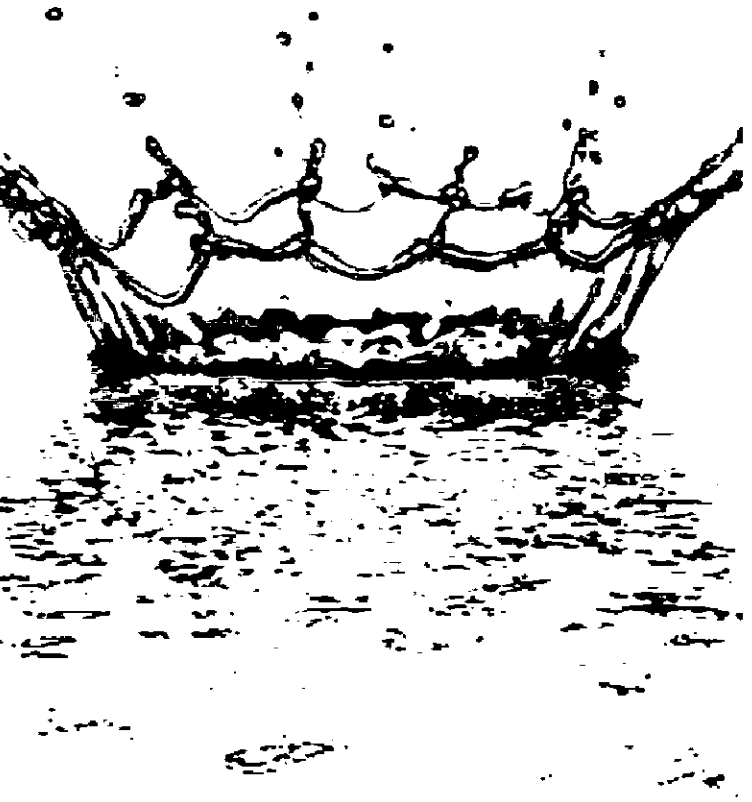
122. En un parque se desea colocar un teleférico; se planea que este se ubique en un punto A sobre el suelo a un punto B a 200 m de A y a 150 m arriba del suelo. Determina el ángulo del tendido del teleférico.

123. Un globo aerostático vuela a una altura de 100 m sobre el suelo. Un observador situado a cierta distancia del punto en el suelo sobre el globo ve el globo con un ángulo de 0.3 radianes. Calcula la distancia entre el observador y el globo.

124. Una montaña tiene una altura de 700 m; en esta hay un refugio que se ubica a 500 m de altura. Asimismo, a 2 km de distancia del punto en el suelo debajo de la cima de la montaña se ubica un mirador con un telescopio. Determina el ángulo del mirador para ver el refugio y la cima de la montaña.

Capítulo 7

Geometría analítica



Al final de este capítulo el alumno será capaz de:

- Identificar las ecuaciones correspondientes a las distintas cónicas, incluyendo circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.
- Resolver problemas que involucran cónicas y graficar estas en el plano cartesiano.
- Aplicar las ecuaciones de las cónicas a problemas de la vida cotidiana.

Introducción

La geometría analítica se encarga del estudio de las cónicas, que son las curvas planas que se forman cortando un cono recto con un plano.

Cuando el plano que se usa para cortar al cono es perpendicular al eje del cono, la intersección que se obtiene es una circunferencia (véase la figura 7.1a). Por su parte, cuando el plano forma un ángulo dado con el eje del cono, que sea menor que el ángulo de abertura del cono, la figura que se obtiene es una elipse (parte superior de la figura 7.1a). En tanto, cuando el ángulo de inclinación del plano es igual al ángulo de inclinación de la generatriz del cono se obtiene una parábola (véase la figura 7.1b); es importante aclarar aquí que la generatriz es la recta que indica qué tanto se abre el cono. Cuando el plano con el que se corta el cono es paralelo al eje del cono (o forma un ángulo con el eje del cono, menor que la abertura de la generatriz) se obtiene una hipérbola (véase la figura 7.1c). Por último, cuando el plano pasa por el vértice del cono se obtienen *cónicas degeneradas*; las cuales pueden ser: un punto (si el plano es perpendicular al eje), una línea (si el plano contiene a la generatriz del cono) o una cruz (si el plano contiene al eje del cono). Es posible visualizar estas curvas imaginando los cortes que se obtienen al cortar un cono con un plano, y variando la posición del plano respecto del cono, así como su inclinación respecto del eje del cono.

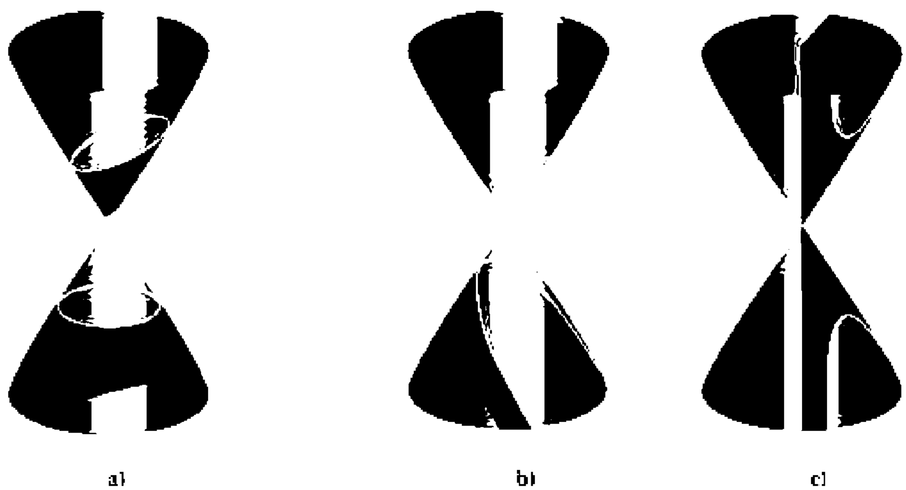


Figura 7.1 Generación de: a) una circunferencia y una elipse, b) una parábola y c) una hipérbola, cortando un cono con un plano de acuerdo al ángulo de inclinación del plano respecto del eje del cono.

Como se estudió en el capítulo 3, el plano coordenado se divide en 4 cuadrantes: I, II, III y IV, como se muestra en la figura 7.2. Donde existe una correspondencia uno a uno entre un par ordenado de números (a, b) y un punto P en el plano coordenado cartesiano.

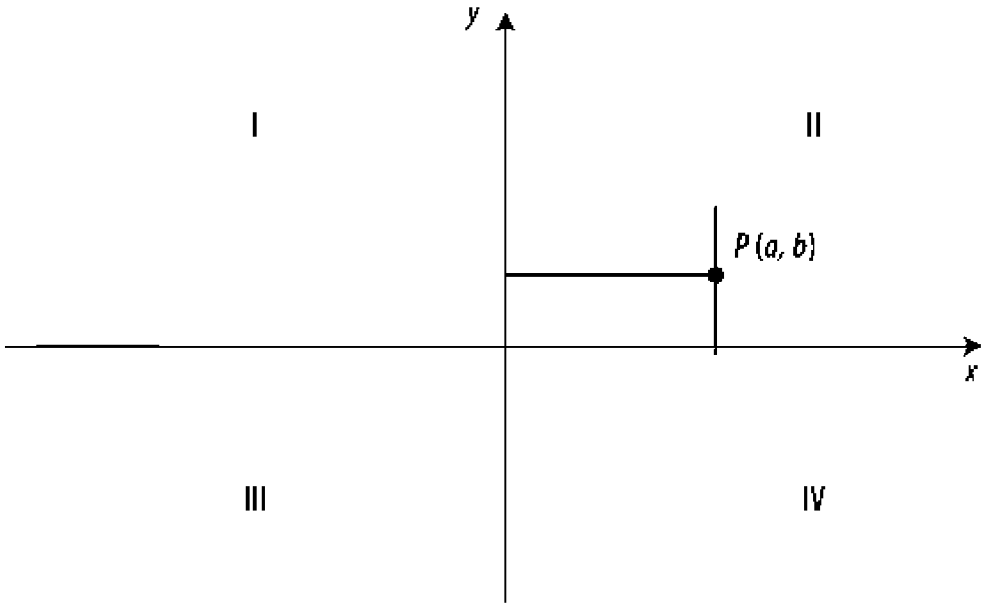


Figura 7.2 Plano cartesiano con cuadrantes I, II, III y IV, donde se observa la posición de un punto P con coordenadas (a, b).

Como se estudió en el capítulo 3, la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano está dada por la *fórmula de la distancia*:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Además el punto medio de un segmento con extremos en $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dado por la fórmula del punto medio:

$$PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

7.1 Circunferencia

La circunferencia es el *lugar geométrico* de los puntos en el plano cartesiano cuya distancia a un punto fijo es una constante; este punto recibe el nombre de *centro de la circunferencia*. La distancia desde el centro a cualquier punto en la circunferencia es el *radio*. Así, una circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio $r > 0$ está formada por todos los puntos en el plano que están a una distancia r de C (véase la figura 7.3).

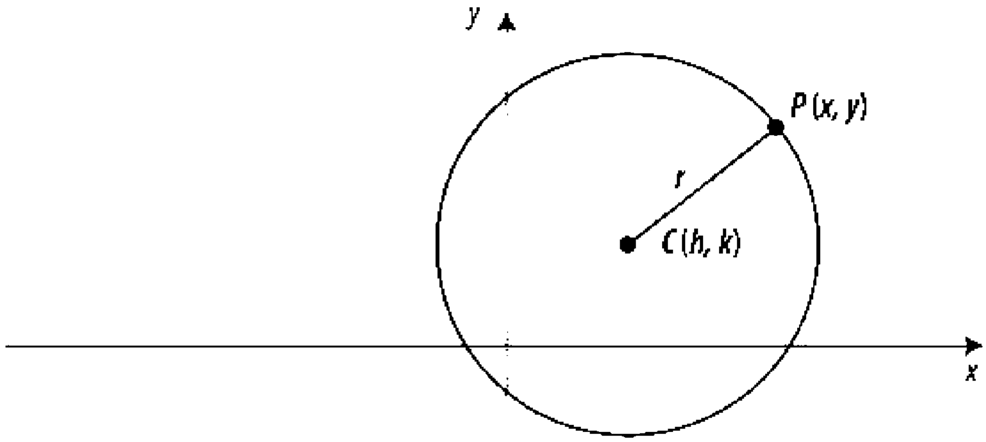


Figura 7.3 Circunferencia de radio r, con centro en C.

Así que la forma estándar de la ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio $r > 0$ es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Si la circunferencia está centrada en el origen, entonces $(h, k) = (0, 0)$ y la ecuación de la circunferencia se reduce a:

$$x^2+y^2=r^2$$

Si se desarrolla la forma estándar de la ecuación de la circunferencia se obtiene:

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-r^2=0$$

Esta puede escribirse como:

$$x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$$

Es decir:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Donde:

$$D = -2h,\ E = -2k \text{ y } F = h^2 + k^2 - r^2$$

A esta última forma se le conoce como forma general de la ecuación de la circunferencia.

Combinando ambas expresiones se tiene que:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

Entonces, si $D^2 + E^2 - 4F > 0$ se tiene una circunferencia de radio $r > 0$. En tanto, si $D^2 + E^2 - 4F < 0$ se tiene una circunferencia compleja o imaginaria. Por su parte, si $D^2 + E^2 - 4F = 0$ se tiene una circunferencia degenerada que consta de un solo punto: el centro.

Suele ocurrir que los términos círculo y circunferencia se usan de manera indistinta. Sin embargo, el círculo es la superficie plana contenida por la circunferencia y constituye la figura plana que tiene la mayor área posible para un perímetro dado. Por otro lado, la longitud de la circunferencia de un círculo es el perímetro de la circunferencia, que es igual al producto de π por el diámetro: $P = \pi D$. En tanto, el área del círculo es el producto de π por el radio al cuadrado, cuya fórmula se expresa de la siguiente manera:

$$A = \pi r^2$$

Ejemplo 1

Encontrar el centro y el radio de las circunferencias dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$

c) $(x - 6)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 36$

Solución

a) Al comparar la ecuación dada con la fórmula $x^2 + y^2 = r^2$, vemos que el centro de la circunferencia está en el origen: $(h, k) = (0, 0)$ y que el radio de la circunferencia es $r^2 = 9$, así que $r = \sqrt{9} = 3$ (así, solo tomamos el valor de $r > 0$).

b) Al comparar la ecuación dada con la fórmula $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, vemos que el centro de la circunferencia está en $(h, k) = (-3, 2)$ y que el radio de la circunferencia es $r^2 = 4$, así que $r = \sqrt{4} = 2$ (así, solo tomamos el valor de $r > 0$).

c) Ahora, comparamos la ecuación dada con la fórmula general de la circunferencia: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$; así, concluimos que el centro de la circunferencia está en el punto $(h, k) = \left(6, -\frac{1}{2}\right)$ y que el radio de la circunferencia es $r^2 = 36$, así que $r = \sqrt{36} = 6$ (así, solo tomamos el valor de $r > 0$).

Ejemplo 2

Encontrar las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a) Circunferencia con centro en el origen y radio 5.

b) Circunferencia con centro en $(4, -8)$ y radio $\sqrt{2}$.

c) Circunferencia con centro en $(9, 1)$ y radio $3\sqrt{3}$.

Solución

a) Aquí sustituimos $r = 5$ en la forma estándar de la ecuación de una circunferencia con centro en el origen, así que la ecuación que buscamos es:

$$x^2 + y^2 = 25$$

b) En este inciso sustituimos $h = 4$, $k = -8$ y $r = \sqrt{2}$, en la forma estándar de la ecuación de una circunferencia, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$; así, obtenemos

$$(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 2.$$

c) Aquí sustituimos $h = 9$, $k = 1$ y $r = 3\sqrt{3}$ en la forma estándar de la ecuación de una circunferencia, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$; así, obtenemos $(x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 27$.

Ejemplo 3

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 4x - 12y = 9$$

Solución

Primero, completamos cuadrados en x y en y. Para eso, tomamos el coeficiente del término lineal en x, -4, lo dividimos entre 2 y lo elevamos al cuadrado:

$$\left[\frac{1}{2}(-4)\right]^2 = 4$$

Luego, procedemos de la misma manera con el coeficiente que multiplica al término lineal en y; es decir, -12:

$$\left[\frac{1}{2}(-12)\right]^2 = 36$$

Así que:

$$x^2 + y^2 - 4x - 12y = 9 \Rightarrow$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 = 9 + 4 + 36$$

Es decir:

$$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 49$$

Comparando esta ecuación con la fórmula general de la circunferencia, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, encontramos que el centro de la circunferencia está en $(h, k) = (2, 6)$ y que su radio es $r = 7$.

Ejemplo 4

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 3$$

Solución

Como en el ejemplo anterior, primero completamos cuadrados en x y en y. Considerando los coeficientes de los términos lineales en x y en y, tenemos que:

$$\left[\frac{1}{2}6\right]^2 = 9 \text{ y que } \left[\frac{1}{2}(-4)\right]^2 = 4$$

Así, podemos escribir:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 3 \Rightarrow$$
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 3 + 9 + 4$$

Es decir:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

Si comparamos esta ecuación con la fórmula estándar de la circunferencia, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, observamos que el centro de la circunferencia está en $(h, k) = (-3, 2)$ y que su radio es $r = \mathbf{4}$.

Ejemplo 5

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 8y = -9$$

Solución

Como en el ejemplo anterior, primero completamos cuadrados en x y en y. Considerando los coeficientes de los términos lineales en x y en y, respectivamente, tenemos que:

$$\left[\frac{1}{2}2\sqrt{2}\right]^2 = 2 \text{ y que } \left[\frac{1}{2}(-8)\right]^2 = 16$$

Así, podemos escribir:

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 8y = -9 \Rightarrow$$
$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - 8y + 16 = -9 + 2 + 16$$

Es decir:

$$\left(x + \sqrt{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

Si comparamos esta ecuación con la fórmula estándar de la circunferencia, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, vemos que el centro de la circunferencia está en $(h, k) = \left(-\sqrt{2}, 4\right)$ y que su radio es $r = 3$.

Ejemplo 6

Encontrar la ecuación de la circunferencia, sabiendo que los puntos (3, 1) y (9, 5) son los puntos extremos de un diámetro.

Solución

Paso 1. El centro de la circunferencia es el punto medio del diámetro, así que podemos encontrar las coordenadas del centro usando la fórmula del punto medio:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{3+9}{2},\frac{1+5}{2}\right)=(6,3)$$

De esta manera, el centro de la circunferencia se localiza en $(h, k) = (6, 3)$.

Paso 2. El radio es la distancia desde el centro a cualquiera de los puntos extremos del diámetro. Por tanto, podemos encontrar el radio usando la fórmula de la distancia:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(9-6)^2+(5-3)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

Así que:

$$r=\sqrt{13}$$

Paso 3. En este punto sustituimos los valores encontrados para el radio y las coordenadas del centro de la circunferencia en la forma estándar de la ecuación de la circunferencia con $r = \sqrt{13}$ y $(h, k) = (6, 3)$. Así:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \Rightarrow$$
$$(x-6)^2+(y-3)^2=13$$

Ejemplo 7

Encontrar la ecuación de la circunferencia, sabiendo que $(-2,4)$ y $(1,-4)$ son los puntos extremos de un diámetro.

Solución

En este caso, también procedemos como en el ejemplo anterior.

Paso 1. Encontramos el centro de la circunferencia calculando el punto medio entre los dos extremos del diámetro:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-2+1}{2},\frac{4-4}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

Así que:

$$(h,k)=\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

Paso 2. Ahora, para hallar el radio calculamos la distancia que hay desde el centro de la circunferencia a uno de los puntos extremos del diámetro:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2+(4-0)^2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+16}=\sqrt{\frac{73}{4}}$$

Así:

$$r=\sqrt{\frac{73}{4}}$$

Paso 3. En este punto, sustituimos los valores de r y (h, k) en la forma estándar de la ecuación de la circunferencia:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \Rightarrow$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{73}{4}$$

Ejemplo 8

Encontrar la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $A(1, 4)$, $B(-2, 2)$ y $C(-3, 0)$ y construir un bosquejo de su gráfica.

Solución

Como se puede observar en el planteamiento de este problema, en este caso tenemos tres incógnitas que son las coordenadas del centro de la circunferencia (h, k) y el radio de la circunferencia r, así que debemos tener tres ecuaciones para encontrar la solución.

Como sabemos, cada uno de los puntos dados está en el círculo, por tanto, estos deben satisfacer la forma estándar de la ecuación de la circunferencia:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Por consiguiente,

$$(1-h)^2+(4-k)^2=r^2 \ldots(1)$$

$$(-2-h)^2+(2-k)^2=r^2 \ldots(2)$$

$$(-3-h)^2+(-k)^2=r^2 \ldots(3)$$

Ahora, combinamos las ecuaciones 1 y 2 y al desarrollar, obtenemos:

$$(1-h)^2+(4-k)^2=(-2-h)^2+(2-k)^2$$

$$1-2h+h^2+16-8k+k^2=4+4h+h^2+4-4k+k^2$$

$$-2h-8k-4h+4k=4+4-1-16$$

$$-6h-4k=-9$$

Del mismo modo, al combinar las ecuaciones 1 y 3 y al desarrollar, obtenemos:

$$(1-h)^2+(4-k)^2=(-3-h)^2+(-k)^2$$
$$1-2h+h^2+16-8k+k^2=9+6h+h^2+k^2$$
$$-2h-6h-8k=9-1-16$$
$$-8h-8k=-8$$

Ahora, resolvemos el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (capítulo 2):

$$-6h-4k=-9$$
$$-8h-8k=-8$$

Así, obtenemos:

$$(h,k)=(2.5,-1.5)$$

Ahora, para hallar r, sustituimos estos valores en cualquiera de las ecuaciones 1, 2 o 3. Por ejemplo, aquí sustituimos en la ecuación 3, que es la más sencilla, y obtenemos:

$$r^2=(-3-2.5)^2+(1.5)^2=32.5$$

Así que:

$$r=\sqrt{32.5}$$

Nota: Se deja como ejercicio al lector sustituir los valores de (h,k) en las ecuaciones 1 y 2 y verificar que se obtiene el mismo radio.

Por tanto, la ecuación de la circunferencia que estamos buscando es:

$$(x-2.5)^2+(y+1.5)^2=32.5$$

Su gráfica se muestra en la figura 7.4.

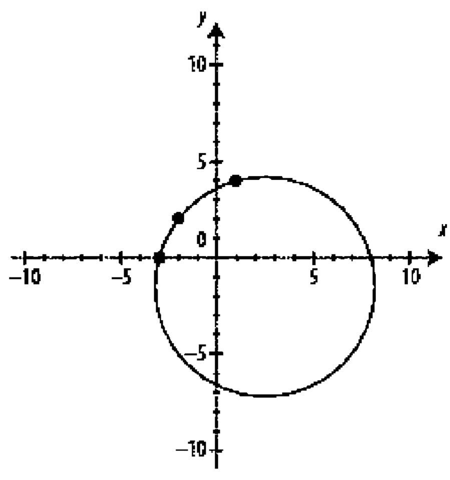


Figura 7.4 Gráfica de la circunferencia $(x-2.5)^2+(y+1.5)^2=32.5$.

Ejemplo 9

Encontrar la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $A(0, 3)$, $B(2, 0)$ y $C(-2, -2)$, y realizar un bosquejo de su gráfica.

Solución

Como en el ejemplo anterior, cada uno de los puntos dados debe satisfacer la forma estándar de la ecuación de la circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. De esta manera, podemos establecer tres ecuaciones para poder encontrar las tres incógnitas, r y (h, k). Por tanto,

$$(0-h)^2+(3-k)^2=r^2 \ldots(1)$$
$$(2-h)^2+(0-k)^2=r^2 \ldots(2)$$
$$(-2-h)^2+(-2-k)^2=r^2 \ldots(3)$$

Ahora, combinamos las ecuaciones 1 y 2, y al desarrollar, obtenemos:

$$(0-h)^2+(3-k)^2=(2-h)^2+(0-k)^2$$
$$h^2+9-6k+k^2=4-4h+h^2+k^2$$
$$4h-6k=4-9$$
$$4h-6k=-5$$

Del mismo modo, combinamos las ecuaciones 1 y 3, y al desarrollar obtenemos:

$$(0-h)^2+(3-k)^2=(-2-h)^2+(-2-k)^2$$
$$h^2+9-6k+k^2=4+4h+h^2+4+4k+k^2$$
$$-4h-6k-4k=4+4-9$$
$$-4h-10k=-1$$

Ahora, resolvemos el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que resultaron, usando alguno de los métodos vistos en el capítulo 2:

$$4h-6k=-5$$
$$-4h-10k=-1$$

Así, obtenemos:

$$(h,k)=\left(-\frac{11}{16},\frac{6}{16}\right)$$

Para hallar r, sustituimos estos valores en cualquiera de las ecuaciones 1, 2 o 3. Por ejemplo, en este caso sustituimos en la ecuación 1 y obtenemos:

$$r^2=\left(0+\frac{11}{16}\right)^2+\left(3-\frac{6}{16}\right)^2=\frac{1885}{256}\approx 7.363$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia que buscamos es:

$$\left(x+\frac{11}{16}\right)^2+\left(y-\frac{6}{16}\right)^2=7.363$$

Mientras que su gráfica se muestra en la figura 7.5:

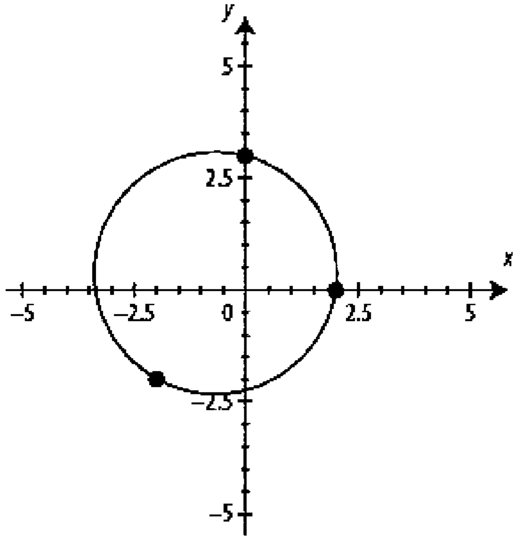


Figura 7.5 Gráfica de la circunferencia $\left(x+\frac{11}{16}\right)^2+\left(y-\frac{6}{16}\right)^2=7.363$.

Ejemplo 10

Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $(2, -3)$ y que pasa por el punto $(1, 4)$.

Solución

Como en este caso ya conocemos el centro de la circunferencia, solo debemos encontrar su radio, que es la distancia que hay del centro de la circunferencia al punto dado. Así que a partir de la forma estándar de la ecuación de la circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, tenemos que:

$$r^2=(1-2)^2+(4+3)^2=1+49=50$$

Así:

$$r=\sqrt{50}$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia que buscamos es:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=50$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 a 6 encuentra el radio r y el centro (h, k) de las circunferencias dadas.

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 49$
3. $x^2 + (y - 1)^2 = 81$
4. $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 10$
5. $(x+4)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=20$
6. $(x + 6)^2 + y^2 = 100$

En los ejercicios 7 a 12 determina la ecuación de la circunferencia con el radio y centro dados.

7. $r = 5, (h, k) = (-2, 3)$
8. $r = 1, (h, k) = (0, 0)$
9. $r = 7, (h, k) = (-2, -2)$
10. $r = 2\sqrt{2}, (h, k) = (3, -4)$
11. $r = \sqrt{40}, (h, k) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$
12. $r = 4, (h, k) = (0, 8)$

En los ejercicios 13 a 18 encuentra el centro y la circunferencia correspondientes a la ecuación dada.

13. $x^2 + y^2 - 3x + 6y = \frac{3}{4}$
14. $x^2 + y^2 + 4x - 14y = -47$
15. $x^2 + y^2 - 5x - 5y - \frac{15}{2} = 0$
16. $x^2 + y^2 + 16x - 20y + 152 = 0$
17. $x^2 + y^2 - 6x + 10y = -20$
18. $x^2 + y^2 + 16x - 4y + 64 = 0$

En los ejercicios 19 a 24 determina la ecuación de la circunferencia, sabiendo que los puntos dados son puntos extremos de un diámetro.

19. $(2, 2)$ y $(8, 2)$
20. $(-1, -3)$ y $(2, 1)$

- **21.** $(-3, 0)$ y $(-3, -8)$
- **22.** $(-3, 3)$ y $(1, -2)$
- **23.** $(1, 6)$ y $(2, -4)$
- **24.** $(-6, 2)$ y $(3, -1)$

En los ejercicios 25 a 28 encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos dados y construye un bosquejo de su gráfica.

- **25.** $(1, 0)$, $(0, 2)$ y $(-1, 1)$.
- **26.** $(2, 1)$, $(1, -3)$ y $(-1, -1)$.
- **27.** $(1, 0)$, $(0, -3)$ y $(-6\ -2)$.

En los ejercicios 28 a 33 encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en (h,k) que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$, si:

- **28.** $(h, k) = (1, 1)$ y $P_1(x_1, y_1) = (3, 1)$
- **29.** $(h, k) = (-2, 4)$ y $P_1(x_1, y_1) = (1, 5)$
- **30.** $(h, k) = (0, -3)$ y $P_1(x_1, y_1) = (2, -6)$
- **31.** $(h, k) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y $P_1(x_1, y_1) = (-1, -2)$
- **32.** $(h, k) = (4, -1)$ y $P_1(x_1, y_1) = (-2, 5)$
- **33.** $(h, k) = (2, 0)$ y $P_1(x_1, y_1) = (7, 3)$

7.2 Parábola

En esta sección se estudian las cónicas con la parábola, la cual constituye una curva que tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, cuando se lanza un objeto al aire y cae en caída libre, la trayectoria que describe el objeto en su movimiento es una parábola (ignorando la resistencia del aire).

De esta forma, la parábola se define como el *lugar geométrico* de todos los puntos, P, que tienen la misma distancia a un punto fijo dado, F, y a una recta dada, L; esto es, tales que $PF = PD$, donde PF es la distancia de P a F. Al punto dado F se le llama foco de la parábola, en tanto PD es la distancia del punto, P, a la recta dada, L, llamada directriz. La línea que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se llama eje de la parábola (o eje de simetría) y al punto que está a la mitad, entre la directriz y el foco, se le conoce como vértice de la parábola.

Cuando el eje de una parábola es paralelo a alguno de los ejes coordenados, se dice que tiene una *orientación estándar*. Pero si además el vértice de la parábola está en el origen, se dice que la parábola está en *posición estándar*: abierta hacia arriba, abierta hacia abajo, abierta a la derecha o abierta hacia la izquierda.

A continuación se muestran las fórmulas que definen a las parábolas en su posición estándar, así como sus gráficas.

Parábolas en posición estándar

Parábola abierta hacia la derecha

Vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(p, 0)$; directriz: recta $x = -p$; ecuación: $y^2 = 4px$. La figura 7.6 muestra la gráfica de una parábola en posición estándar abierta hacia la derecha. En este caso, por sencillez, se ha tomado en la figura $p = 1$, donde la cantidad $4p$ se conoce como el lado recto de la parábola y corresponde a la longitud del segmento que une dos puntos opuestos de la parábola a lo largo de una recta perpendicular al eje de simetría y que pasa por el foco.

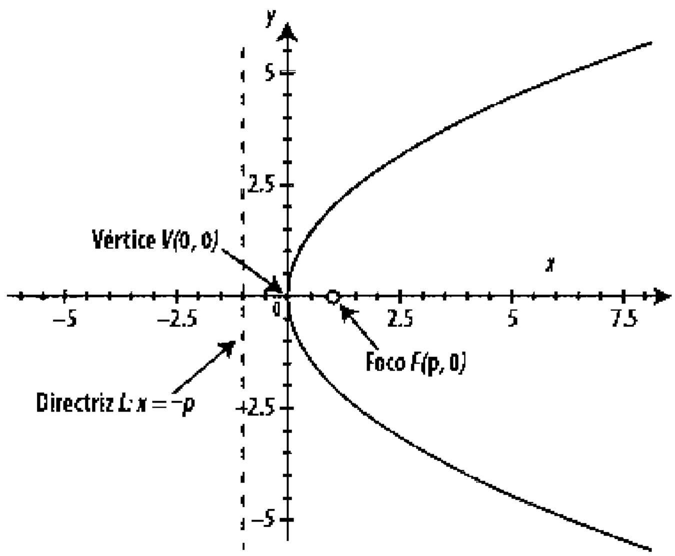


Figura 7.6. Parábola en posición estándar abierta hacia la derecha con $p = 1$. Vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(1, 0)$. Ecuación $y^2 = 4px$.

Parábola abierta hacia la izquierda

Vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(-p, 0)$; directriz: $x = p$; ecuación: $y^2 = -4px$. La figura 7.7 muestra la gráfica de una parábola en posición estándar abierta hacia la izquierda, para la cual $p = 1$.

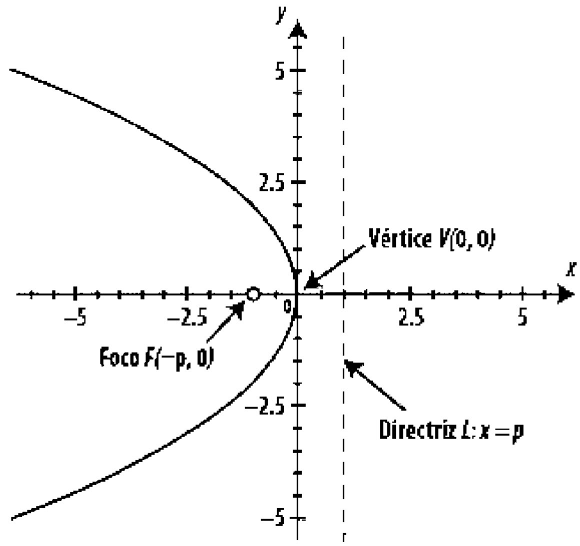


Figura 7.7 Parábola en posición estándar abierta hacia la izquierda con $p = 1$; vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(-1, 0)$; ecuación: $y^2 = -4px$.

Parábola abierta hacia arriba

Vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(0, p)$; directriz: $y = -p$; ecuación: $x^2 = 4py$. La figura 7.8 muestra la gráfica de una parábola en posición estándar abierta hacia arriba, para la cual $p = 1$. Esto es, el foco se encuentra en el punto $F(0, 1)$.

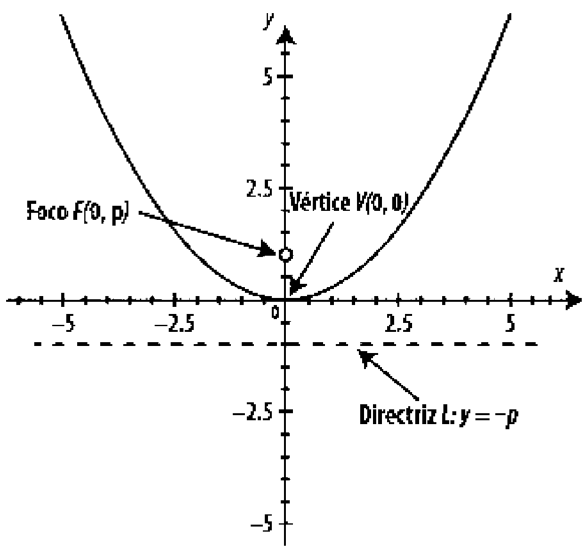


Figura 7.8 Parábola en posición estándar abierta hacia arriba con $p = 1$. Vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(0, 1)$; ecuación: $x^2 = 4py$.

Parábola abierta hacia abajo

Vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(0, -p)$; directriz: $y = p$; ecuación: $x^2 = -4py$. La figura 7.9 muestra la gráfica de una parábola en posición estándar abierta hacia abajo, para la cual $p = 1$. Esto es, el foco se encuentra en el punto $F(0, -1)$.

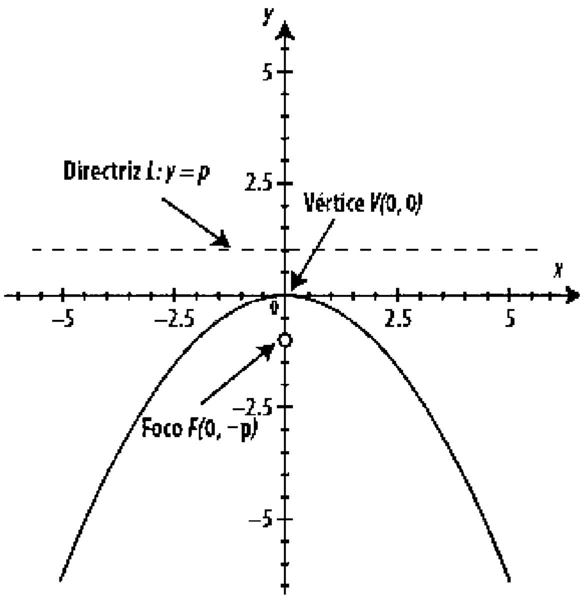


Figura 7.9 Parábola en posición estándar abierta hacia abajo con $p = 1$. Vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(0, -1)$; ecuación: $x^2 = -4py$.

Parábolas con orientación estándar

Como se comentó en el capítulo 3, cuando se reemplaza x por $x - h$ se tiene el efecto de desplazar la gráfica de una ecuación en $|h|$ unidades; a la derecha si h es positiva y a la izquierda si h es negativa. Asimismo, si se reemplaza y por $y - k$ se tiene el efecto de desplazar la gráfica en $|k|$ unidades; hacia arriba si k es positiva o hacia abajo si k es negativa. Así que las ecuaciones y las características de parábolas con orientación estándar, aunque no necesariamente en posición estándar, son las siguientes:

Parábola abierta a la derecha

Vértice: $V(h, k)$; foco: $F(h + p, k)$; directriz: $x = h - p$; ecuación: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

Parábola abierta a la izquierda

Vértice: $V(h, k)$; foco: $F(h - p, k)$; directriz: $x = h + p$; ecuación: $(y - k)^2 = -4p(x - h)$.

Parábola abierta hacia arriba

Vértice: $V(h, k)$; foco: $F(h, k + p)$; directriz: $y = k - p$; ecuación: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

Parábola abierta hacia abajo

Vértice: $V(h, k)$; foco: $F(h, k - p)$; directriz: $y = k + p$; ecuación: $(x - h)^2 = -4p(y - k)$.

Ejemplo 11

Encontrar la ecuación en su forma estándar de una parábola que se abre hacia la derecha, con foco en $F(p, 0)$, vértice en el origen $V(0, 0)$ y directriz dada por la recta $x = -p$.

Solución

La parábola se define por el conjunto de puntos del plano cartesiano que cumplen con la condición de que su distancia al foco es igual a su distancia a la directriz; es decir, $PF = PD$. Entonces, sea $P(x, y)$ un punto arbitrario en la parábola con coordenadas (x, y). Por tanto, calculamos la distancia del punto $P(x, y)$ al foco $F(p, 0)$, PF, usando la fórmula de la distancia entre dos puntos: $PF = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$. Por otro lado, los puntos P' en la directriz tienen coordenadas de la forma $(-p, y)$, así que la distancia (perpendicular) de $P(x, y)$ a la directriz es: $PD = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$. Así que por la definición de parábola tenemos:

$$PF = PD \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x-p)^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$$y^2 = 4xp$$

Ejemplo 12

Dada la parábola $y^2 = 20x$, encontrar el foco, el vértice, la directriz, su eje de simetría y esbozar su gráfica.

Solución

La ecuación de la parábola está en su forma estándar: $y^2 = 4px$, así que $4p = 20$ y, por tanto, $p = 5$. Entonces, decimos que la parábola está en posición estándar y se abre hacia la derecha, con vértice $V(0, 0)$, foco $F(5, 0)$, directriz dada por la recta $x = -5$ y el eje de simetría es el eje x; es decir, la recta $y = 0$. De esta forma, la gráfica de la parábola se muestra en la figura 7.10.

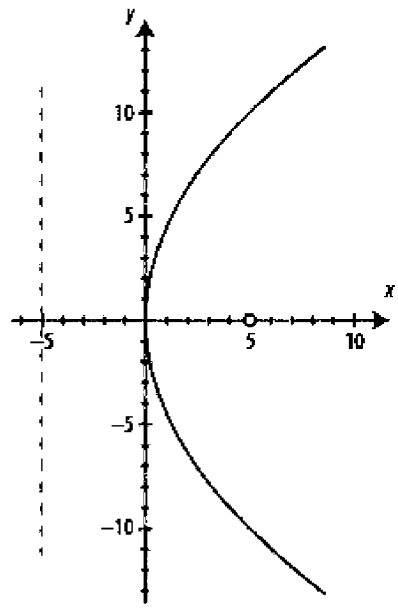


Figura 7.10 Gráfica de la parábola $y^2 = 20x$. En esta se observa que $V(0, 0)$ y $F(5, 0)$.

Ejemplo 13

Encontrar el foco, el vértice, la directriz y el eje de simetría de la parábola $x^2 = -8y$; asimismo, esbozar una gráfica de la parábola en cuestión.

Solución

La ecuación de la parábola ya está en su forma estándar: $x^2 = -4py$, así que $4p = 8$ y, por tanto, $p = 2$. Entonces, la parábola está en posición estándar y se abre hacia abajo, con vértice $V(0, 0)$, foco $F(0, -2)$ y directriz dada por la recta $y = 2$. El eje de simetría de la parábola es el eje y, es decir, la recta $x = 0$. Su gráfica se muestra en la figura 7.11.

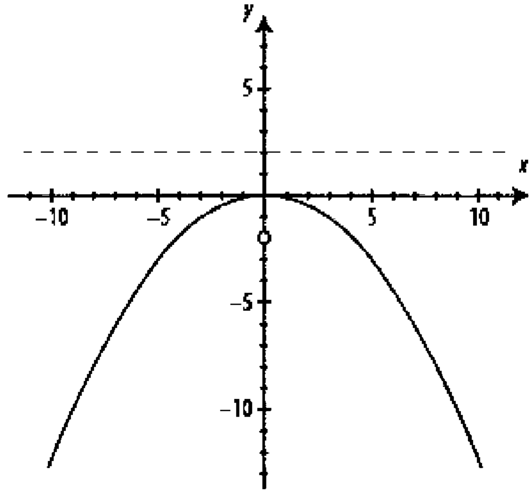


Figura 7.11 Gráfica de la parábola $x^2 = -8y$, con vértice en $V(0, 0)$ y foco en $F(0, -2)$.

Ejemplo 14

Mostrar que la ecuación $y^2 - 2y - 8x - 15 = 0$ es una parábola y encontrar el foco, el vértice, la directriz y su eje de simetría; asimismo, construir la gráfica de esta parábola.

Solución

Primero tenemos que completar los cuadrados en y:

$$y^2 - 2y - 8x - 15 = 0$$

Luego, separamos los términos en x y en y:

$$y^2 - 2y = 8x + 15$$

Para completar el cuadrado, tomamos el coeficiente que multiplica a y, en este caso -2, lo dividimos entre 2 y lo elevamos al cuadrado:

$$\left(-\frac{2}{2}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

Enseguida, sumamos este valor en ambos lados de la ecuación y nos queda:

$$y^2 - 2y + 1 = 8x + 15 + 1$$

Esta se puede reescribir como:

$$(y - 1)^2 = 8x + 16$$

$$(y - 1)^2 = 8(x + 2)$$

Como podemos observar, esta es una parábola que se abre a la derecha; cuyo lado recto es $4p = 8$, así que $p = 2$. En tanto, su vértice se localiza en $V(h, k) = (-2, 1)$ y su foco se localiza en $F(h + p, k) = (0, 1)$; su directriz es la recta $x = h - p = -4$; su eje de simetría es la recta $y = 1$ y su gráfica se muestra en la figura 7.12.

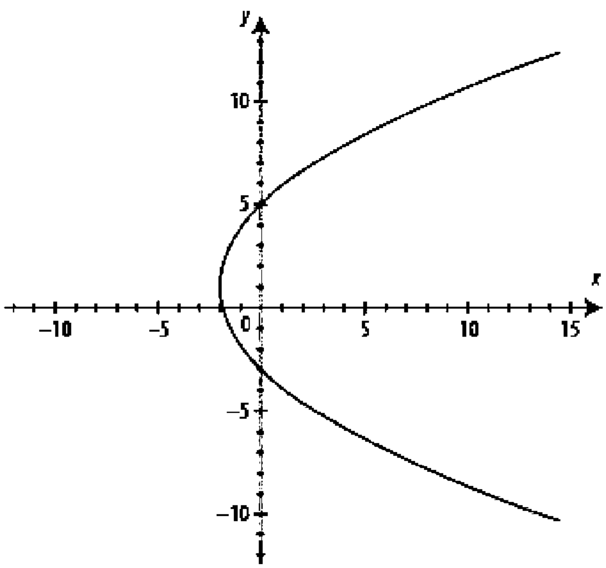


Figura 7.12 Gráfica de la parábola $(y - 1)^2 = 8(x + 2)$.

Ejemplo 15

Mostrar que la ecuación $x^2 - 4x - 16y + 52 = 0$ es una parábola y encontrar el foco, el vértice, la directriz y su eje de simetría; asimismo, elaborar la gráfica de esta parábola.

Solución

Como en el ejemplo anterior, lo primero que debemos hacer es completar cuadrados en x:

$$x^2 - 4x - 16y + 52 = 0$$

$$x^2 - 4x = 16y - 52$$

$$x^2 - 4x + 4 = 16y - 52 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 16y - 48$$

$$(x - 2)^2 = 16(y - 3)$$

Así, tenemos una parábola que se abre hacia arriba, con vértice en $V(2, 3)$, lado recto $4p = 16$, lo cual implica que $p = 4$, así que el foco está en $F(h, k + p) = (2, 3 + 4) = (2, 7)$. La directriz es, por tanto, la recta $y = k - p = 3 - 4 = -1$ y su eje de simetría es la recta $x = 2$. La figura 7.13 muestra la gráfica de la parábola.

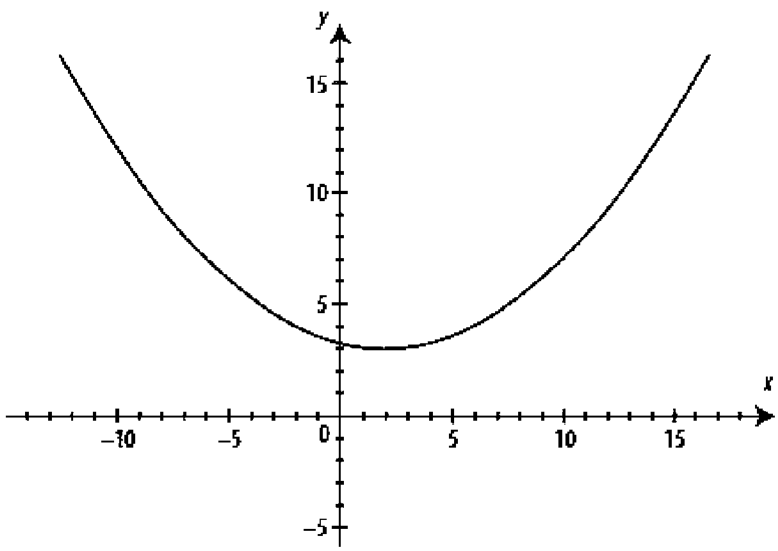


Figura 7.13 Gráfica de la parábola $(x - 2)^2 = 16(y - 3)$.

Ejemplo 16

Encontrar el vértice, el foco y el lado recto de la parábola $x^2 + 4x + 4y - 12 = 0$ y construir su gráfica.

Solución

Al igual que en los ejemplos anteriores, primero completamos cuadrados en x para llevar la ecuación dada a la forma estándar de la parábola:

$$x^2 + 4x + 4y - 12 = 0$$

$$x^2 + 4x = -4y + 12$$

$$x^2 + 4x + 4 = -4y + 12 + 4$$

$$(x + 2)^2 = -4y + 16$$

$$(x + 2)^2 = -4(y - 4)$$

De la ecuación anterior, concluimos que tenemos una parábola que se abre hacia abajo, con lado recto $4p = 4$. Así que $p = 1$; vértice en $V(h, k) = (-2, 4)$ y foco en $F(h, k - p) = (-2, 4 - 1) = (-2, 3)$. La figura 7.14 muestra la gráfica de esta parábola.

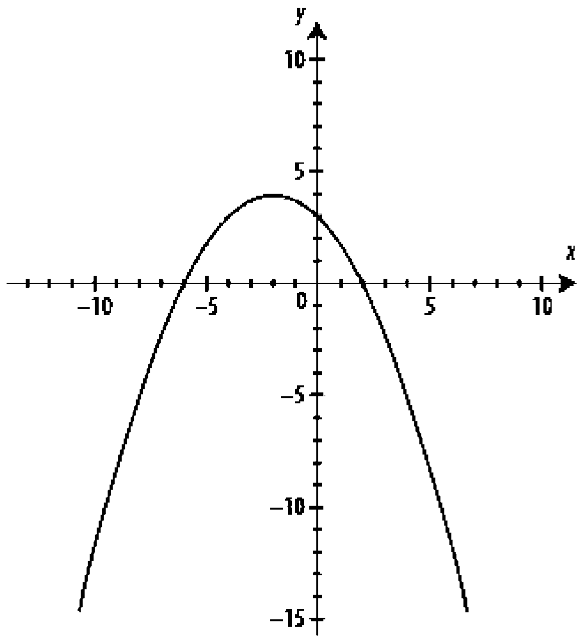


Figura 7.14 Gráfica de la parábola $(x + 2)^2 = -4(y - 4)$.

Ejemplo 17

Encontrar la ecuación de la parábola en posición estándar con foco $F(3, 0)$ y directriz $x = -3$.

Solución

En este caso, tenemos una parábola en posición estándar con foco sobre el eje positivo de las x; debido a que el foco se localiza en $F(p, 0)$ tenemos que $p = 3$. Por otro lado, la directriz es una recta paralela al eje de las y a la izquierda del origen, por lo que la parábola se abre hacia la derecha, y su ecuación es de la forma $y^2 = 4px$. Así, sustituyendo $p = 3$, tenemos que $y^2 = 12x$.

Ejemplo 18

Encontrar la ecuación de la parábola en posición estándar con foco $F(0, -4)$ y directriz $y = 4$.

Solución

En este ejemplo tenemos una parábola en posición estándar con foco sobre el eje negativo de las y; como la directriz es una recta paralela al eje x por arriba del origen, entonces la parábola se abre hacia abajo, y el foco está localizado en $F(0, -p)$; por tanto $p = 4$. Como la parábola se abre hacia abajo, su ecuación es de la forma $x^2 = -4py$, así que $x^2 = -16y$.

Ejemplo 19

Encontrar la ecuación de la parábola con orientación estándar, foco en $F(2, 3)$ y directriz dada por el eje y.

Solución

Como sabemos, podemos encontrar la ecuación de la parábola sustituyendo directamente en la definición de la parábola: $PF = PD$. Sin embargo, una manera más práctica es notando que el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz; en este caso, como el foco está en $F(2, 3)$ y la directriz es el eje y, tenemos que el vértice está en $V(1, 3)$. Dado que el foco está a la derecha de la directriz, la parábola se abre hacia la derecha y tiene una ecuación de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, donde $V(h, k) = (1, 3)$. La distancia del vértice $V(1, 3)$ al foco $F(2, 3)$ es 1, y este es el valor de p, así que $p = 1$. Al sustituir en la forma estándar tenemos que:

$$(y - 3)^2 = 4(x - 1)$$

Ejemplo 20

Encontrar la ecuación de la parábola con orientación estándar, foco en $F(-3, -3)$ y directriz dada por eje x.

Solución

Como en el ejemplo anterior, en este caso notamos que la directriz es el eje x, así que es posible que la parábola se abra hacia arriba o hacia abajo. Debido a que el foco está *debajo* de la directriz, entonces la parábola se abre hacia abajo y es de la forma $(x - h)^2 = -4p(y - k)$; en tanto, la distancia entre el foco $F(-3, -3)$ y la directriz es de 3 unidades. Como el vértice está a la mitad entre el foco y la directriz, tenemos que las coordenadas del vértice son:

$$V\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$$

Por último, la distancia entre el foco y el vértice es igual a p, así que $p = \frac{3}{2}$. Al sustituir estos valores en la ecuación estándar de la parábola tenemos que:

$$(x+3)^2 = -6\left(y+\frac{3}{2}\right)$$

Ejemplo 21

Dada la parábola $x^2 = -10y$, encontrar el foco, la directriz, el vértice y el eje de simetría, y construir un esbozo de su gráfica.

Solución

En este caso, la ecuación de la parábola es de la forma $x^2 = -4py$ con $4p = 10$; así, tenemos que:

$$p = \frac{5}{2}$$

Dado que la parábola está en posición estándar con vértice en $V(0, 0)$, se abre hacia abajo y tiene su foco en $P = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$. La directriz es la recta: $y = \frac{2}{5}$ y el eje de simetría es el eje y; es decir, la recta $x = 0$. La gráfica de la parábola se muestra en la figura 7.15.

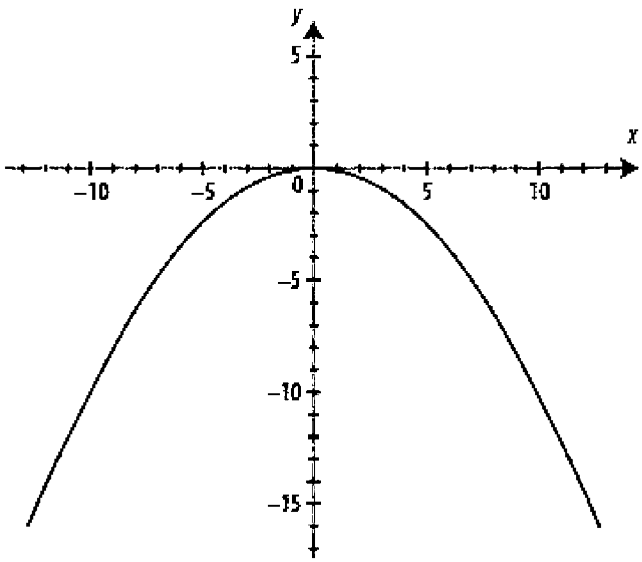


Figura 7.15 Gráfica de la parábola $x^2 = -10y$.

Ejemplo 22

Dada la parábola $x^2 + 8x + 6y - 2 = 0$, determinar su vértice, foco, directriz, eje de simetría y construir un esbozo de su gráfica.

Solución

Como en los ejemplos anteriores, en este caso completamos cuadrados en x:

$$x^2 + 8x + 6y - 2 = 0$$
$$x^2 + 8x = -6y + 2$$
$$x^2 + 8x + 16 = -6y + 2 + 16$$
$$(x + 4)^2 = -6y + 18$$
$$(x + 4)^2 = -6(y - 3).$$

Al comparar con la forma estándar $(x - h)^2 = -4p(y - k)$, vemos que el vértice está en $V(h,k) = (-4,3), 4p = 6 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$. Esto significa que la parábola se abre hacia abajo, que su foco está en $F(h, k - p) = \left(-4, \frac{3}{2}\right)$ y que la directriz está por arriba del vértice y está dada por la ecuación $y = k + p = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. Como la parábola se abre hacia abajo, su eje de simetría es paralelo al eje y, y pasa por el foco, así que está dado por la recta $x = -4$. La figura 7.16 muestra un esbozo de su gráfica.

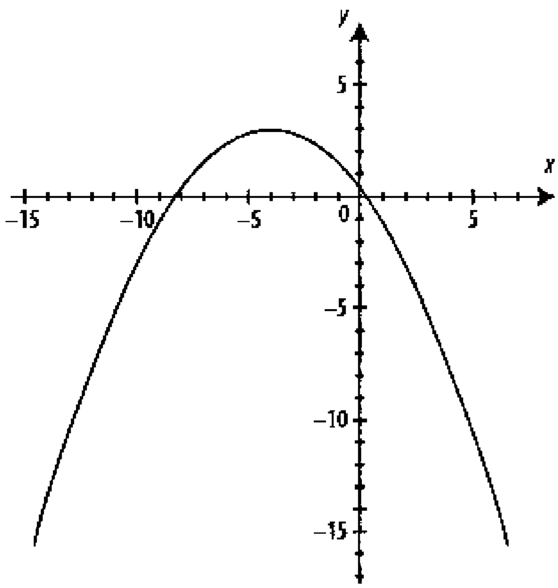


Figura 7.16 Gráfica de la parábola $(x + 4)^2 = -6(y - 3)$.

Ejemplo 23

Encontrar la ecuación de la parábola en orientación estándar con foco en $F(1, -2)$ y directriz $x = 5$, y construir un esbozo de la gráfica de la parábola, en la que se incluya su directriz.

Solución

Dado que la directriz es paralela al eje y, y que está a la derecha del foco, tenemos que la parábola se abre hacia la izquierda. En este caso, la distancia entre el foco y la directriz son 4 unidades; como esta distancia corresponde a $2p$, entonces $2p = 4 \Rightarrow p = 2$. Puesto que el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz, el vértice está localizado en $V(1 + 2, -2) = (3, -2)$. Si lo comparamos con la forma estándar de la ecuación de una parábola con orientación estándar que se abre hacia la izquierda, $(y - k)^2 = -4p(x - h)$, la ecuación que estamos buscando es $(y + 2)^2 = -8(x - 3)$. La figura 7.17 muestra un esbozo de la gráfica de la parábola incluyendo su directriz.

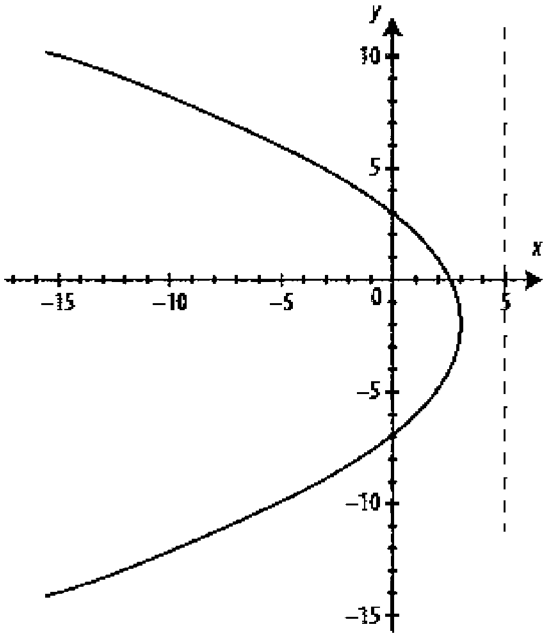


Figura 7.17 Gráfica de la parábola $(y + 2)^2 = -8(x - 3)$.

Aplicaciones de las parábolas

Las parábolas tienen diversas aplicaciones en la vida diaria; por ejemplo, en los faros de un automóvil, en las antenas parabólicas de recepción de televisión vía satélite o en el diseño de los espejos de los telescopios. Cuando una parábola se hace girar en torno a su eje principal, se obtiene un *paraboloide de revolución*.

Una parábola (y, por tanto, un paraboloide de revolución) tiene la propiedad de que los rayos que inciden paralelos a su eje convergen en el foco de la parábola. De manera alternativa, los rayos que emergen del foco e inciden en la parábola salen paralelos al eje de la parábola. Esto se representa en las siguientes figuras.

Rayos incidentes paralelos al eje de la parábola convergen en el foco

Esta propiedad se usa, por ejemplo, en las antenas de recepción de televisión vía satélite, en las cuales la señal que se recibe del satélite consiste en ondas electromagnéticas que inciden, viajando paralelas, al eje de la parábola y, por tanto, convergen en el foco donde se ubica el receptor que luego amplifica y procesa la señal. Este principio también se usa en los espejos de los telescopios y los radiotelescopios.

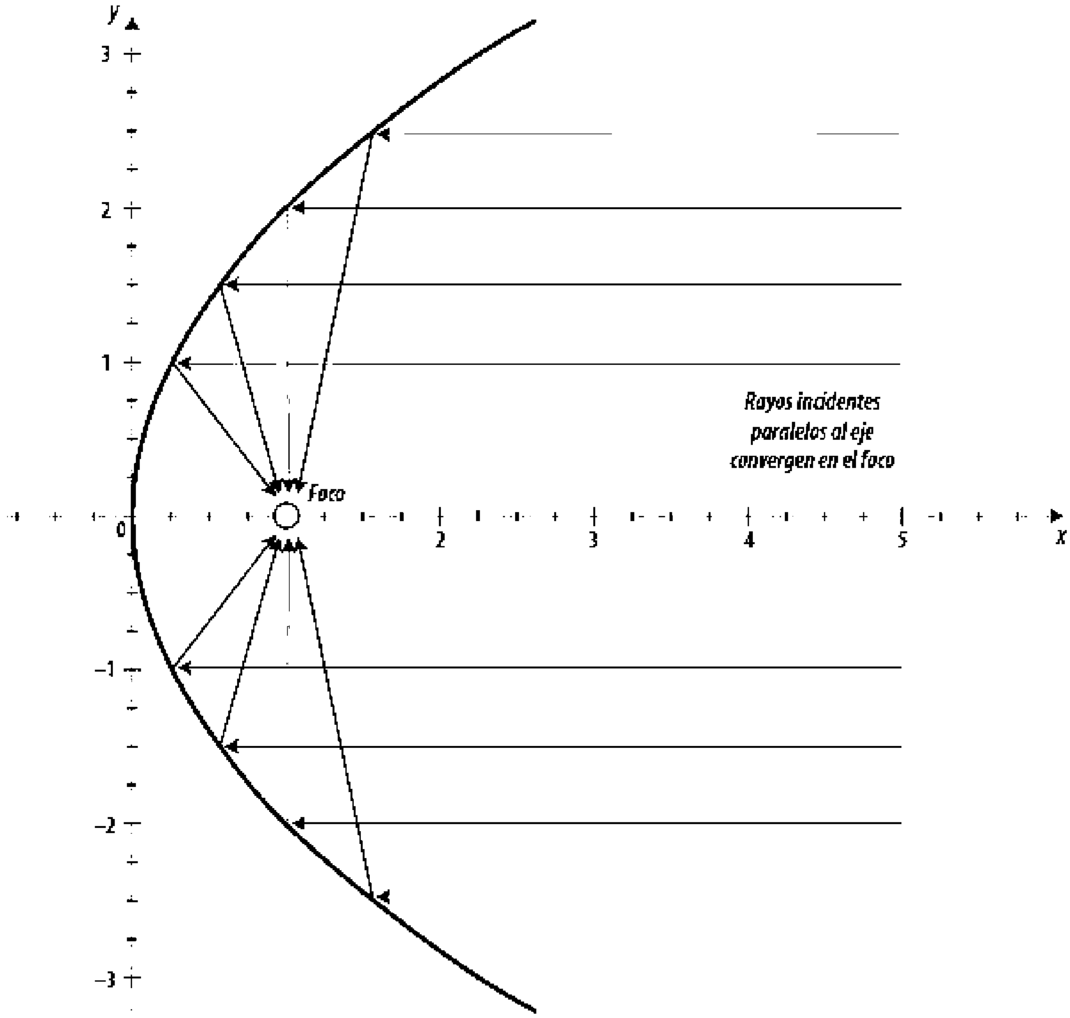


Figura 7.18 Rayos incidentes paralelos al eje de la parábola convergen en el foco.

Rayos que emergen del foco que se reflejan en la parábola salen paralelos al eje de simetría

Esta propiedad se usa, por ejemplo, en los faros de los automóviles o en las lámparas que tienen forma interna de paraboloide de revolución y la fuente emisora, un foco o un *LED,* se ubica en el foco de la parábola, de tal suerte que cuando el foco emite rayos de luz, estos inciden sobre la parábola y se reflejan de modo que salen paralelos al eje de la parábola, con lo cual se hace más eficiente el alumbramiento.

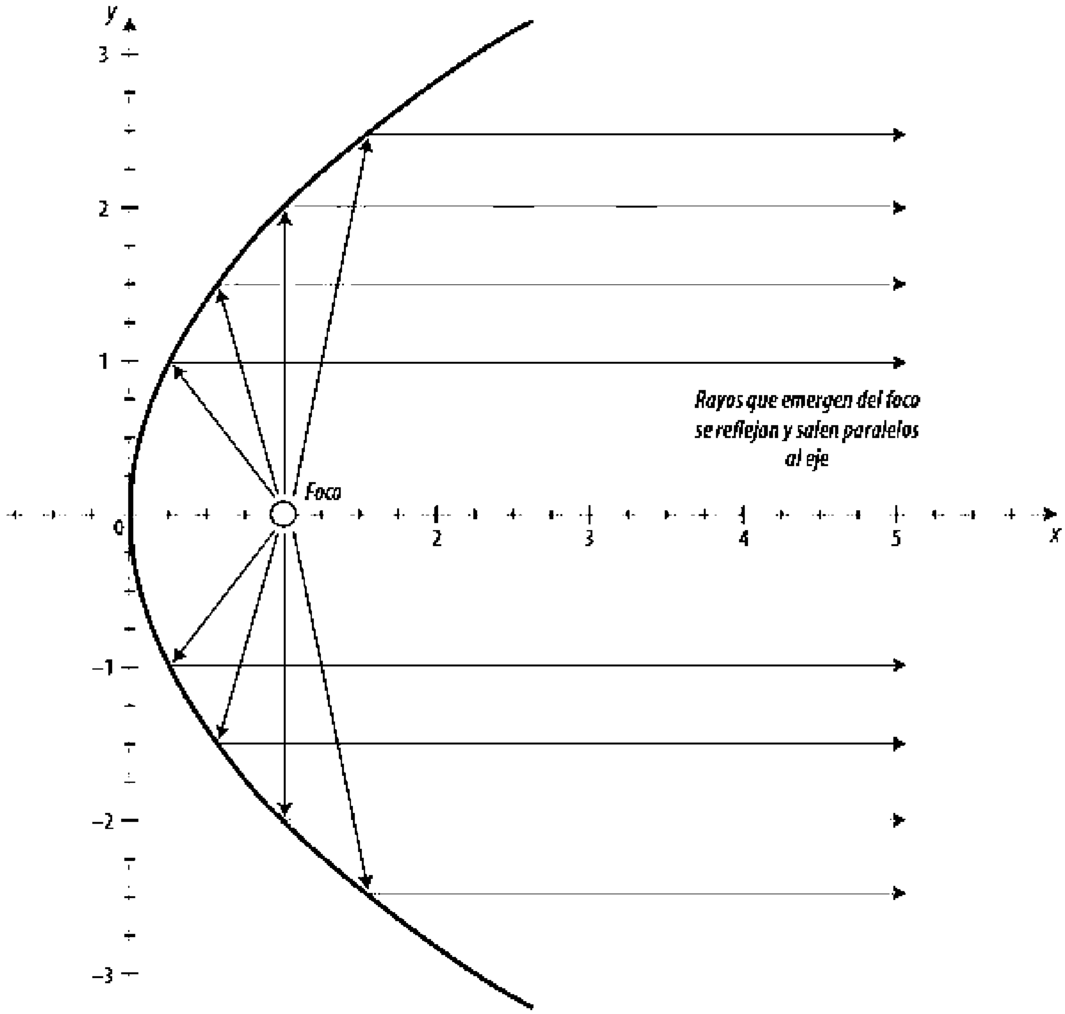


Figura 7.19 Rayos que emergen del foco que se reflejan en la parábola y salen paralelos al eje de simetría.

Otra aplicación importante de las parábolas en la vida cotidiana es cuando se lanza un objeto cerca de la superficie de la Tierra, donde la trayectoria que describe el objeto se puede aproximar a una parábola cuando se ignoran los efectos del aire. Esto permite hacer predicciones en muchos deportes, como, por ejemplo, en el futbol o el basquetbol.

Ejercicios propuestos

34. Muestra que la ecuación de una parábola en posición estándar que se abre hacia abajo con vértice $V(0, 0)$, foco $F(0, -p)$ y directriz $y = p$, es $x^2 = -4py$.

35. Muestra que la ecuación de una parábola en orientación estándar que se abre hacia arriba con directriz $y = p$, foco en $F(h, k + p)$ y vértice en $V(h, k)$ es $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

En los ejercicios 36 a 43, encuentra el foco, el vértice, la directriz y el eje de simetría, y construye un esbozo de la gráfica de las parábolas correspondientes.

36. $y^2 = 12x$

37. $x^2 = -2y$

38. $x^2 = 8(y - 1)$

39. $y^2 = -12(x + 4)$

40. $(x + 3)^2 = 20y$

41. $y^2 - 14y - 10x + 29 = 0$

42. $y^2 + 6y + 8x - 23 = 0$

43. $x^2 - 12x + 4y + 28 = 0$

44. Muestra que $y^2 - 8x + 2y + 9 = 0$ es la ecuación de una parábola; encuentra el foco, el vértice, la directriz y el eje de simetría de esta.

45. Muestra que $x^2 + 2x + 6y - 11 = 0$ es la ecuación de una parábola; encuentra el foco, el vértice, la directriz y el eje de simetría de esta.

46. Encuentra el vértice, el foco, la directriz y el eje de simetría de la parábola $y^2 = 2(x - 8)$ y construye un esbozo de su gráfica.

47. Encuentra el vértice, el foco, la directriz y el eje de simetría de la parábola $(x + 2)^2 = 1(y - 5)$ y construye un esbozo de su gráfica.

48. Encuentra la ecuación de la parábola con orientación estándar, foco en $F(0, 2)$ y directriz dada por la recta $x = 4$, y construye un esbozo de su gráfica.

49. Encuentra la ecuación de la parábola con orientación estándar, foco en $F(0, 3)$ y directriz dada por la recta $y = 5$, y construye un esbozo de su gráfica.

50. Encuentra la ecuación de la parábola con orientación estándar, foco en $F(1, 0)$ y vértice en $V(1, -3)$, y construye un esbozo de su gráfica.

51. Encuentra la ecuación de la parábola en posición estándar y directriz $x = \frac{3}{2}$, y esboza la gráfica de la parábola.

52. Encuentra la ecuación de la parábola en posición estándar y directriz $y = 1$, y esboza la gráfica de la parábola.

53. Encuentra la ecuación de la parábola en orientación estándar, foco $F(-2, 5)$ y directriz $x = 3$, y esboza la gráfica de la parábola.

54. Encuentra la ecuación de la parábola en orientación estándar, foco $F\left(3, \frac{3}{2}\right)$ y directriz dada por el eje y, y esboza la gráfica de la parábola.

55. Encuentra la ecuación de la parábola con orientación estándar, foco $F(-6, 1)$ y directriz dada por la recta $y = -2$, y esboza la gráfica de la parábola.

56. Encuentra la ecuación de la parábola con orientación estándar, foco $F(-6, -2)$ y directriz dada por la recta $y = 4$.

57. Encuentra la ecuación de la parábola con orientación estándar, vértice $V(6, -3)$ y directriz dada por la recta $x = 11$. Escribe la ecuación en la forma estándar y en la forma general $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$; asimismo, realiza un esbozo de la gráfica.

58. Encuentra la ecuación de la parábola con orientación estándar, foco en $F(3, 2)$ y directriz $y = 4$. Escribe la ecuación en la forma general $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, y construye un esbozo de la gráfica de la parábola.

7.3 Elipse

En esta sección se estudia otra figura geométrica muy conocida e importante llamada elipse. La **elipse** se define como *el lugar geométrico* formado por todos los puntos P del plano cartesiano tales que la suma de las distancias de P a *dos* puntos fijos es una constante. Sean F_1 y F_2 estos dos puntos fijos, llamados **focos**; entonces, se tiene que la relación que define a la elipse es: $PF_1 + PF_2 = 2a$; donde a es una constante mayor que cero. De esta manera, la línea que pasa por los focos recibe el nombre de *eje focal* de la elipse, mientras que al punto medio entre los dos focos sobre el eje focal se le llama **centro** de la elipse. Por su parte, los puntos de la elipse que cruzan el eje focal se conocen como vértices; el segmento de recta que une a los dos vértices se llama eje mayor de la elipse, y el segmento de recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje mayor con puntos extremos sobre la elipse recibe el nombre eje menor de la elipse. La figura 7.20 muestra todos los elementos que conforman una elipse.

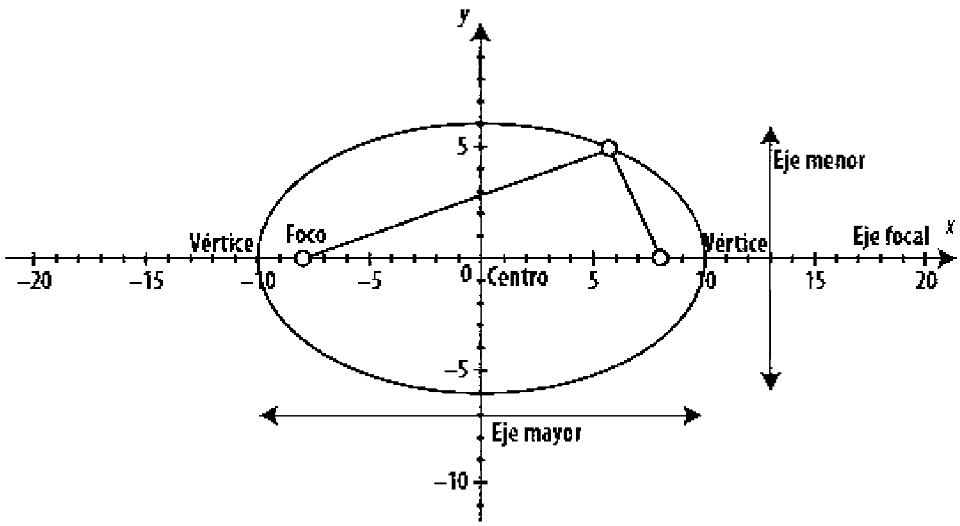


Figura 7.20 Elementos de una elipse.

En el ejemplo que se representa en la figura 7.20 se eligió el semieje mayor $a = 10$ y el semieje menor $b = 6$, tal que $c = 8$ (véase más adelante).

Se dice que una elipse está en *orientación estándar* si su eje focal es paralelo a uno de los ejes coordenados. Pero, si además de esto el centro de la elipse está en el origen, se dice que la elipse está en *posición estándar* y, por tanto, existen dos posibilidades: que los focos estén sobre el eje x o que estén sobre el eje y.

La distancia del centro a un vértice se denota con a y se llama *semieje mayor*; la distancia del centro a un punto de la elipse a lo largo del eje menor se denota con b y se llama *semieje menor*; la distancia del centro a uno de los focos se denota con la letra c.

Gráfica, ecuación y características de elipses en posición estándar

Focos sobre el eje x

Gráfica: véase la figura 7.21.

Ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, donde, $b^2 = a^2 - c^2$.

Obsérvese que $a > b$ y $a > c$.

Focos: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Vértices: $V_1(-a, 0)$, $V_2(a, 0)$.

Centro: $C(0, 0)$.

Directriz: Rectas $D_1: x=\frac{a^2}{c}$ y $D_2: x=\frac{-a^2}{c}$.

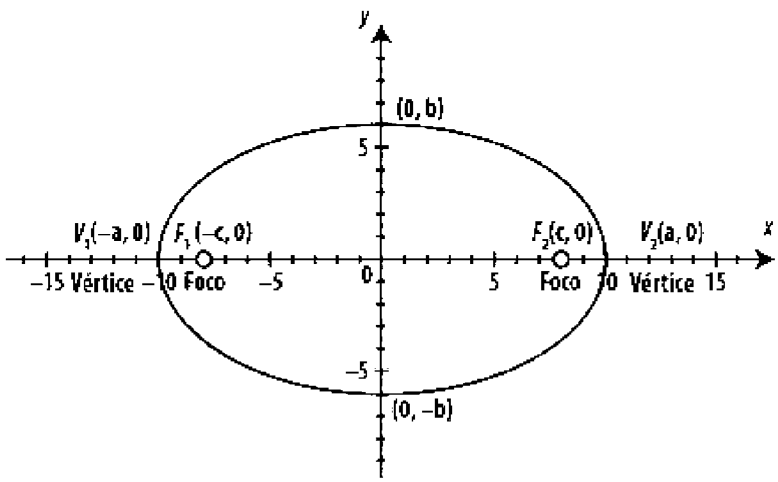


Figura 7.21 Elipse horizontal en posición estándar con focos sobre el eje x.

Focos sobre el eje y

Gráfica: véase la figura 7.22.

Ecuación: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$.

Obsérvese que $a > b$ y $a > c$.

Focos: $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$.

Vértices: $V_1(0, -a)$, $V_2(0, a)$.

Centro: $C(0, 0)$.

Directriz: Rectas $D_1 : y = \frac{a^2}{c}$; $D_2 : y = \frac{-a^2}{c}$.

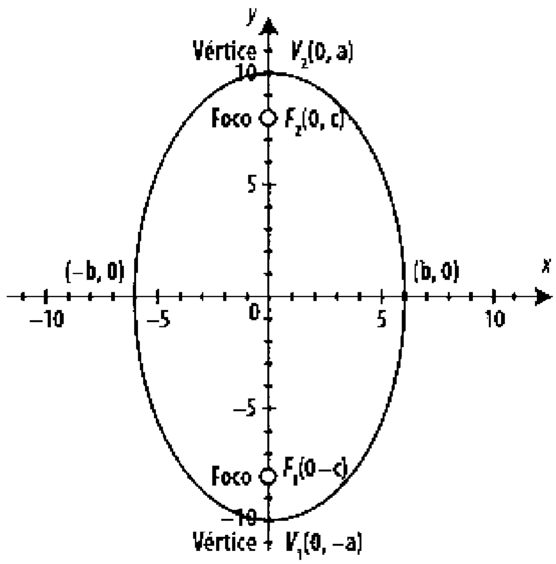


Figura 7.22 Elipse vertical en posición estándar con focos sobre el eje y.

Una manera práctica de caracterizar la *forma* de la elipse es mediante su excentricidad, definida como $e = \frac{c}{a}$. Para una elipse dada, siempre se cumple que $c < a$. Así que $e < 1$ para una elipse.

Además, se define el lado recto de la elipse como:

$\frac{2b^2}{a}$, que corresponde a la longitud del segmento paralelo al eje menor que une dos puntos de la elipse y que pasa por uno de los focos.

Si la elipse está en orientación estándar, pero su centro está desplazado al punto $C(h, k)$, se debe reemplazar x por $x - h$ y y por $y - k$ en la forma estándar de la ecuación de la elipse. Así se tiene que:

Elipse horizontal (con eje focal paralelo al eje x)

Ecuación forma estándar: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, $a > b$.

Focos: $F(h = c, k)$.

Vértices: $V(h \pm a, k)$.

Puntos extremos del semieje menor: $(h, k \pm b)$.

Elipse vertical (con eje focal paralelo al eje y)

Ecuación forma estándar: $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1,\ a>b$.

Focos: $F(h, k \pm c)$.

Vértices: $V(h, k \pm a)$.

Puntos extremos del semieje menor: $(h \pm b, k)$.

Ejemplo 24

Obtener la ecuación de una elipse en posición estándar con focos sobre el eje x.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la elipse. Dado que los focos están en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, por la definición de elipse, tenemos que la distancia de P a F_1 más la distancia de P a F_2 es una constante:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Así que, de la fórmula de la distancia:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Pasamos una de las raíces al lado derecho, elevamos al cuadrado, desarrollamos y simplificamos:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$

$$(x+c)^2+(y-0)^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+(x-c)^2+(y-0)^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$

$$xc-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$

Enseguida, elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos:

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2\left|(x-c)^2+y^2\right|$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$

Como $b > 0$, de la figura 7.20 tenemos que:

$$PF_1 + PF_2 > F_1F_2$$

Por tanto:

$$2a > 2c$$

$$a^2 > c^2$$

Así que el término $a^2 - c^2$ es positivo.

Sea $b^2 = a^2 - c^2$, entonces la ecuación de la elipse nos queda:

$$-b^2x^2 - a^2y^2 = -b^2a^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2$$

Esto nos lleva a la **forma estándar** de la ecuación de una elipse en posición estándar con focos sobre el eje x:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde:

a = Semieje mayor.

b = Semieje menor.

Como $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, tenemos que $a > c$.

Ejemplo 25

Analizar la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ de una elipse en posición estándar con focos sobre el eje x.

Solución

Primero, si hacemos $x = 0$, tenemos que $\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b$. Así que la elipse interseca al eje y en $y = \pm b$.

Luego, si hacemos $y = 0$, tenemos que $\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a$; de este modo, la elipse interseca al eje x en $x = \pm a$.

Ahora, si sustituimos $-y$ por y, obtenemos la misma ecuación, dado que $y^2 = (-y)^2$, así que la gráfica tiene simetría respecto del eje x.

De igual modo, si sustituimos $-x$ por x, obtenemos la misma ecuación, dado que $x^2 = (-x)^2$, así que la gráfica tiene simetría respecto del eje y. Por tanto, la gráfica también tiene simetría respecto del origen.

Si despejamos y en términos de x obtenemos: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, de aquí que, para que y sea real, tenemos que $-a \leq x \leq a$. De la misma manera, para que x sea real, tenemos que $-b \leq y \leq b$.

En resumen, la gráfica de la elipse está confinada a la región entre las intersecciones $\pm a$ en el eje x y $\pm b$ en el eje y, como se observa en la figura 7.21.

Ejemplo 26

Analizar y construir un esbozo de la gráfica de la elipse $4x^2 + 16y^2 = 64$.

Solución

Primero escribimos la ecuación de la elipse en su forma estándar dividiendo toda la ecuación entre 64: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Como podemos ver, $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ y $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$; por tanto, la distancia del centro al foco es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$.

En este caso, la elipse está en posición estándar (centrada en el origen), con focos en $F\left(\pm\sqrt{12}, 0\right)$ sobre el eje x. Las intersecciones con el eje x son $V(\pm 4, 0)$ y las intersecciones con el eje y son $(0, \pm 2)$. La gráfica de la elipse se muestra en la figura 7.23.

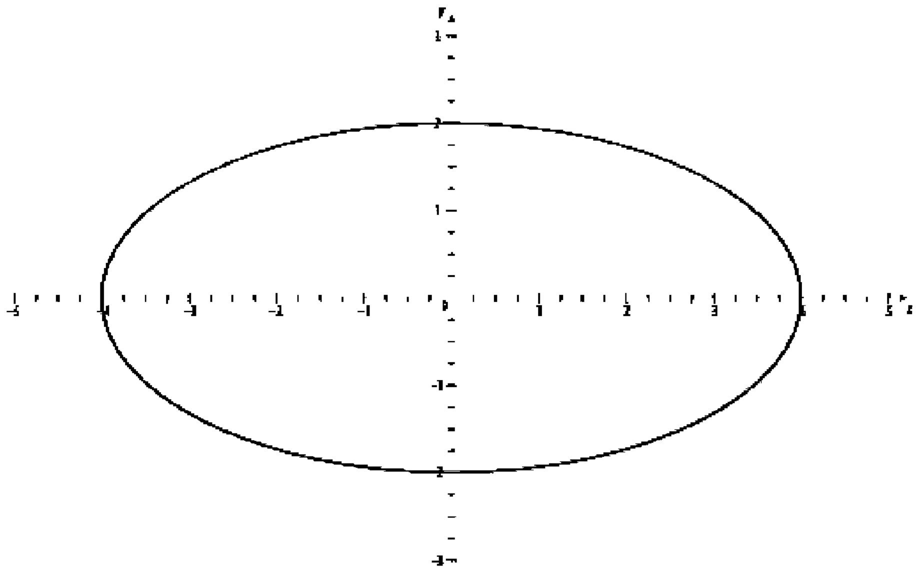


Figura 7.23 Gráfica de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Ejemplo 27

Analizar y construir un esbozo de la gráfica de la elipse $25x^2 + y^2 = 25$.

Solución

Primero escribimos la ecuación de la elipse en su forma estándar, dividiendo toda la ecuación entre 25: 25: $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$. Como $a > b$, vemos que $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ y $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$. Por tanto, la distancia del centro al foco es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24}$.

En este caso, la elipse está en posición estándar (centrada en el origen) y como la variable x está sobre la constante b, que es menor que a, tenemos que el eje focal de la elipse es paralelo al eje y, así que sus focos están en $F\left(0,\pm\sqrt{24}\right)$ sobre el eje y. Las intersecciones con el eje x son en $(\pm 1, 0)$ y las intersecciones con el eje y, en este caso los vértices, son $V(0, \pm 5)$. La figura 7.24 muestra la gráfica de esta elipse.

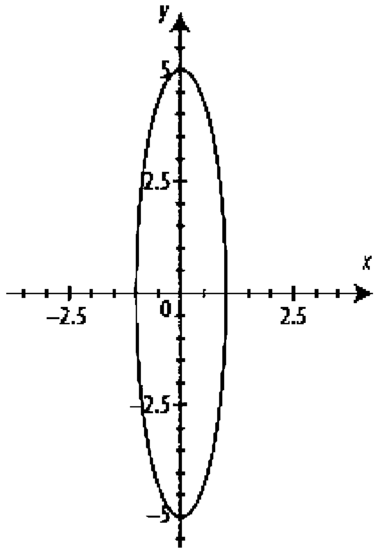


Figura 7.24 Gráfica de la elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Ejemplo 28

Analizar y construir un esbozo de la gráfica de la elipse

$$25x^2 + 9y^2 + 200x - 18y + 184 = 0$$

Solución

Primero completamos cuadrados en x y en y, para ello agrupamos los términos en x y en y:

$$25(x^2 + 8x) + 9(y^2 - 2y) = -184$$

Para completar el cuadrado, tomamos el coeficiente del término lineal, lo dividimos entre dos y lo elevamos al cuadrado; el número resultante también hay que sumarlo del lado derecho del signo igual:

$$25(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 2y + 1) = -184 + 25(16) + 9(1)$$

Esto se puede escribir como:

$$25(x + 4)^2 + 9(y - 1)^2 = 225$$

Ahora dividimos todo entre 225 para llegar finalmente a la forma estándar de la elipse:

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

Es decir:

$$\frac{(x+4)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{5^2}=1$$

Si comparamos esta expresión con la forma estándar de una elipse con orientación estándar con centro en el punto $C(h, k)$: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, podemos notar que el centro está en $C(h, k) = (-4, 1)$.

Entonces, como $a > b$, tenemos que el semieje mayor es $a = 5$ y el semieje menor es $b = 3$. Por definición, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ es la distancia del centro a cualquiera de los focos.

En este caso, como a está debajo del término con y^2, tenemos que el eje focal de la elipse es vertical; esto significa que es paralelo al eje y, así que la posición de los focos es $F(h, k \pm c) = (-4, 1 \pm 4) = (-4, -3)$ y $(-4, 5)$, al tiempo que los vértices están en $V(h, k \pm a) = (-4, 1 \pm 5) = (-4, -4)$ y $(-4, 6)$, y los puntos extremos del semieje menor se localizan en $(h \pm b, k) = (-4 \pm 3, 1) = (-7, 1)$ y $(-1, 1)$. Dado lo anterior, la gráfica de la elipse se muestra en la figura 7.25.

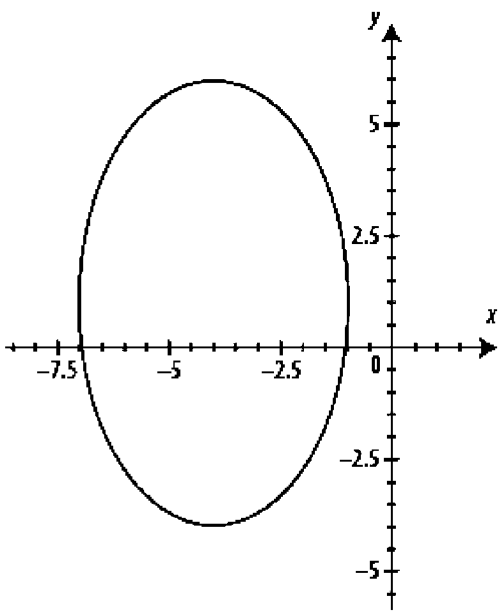


Figura 7.25 Gráfica de la elipse $\frac{(x+4)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{5^2}=1$.

■ **Ejemplo 29**

Analizar y construir un esbozo de la gráfica de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$.

Solución

Primero completamos cuadrados en x y en y, para ello agrupamos los términos en x y en y:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) = -4$$

Para completar el cuadrado, tomamos el coeficiente del término lineal, lo dividimos entre dos y lo elevamos al cuadrado. Luego, el número resultante también hay que sumarlo del lado derecho del signo igual, esto nos da:

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = -4 + 4 + 36$$

Esto se puede escribir como:

$$4(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$$

Ahora dividimos todo entre 36, para obtener la forma estándar de la elipse:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

Es decir:

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$$

Si comparamos esta expresión con la forma estándar de una elipse con orientación estándar con centro en el punto $C(h, k)$: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$, podemos notar que el centro está en $C(h, k) = (1, -2)$. Como $a > b$, tenemos que $a = 3$ y $b = 2$; además, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$.

Como a está debajo del término con x^2, tenemos que el eje focal de la elipse es paralelo al eje x, así que la posición de los focos es $F(h \pm c, k) = (1 \pm \sqrt{5} - 2) = (-1.24, -2)$ y $(3.24, -2)$; los vértices están en $V(h \pm a, k) = (1 \pm 3, -2) = (-2, -2)$ y $(4, -2)$, y los puntos extremos del semieje menor se localizan en $(h, k \pm b) = (1, -2 \pm 2) = (1, 4)$ y $(1, 0)$. Dado lo anterior, la gráfica de la elipse se muestra en la figura 7.26.

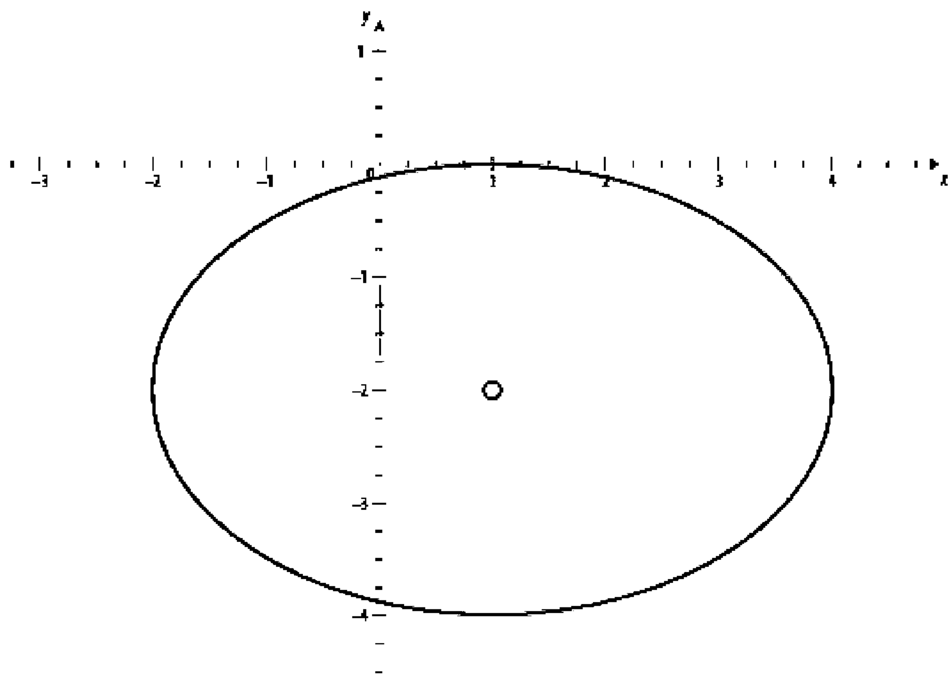


Figura 7.26 Gráfica de la elipse $\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{2^2}=1.$

Ejemplo 30

Analizar y esbozar la gráfica de $6x^2 + 10y^2 - 60x - 60y + 180 = 0$.

Solución

Debemos completamos cuadrados en x y en y:

$$6x^2 - 60x + 10y^2 - 60y = -180$$

Para ello, primero agrupamos los términos en x y en y:

$$6(x^2 - 10x) + 10(y^2 - 6y) = -180$$

Ahora completamos cuadrados en x y y:

$$6(x^2 - 10x + 25) + 10(y^2 - 6y + 9) = -180 + 150 + 90$$

Es decir:

$$6(x - 5)^2 + 10(y - 3)^2 = 60$$

En la forma estándar de la ecuación de una elipse queda:

$$\frac{(x-5)^2}{10}+\frac{(y-3)^2}{6}=1$$

Por tanto, el centro de la elipse está en $C(h, k) = (5, 3)$. Como $a > b$, tenemos que $a = \sqrt{10}$ y $b = \sqrt{6}$. Además, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{10 - 6} = \sqrt{4} = 2$.

Como a está debajo del término con x^2, tenemos una elipse horizontal, así que la posición de los focos es $F(h \pm c, k) = (5 \pm 2, 3) = (3, 3)$ y $(7, 2)$; los vértices están en $V(h \pm a, k) = \left(5 \pm \sqrt{10}, 3\right) = (1.84, 3)$ y $(8.16, 3)$; los puntos extremos del semieje menor están en $(h, k \pm b) = \left(5, 3 \pm \sqrt{6}\right) = (5, 0.55)$ y $(5, 5.45)$ y la gráfica de la elipse se muestra en la figura 7.27.

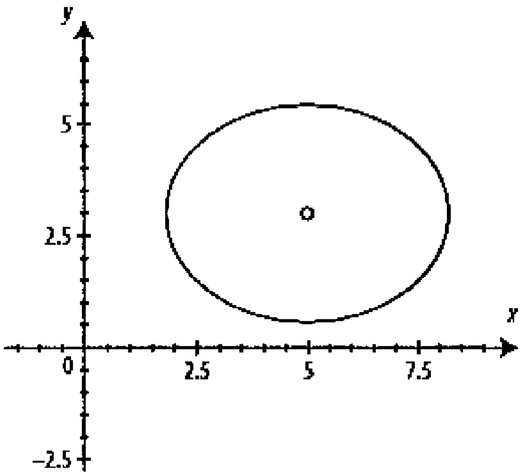


Figura 7.27 Gráfica de la elipse $\dfrac{(x-5)^2}{10} + \dfrac{(y-3)^2}{6} = 1$.

Ejemplo 31

Encontrar la ecuación de la elipse en posición estándar con focos en $F(\pm 2, 0)$ e intersección con el eje y en $(0, \pm 1)$, y construir un esbozo de su gráfica.

Solución

Dado que la elipse está en posición estándar con focos a lo largo del eje x, su ecuación es de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Como los focos están en $F(\pm 2, 0) \Rightarrow c = 2$, y la elipse interseca al eje y en $(0, \pm 1) \Rightarrow b = 1$. Finalmente, como $b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, tenemos que la ecuación de la elipse queda $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. La figura 7.28 muestra la gráfica de esta elipse.

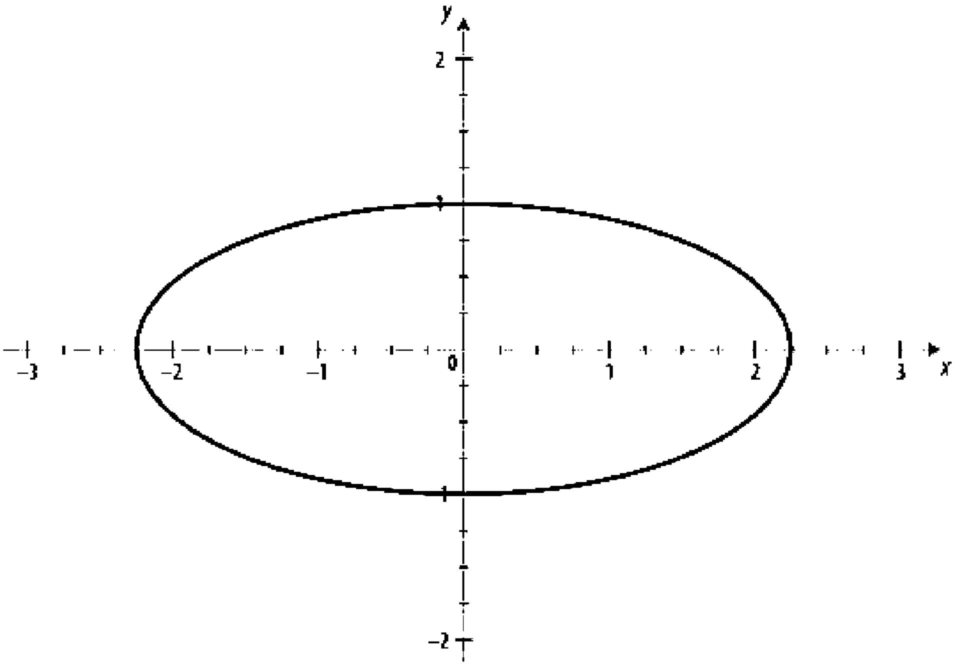


Figura 7.28 Gráfica de la elipse $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$.

Ejemplo 32

Encontrar la ecuación de la elipse en orientación estándar con focos en $F_1(-1, 2)$ y $F_2(-1, 6)$, y excentricidad $e=\frac{2}{3}$, y construir un esbozo de la gráfica de esta elipse.

Solución

En este caso, el centro de la elipse está en el punto medio entre los dos focos, así que $C(h, k) = (-1, 4)$. Como el eje focal de la elipse es paralelo al eje y, la ecuación de la elipse es de la forma $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

Como la distancia entre los dos focos es $2c = 4$, entonces $c = 2$.

Además, también sabemos que la excentricidad es $e=\frac{2}{3}$ y como

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{2}{3} \Rightarrow a=\frac{3c}{2}=\frac{3(2)}{2}=3$$

Finalmente, tenemos que $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$; por tanto, la ecuación de la elipse con orientación estándar con centro en $C(-1, 4)$ es: $\frac{(x+1)^2}{5}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$. La figura 7.29 muestra la gráfica de esta elipse.

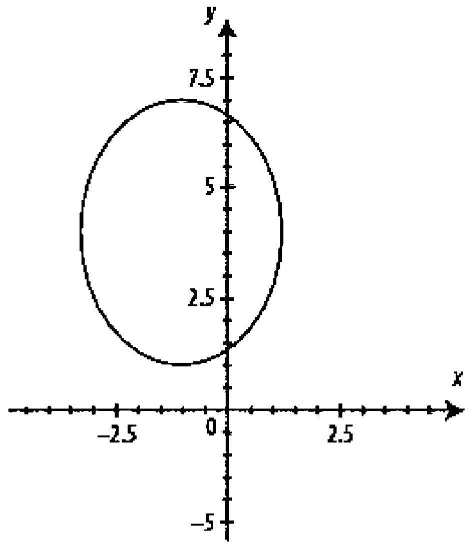


Figura 7.29 Gráfica de la elipse $\frac{(x+1)^2}{5}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$.

Ejemplo 33

Analizar y construir la gráfica de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

Solución

Como la elipse está en posición estándar, su centro está en el origen $C(h, k) = (0, 0)$. Si comparamos con la forma estándar de la ecuación de la elipse, observamos que $a = 3$ y que $b = \sqrt{5}$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, tenemos que $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$.

Como $a > b$ y a está debajo del término x^2, tenemos que la elipse es horizontal y sus focos están sobre el eje x en $F(\pm 2, 0)$; sus vértices están en $V(\pm 3, 0)$, y los extremos del semieje menor están en $\left(0, \pm\sqrt{5}\right)$. Así, la excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} = 0.667$. La gráfica de esta elipse se muestra en la figura 7.30.

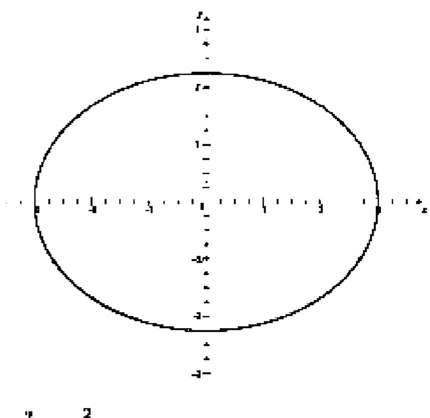


Figura 7.30 Gráfica de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

Ejemplo 34

Analizar y construir un esbozo de la gráfica de $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y = 156$.

Solución

Primero agrupamos términos en x y en y, y factorizamos:

$$25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y = 156$$

$$25x^2 + 100x + 16y^2 - 96y = 156$$

$$25(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 6y) = 156$$

Luego completamos cuadrados en x y en y:

$$25(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 6y + 9) = 156 + 25(4) + 16(9)$$

$$25(x+2)^2 + 16(y-3)^2 = 400$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

Así, tenemos una elipse con orientación estándar, con eje focal paralelo al eje y, centro en $C(h, k) = (-2, 3)$, semieje mayor $a = 5$ y semieje menor $b = 4$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, tenemos que la distancia del centro al foco es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$. Así, los focos están en $F(h, k \pm c) = (-2, 0)$ y $(-2, 6)$; los vértices están en $V(h, k \pm a) = (-2, -2)$ y $(-2, 8)$; los puntos extremos del eje menor $(h \pm b, k) = (-6, 3)$ y $(2, 3)$, y la excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6$. La gráfica de esta elipse se muestra en la figura 7.31.

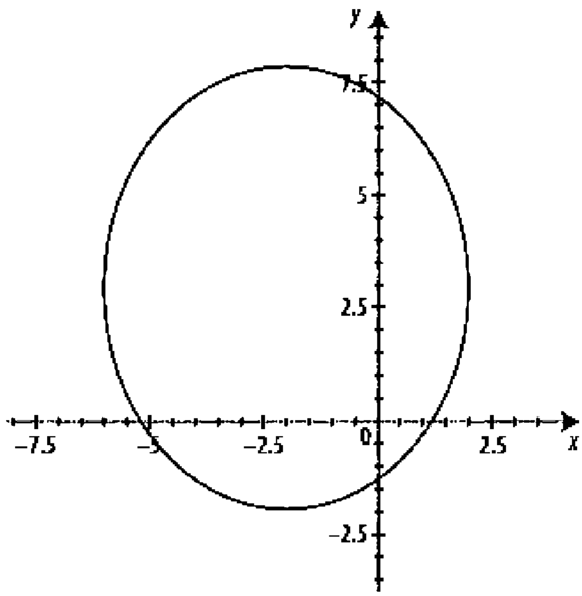


Figura 7.31 Gráfica de la elipse $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$.

Ejemplo 35

Encontrar la excentricidad de las siguientes elipses:

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{49}=1.$

b) $8x^2 + 12y^2 + 64x - 72y + 140 = 0.$

Solución

a) De la ecuación de la elipse tenemos que $a = 7$ y $b = 5$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, tenemos que $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{49-25}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$. Así que la excentricidad de la elipse es $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=0.700.$

b) Como en los ejemplos anteriores, en este caso tenemos que transformar la ecuación de la elipse de su forma general $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ a su forma estándar $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$. Comenzamos con la expresión dada, agrupamos términos en x y en y, completamos cuadrados y simplificamos:

$$8x^2+12y^2+64x-72y+140=0$$

$$8x^2+64x+12y^2-72y=-140$$

$$8(x^2+8x)+12(y^2-6y)=-140$$

$$8(x^2+8x+16)+12(y^2-6y+9)=-140+128+108$$

$$8(x+4)^2+12(y-3)^2=96$$

$$\frac{8(x+4)^2}{96}+\frac{12(y-3)^2}{96}=\frac{96}{96}$$

$$\frac{(x+4)^2}{12}+\frac{(y-3)^2}{8}=1$$

Así, $a^2 = 12$, $b^2 = 8$ y $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12-8}=\sqrt{4}=2$. Por tanto, la excentricidad de la elipse es $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{12}}=0.577.$

Ejemplo 36

Encontrar la ecuación en forma estándar de la elipse con vértices en $V(\pm 4, 0)$ y excentricidad $e=\dfrac{1}{4}$.

Solución

Como se puede notar, tenemos una elipse horizontal centrada en el origen. Aquí, el semieje mayor es la distancia del centro a uno de los vértices, así que $a = 4$. Por otro

lado, la excentricidad es $e = \frac{c}{a}$ y en este caso $e = \frac{1}{4}$, así que $\frac{c}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow c = \frac{a}{4} = \frac{4}{4} = 1$.
Finalmente, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$; por tanto, sustituyendo en la forma estándar de la ecuación de la elipse en posición horizontal, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tenemos que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$$

Ejemplo 37

Encontrar la ecuación de la elipse con "vértices menores": en $(-3, 3)$ y $(1, 3)$ y con excentricidad: $e = 0.4$.

Solución

Los vértices menores se refieren a los puntos extremos del eje menor. La distancia entre estos dos puntos es $2b$; entonces, en este caso tenemos que $2b = 4$, así que $b = 2$. El centro de la elipse es el punto medio entre estos dos vértices menores, por tanto el centro de esta elipse está en $C(h, k) = (-1, 3)$. Para hallar el semieje mayor a, usamos el valor de la excentricidad $e = \frac{c}{a} = 0.4$ y la relación $a^2 = b^2 + c^2$. Luego, dividimos esta última expresión entre a^2 y así tenemos que: $1^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow 1^2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 + (0.4)^2$.
Enseguida, despejamos a y obtenemos que $a^2 = \frac{100}{21}$.
Por tanto, usando $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, tenemos que la ecuación que estamos buscando es $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{\left(\frac{100}{21}\right)} = 1$.

Aplicaciones de la elipse

Las elipses tienen diversas aplicaciones en la vida cotidiana. Aunque, sin duda, una de las aplicaciones más importantes es que las órbitas de los planetas alrededor del Sol o de los satélites alrededor de la Tierra siguen órbitas elípticas. De hecho, el astrónomo y filósofo alemán Johannes Kepler (1571-1630) postuló este hecho en sus famosas "leyes de Kepler", en las cuales hizo notar que los planetas describen órbitas elípticas y que el Sol está en uno de los focos. Lo mismo ocurre con la órbita de la Luna alrededor de la Tierra; esta órbita no es una circunferencia sino que es una elipse, de modo que la distancia más cercana de la Tierra a la Luna es $d_{TL1} = 356{,}425$ kilómetros, aproximadamente, y la distancia más lejana de la Tierra a la Luna es $d_{TL2} = 406\,710$ kilómetros, aproximadamente. Con estos datos, es posible demostrar que la excentricidad de la órbita de la Luna es $e \approx 0.934$. En el caso de la Tierra y el Sol, la distancia de máximo acercamiento es $d_{TS1} = 147.1 \times 10^6$ kilómetros, aproximadamente, y la distancia de máximo alejamiento es $d_{TS2} = 152.1 \times 10^6$ kilómetros, aproximadamente. Entonces, ¿cuál es la excentricidad de la órbita de la Tierra alrededor del Sol? La respuesta es: $e \approx 0.983$.

Otra aplicación importante de las elipses es que estas cumplen con la propiedad de que un rayo emitido en un foco siempre se reflejará dentro de la elipse, de modo que converge en el otro foco. Esta propiedad se usa en algunos aparatos en medicina para atacar tumores mediante reflexiones múltiples de ondas de choque de alta energía bajo el agua.

Ejercicios propuestos

59. Obtén la ecuación de una elipse en posición estándar con focos sobre el eje y.

60. Analiza la ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ de una elipse en posición estándar con focos sobre el eje y.

En los ejercicios 61 y 62, analiza y construye un esbozo de la gráfica de la elipse.

61. $16x^2 + y^2 = 16$

62. $4x^2 + 36y^2 + 16x - 128 = 0$

En los ejercicios 63 a 69 encuentra la forma estándar, el centro, los focos, los vértices y los vértices menores, y construye un esbozo de la gráfica de las elipses.

63. $25x^2 + 4y^2 - 32y - 36 = 0$

64. $4x^2 + 81y^2 - 324 = 0$

65. $25x^2 + 49y^2 + 400x - 392y + 1\,159 = 0$

66. $36x^2 + y^2 + 648x + 6y + 2\,889 = 0$

67. $4x^2 + 64y^2 - 4x + 64y - 240 = 0$

68. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$

69. $100x^2 + 25y^2 - 1\,200x - 500y + 3\,600 = 0$

70. Encuentra la ecuación de la elipse en posición estándar con focos en $F(\pm 3, 0)$ e intersección con el eje y en $(0, \pm 2)$, y construye un esbozo de su gráfica.

71. Encuentra la ecuación de la elipse en posición estándar con focos en $F\left(\pm\frac{11}{2}, 0\right)$ e intersección con el eje y en $\left(0 \pm \frac{5}{2}\right)$, y construye un esbozo de su gráfica.

72. Encuentra la ecuación de la elipse en posición estándar con focos en $F(0, \pm 5)$ y vértices en $V(0, \pm 6)$, y construye un esbozo de su gráfica.

73. Encuentra la ecuación de la elipse en posición estándar con vértices en $V(0, \pm 9)$, excentricidad $\frac{1}{9}$, y construye un esbozo de su gráfica.

74. Encuentra la ecuación de la elipse con orientación estándar, focos en $F_1(-2, -5)$ y $F_2(-2, 1)$ y excentricidad $e = \frac{2}{3}$, y construye un esbozo de su gráfica.

75. Encuentra la ecuación de la elipse con orientación estándar, vértices en $V_1(-8, -2)$ y $V_2(-2, -2)$ y longitud de semieje menor de 2, y esboza la gráfica de la elipse.

76. Encuentra la ecuación de la elipse con orientación estándar, focos en $F_1(4, -4)$ y $F_2(12, -4)$, excentricidad $e = \frac{4}{5}$, y construye un esbozo de su gráfica.

77. Encuentra la ecuación de la elipse con orientación estándar, vértices en $V_1(6, -3)$ y $V_2(6, 7)$, vértices menores en $(3, 2)$ y $(9, 2)$, y construye un esbozo de su gráfica.

78. Encuentra la ecuación de la elipse con orientación estándar, vértices en $V_1(-3, -4)$ y $V_2(3, 8)$, y excentricidad $e = \frac{5}{6}$.

En los ejercicios 79 y 80 determina la excentricidad de las elipses.

79. $9x^2 + 49y^2 - 441 = 0$

80. $40x^2 + 20y^2 - 800 = 0$

En los ejercicios 81 y 82 determina las coordenadas del centro y la excentricidad, y construye un esbozo de la gráfica de las elipses.

81. $6x^2 + 18y^2 + 60x - 108y + 204 = 0$

82. $16x^2 + 100y^2 + 320x - 1\,600y + 6\,400 = 0$

En los ejercicios 83 y 84 determina la excentricidad y construye un esbozo de la gráfica de las elipses.

83. $36x^2 + 20y^2 - 576x + 120y + 1\,764 = 0$

84. $17x^2 + 5y^2 - 374x - 60y + 2\,152 = 0$

85. Encuentra la ecuación en forma estándar de la elipse con orientación estándar con focos en $F_1(1, 5)$ y $F_2(1, 7)$, y excentricidad 0.5.

86. Determina la excentricidad y la posición de los vértices de la elipse

$$\frac{(x-7)^2}{14} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

87. Encuentra la ecuación de la elipse que tiene centro en $C\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, un foco en $F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ y un vértice en $V_1\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Calcula la excentricidad de la elipse y construye un bosquejo de su gráfica.

88. Encuentra la ecuación de la elipse en posición estándar, con eje focal paralelo al eje x, eje mayor $2a = 7$ y excentricidad $e = \frac{1}{7}$.

7.4 Hipérbola

En esta sección se estudia otra de las cónicas que tiene una forma analítica parecida a la elipse, aunque su gráfica es muy distinta, conocida como hipérbola. La hipérbola se define como *el lugar geométrico* formado por todos los puntos P del plano cartesiano tales que el valor absoluto de la ***diferencia*** de las distancias de P a dos puntos fijos es una constante; sean F_1 y F_2 estos dos puntos fijos, llamados **focos**. La relación matemática que define a la hipérbola es, entonces: $|PF_1 - PF_2| = 2a$, donde a es una constante. La línea que pasa por los focos se llama **eje focal** de la hipérbola; el punto medio entre los dos focos sobre el eje focal se conoce como **centro** de la hipérbola; los puntos de la hipérbola que cruzan el eje focal se llaman **vértices**; el segmento de recta que une los dos vértices se llama **eje transverso** de la hipérbola. La figura 7.32 muestra todos los elementos que conforman una hipérbola.

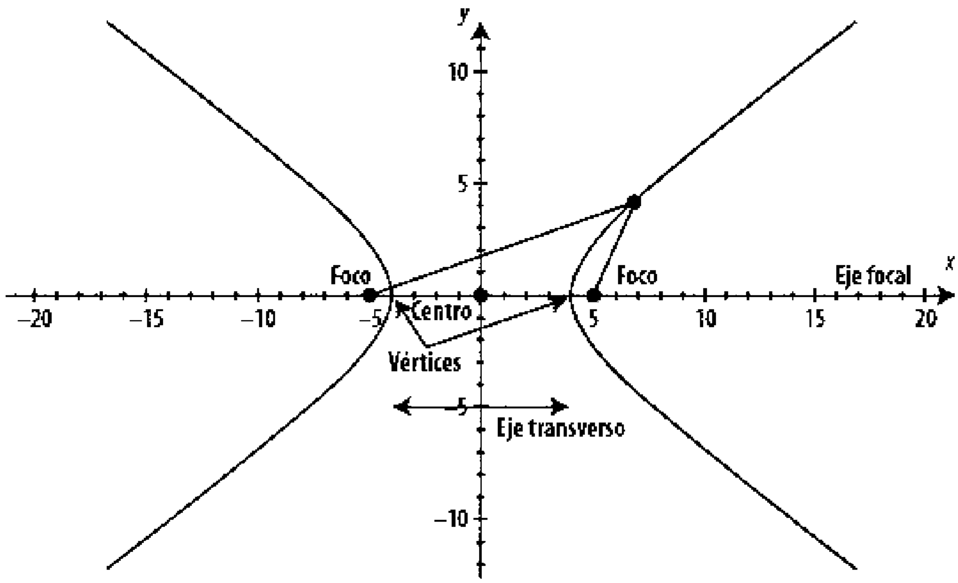


Figura 7.32 Elementos de una hipérbola.

En el ejemplo que se muestra en la figura 7.32 se eligió la distancia entre los focos $2c = 10$ y la distancia entre los vértices $2a = 4$ (véase más adelante).

Se dice que una hipérbola está en *orientación estándar* si su eje focal es paralelo a uno de los ejes coordenados. Pero si además de esto, el centro de la hipérbola está en el origen, se dice entonces que la hipérbola está en ***posición estándar***, donde existen dos posibilidades: con los focos sobre el eje x o con los focos sobre el eje y.

La distancia del centro a un vértice se denota con la letra a y se llama semieje transverso; la distancia del centro a uno de los focos se denota con la letra c y corresponde a la mitad de la distancia focal; la distancia del vértice a una de las asíntotas de la hipérbola perpendicular al eje focal se denota con la letra b y cumple que $b^2 = c^2 - a^2$, con $c > a$. Por su parte, el segmento de longitud $2b$ perpendicular al eje transverso que pasa por el centro se llama eje conjugado.

Gráfica, ecuación y características de hipérbolas en posición estándar

Focos sobre el eje x

Gráfica: figura 7.33.

Ecuación: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, donde $b^2 = c^2 - a^2$.

Además se tiene que $c > a$ y $c > b$.

Focos: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Vértices: $V_1(-a, 0)$, $V_2(a, 0)$.

Centro: $C(0, 0)$.

Asíntotas: $y=\pm\frac{b}{a}x$

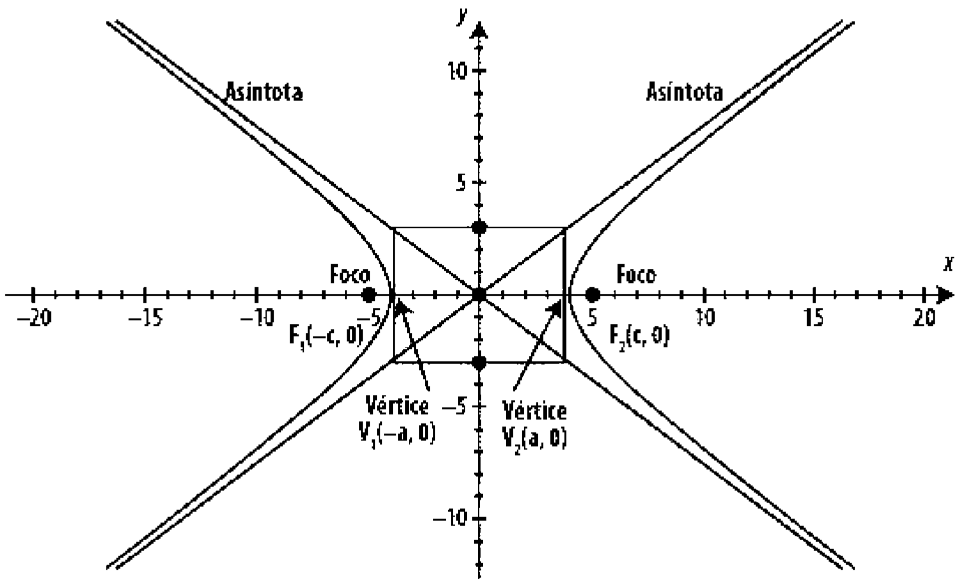


Figura 7.33 Hipérbola horizontal con focos sobre el eje x. En este ejemplo se eligió $c = 5$, $a = 4 \Rightarrow b = 3$.

Focos sobre el eje y

Gráfica: figura 7.34.

Ecuación: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, donde $b^2 = c^2 - a^2$.

Además se tiene que $c > a$ y $c > b$.

Focos: $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$.

Vértices: $V_1(0, -a)$, $V_2(0, a)$.

Centro: $C(0, 0)$.

Asíntotas: $y=\pm\frac{a}{b}x$.

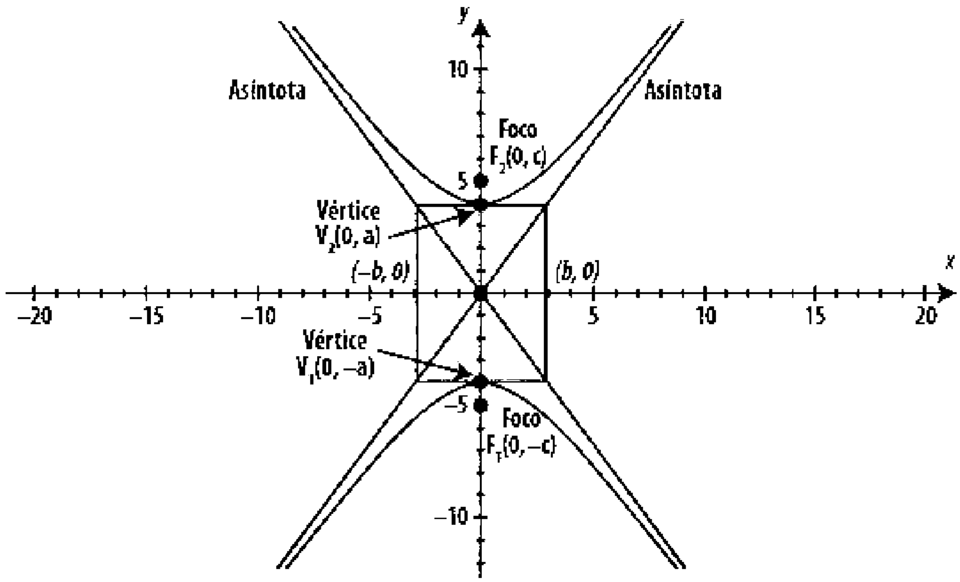


Figura 7.34 Hipérbola vertical con focos sobre el eje y. En este ejemplo se eligió $c = 5$, $a = 4 \Rightarrow b = 3$.

Así como con la elipse, para caracterizar la *forma* de la hipérbola se usa su excentricidad, definida como $e = \frac{c}{a}$. Por tanto, para una hipérbola: $c > a$. Así que $e > 1$ para una hipérbola.

Dos hipérbolas que comparten las mismas asíntotas se conocen como ***hipérbolas conjugadas***.

Si la hipérbola está en orientación estándar, pero su centro está desplazado al punto $C(h, k)$, x se debe reemplazar por $x - h$ y y por $y - k$ en la forma estándar de la ecuación de la hipérbola.

Hipérbola horizontal (con eje focal paralelo al eje x) y centro en $C(h, k)$:

Ecuación forma estándar: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Focos: $F(h = c, k)$.

Vértices: $V(h \pm a, k)$.

Asíntotas: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$.

Hipérbola vertical (con eje focal paralelo al eje y) y centro en $C(h, k)$:

Ecuación forma estándar: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$.

Focos: $F(h, k = c)$.

Vértices: $V(h, k \pm a)$.

Asíntotas: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$.

Ejemplo 38

Obtener la ecuación de una hipérbola en posición estándar con focos sobre el eje x.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la hipérbola. Dado que los focos están en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, por la definición de hipérbola, tenemos que el valor absoluto de la resta de la distancia de P a F_1 menos la distancia de P a F_2 es una constante: $|PF_1 - PF_2| = 2a$. Esto es $PF_1 - PF_2 = \pm 2a$. Así que:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\pm 2a$$

Luego sumamos la segunda raíz en ambos lados de la igualdad, elevamos al cuadrado, desarrollamos y simplificamos:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4xc-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$

$$xc-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$

Enseguida, elevamos ambos lados al cuadrado y simplificamos:

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2\left[(x-c)^2+(y-0)^2\right]$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$

De la figura 7.32 tenemos que:

$$PF_2+F_1F_2>PF_1, \text{ es decir}$$

$$F_1F_2>PF_1-PF_2$$

Así que:

$$2c>2a$$

$$c>a$$

De esta manera, el término $c^2 - a^2$ debe ser positivo. Entonces, sea $b^2 = c^2 - a^2$, así que la ecuación de la hipérbola queda:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

Lo cual nos lleva a la **forma estándar** de la ecuación de una hipérbola en posición estándar con focos sobre el eje x:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Como $b^2 = c^2 - a^2 > 0$, vemos que $c > a$ y $c > b$.

Ejemplo 39

Analizar la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ de una hipérbola en posición estándar con focos sobre el eje x.

Solución

Si hacemos $x = 0$, tenemos que $\frac{y^2}{b^2}=-1 \Rightarrow y^2=-b^2$; así que no hay intersecciones con el eje y.

Pero si hacemos $y = 0$, tenemos que $\frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x=\pm a$; así que la hipérbola interseca al eje x en $x = \pm a$.

Si sustituimos $-y$ por y, obtenemos la misma ecuación, dado que $y^2 = (-y)^2$, así que la gráfica tiene simetría respecto del eje x.

Si sustituimos $-x$ por x, obtenemos la misma ecuación, dado que $x^2 = (-x)^2$, así que la gráfica tiene simetría respecto del eje y.

Por tanto, la gráfica tiene simetría respecto del origen.

Si despejamos y en términos de x obtenemos $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, así que $x \geq a$ o $x \leq a$ para que y sea real.

Si despejamos x en términos de y tenemos que $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$, así que y puede tomar cualquier valor.

Conforme x tiende a infinito o a menos infinito, tenemos que $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ tiende a $y=\pm\frac{b}{a}x$, así que las rectas $y=\pm\frac{b}{a}x$ son asíntotas oblicuas de la gráfica de la hipérbola.

Para dibujar la gráfica de la hipérbola, se marcan las intersecciones $\pm a$ sobre el eje de las x, en tanto, los puntos $\pm b$ se marcan sobre el eje de las y, para formar el rectángulo mostrado en la figura 7.33 se dibujan los segmentos de línea verticales sobre los puntos $x = \pm a$, y los segmentos de línea horizontales sobre los puntos $y = \pm b$. Las diagonales de este rectángulo, extendidas hacia valores grandes de x o de $-x$, son las asíntotas de la hipérbola. Luego, se dibuja la hipérbola hacia arriba comenzando en la intersección $x = a$ y acercándose cada vez más a la asíntota $y=+\frac{b}{a}x$. El resto de esta rama de la hipérbola se puede dibujar considerando que la hipérbola es simétrica respecto del eje x. Una vez que se tiene esta rama de la hipérbola, podemos dibujar la segunda rama, considerando que la hipérbola es simétrica respecto del eje y.

Ejemplo 40

Analizar y construir un esbozo de la gráfica de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Solución

Primero escribimos la ecuación de la hipérbola en su forma estándar dividiendo toda la ecuación entre 36:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Aquí podemos observar que $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ y que $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$. Por tanto, la distancia del centro al foco es $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$. Entonces, se dice que la hipérbola está en posición estándar (centrada en el origen), con focos en $F\left(\pm\sqrt{13}, 0\right)$ sobre el eje x; en este caso, las intersecciones con el eje x son $V(\pm 3, 0)$ y las asíntotas son $y = \pm\dfrac{2}{3}x$. De esta manera, la gráfica de la hipérbola se muestra en la figura 7.35.

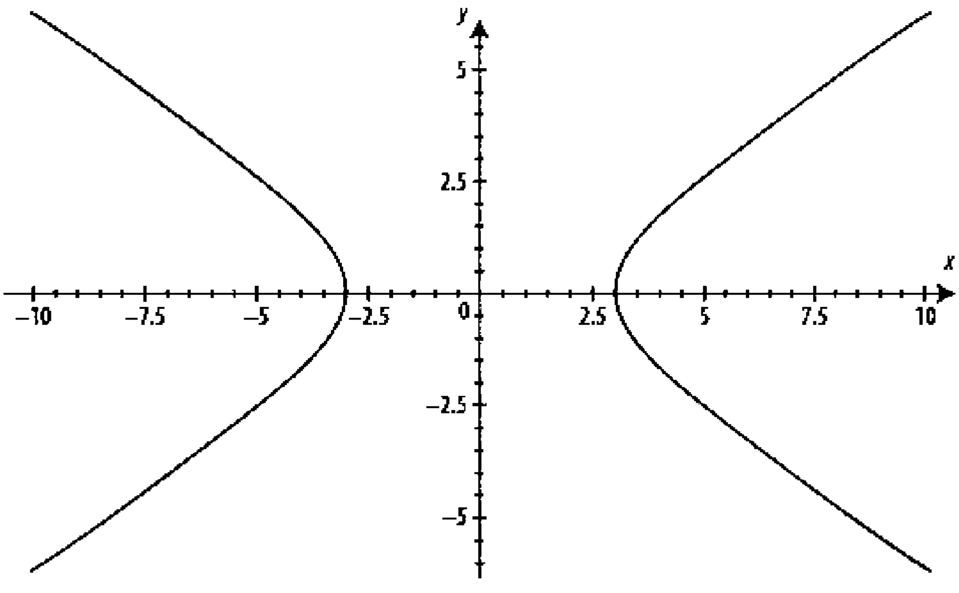


Figura 7.35 Gráfica de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Ejemplo 41

Analizar y construir un esbozo de la gráfica de la hipérbola $4y^2 - x^2 = 36$.

Solución

Primero escribimos la ecuación de la hipérbola en su forma estándar dividiendo toda la ecuación entre 36:

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{36}=1$$

Así que $a = 3$, $b = 6$. Por tanto:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}=6.71$$

Por tanto, la hipérbola está en posición estándar (centrada en el origen) y como el signo del término y^2 es positivo, tenemos que el eje focal de la hipérbola es vertical, y coincide con el eje y; por consiguiente, sus focos están en $F\left(0,\pm 3\sqrt{5}\right)$ sobre el eje y. Por su parte, las intersecciones con el eje y, es decir, los vértices, están en $V(0, \pm 3)$, y las asíntotas de la hipérbola están dadas por $y = \pm 0.5x$. La figura 7.36 muestra la gráfica de esta hipérbola.

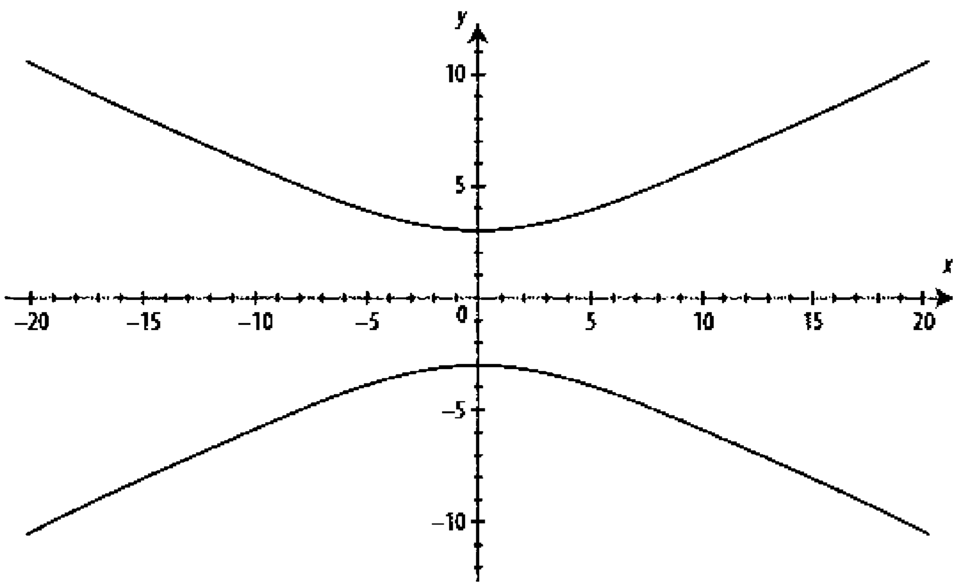


Figura 7.36 Gráfica de la hipérbola $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{36}=1$.

Ejemplo 42

Analizar y construir un esbozo de la gráfica de la hipérbola

$$4x^2 - 25y^2 - 24x - 50y - 89 = 0.$$

Solución

Debemos completar los cuadrados en x y en y:

$$4x^2 - 25y^2 - 24x - 50y - 89 = 0$$

Para ello, agrupamos los términos en x y en y:

$$4x^2 - 24x - 25y^2 - 50y = 89$$

$$4(x^2 - 6x) - 25(y^2 + 2y) = 89$$

Ahora, para completar el cuadrado, tomamos el coeficiente del término lineal, lo dividimos a la mitad y lo elevamos al cuadrado; el número resultante tenemos que sumarlo del lado derecho del signo igual, así tenemos que:

$$4(x^2 - 6x + 9) - 25(y^2 + 2y + 1) = 89 + 4(9) - 25(1)$$

Esto se puede escribir como:

$$4(x - 3)^2 - 25(y + 1)^2 = 100$$

Enseguida, dividimos todo entre 100, para llegar a la forma estándar de la hipérbola:

$$\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Como el signo del coeficiente que acompaña a x^2 es positivo, tenemos una hipérbola horizontal con eje focal paralelo al eje x. Comparando esta expresión con la forma estándar de una hipérbola horizontal con orientación estándar y centro en $C(h, k)$: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, tenemos que el centro está en $C(h, k) = (3, -1)$.

A diferencia de la elipse en la que $a > b$, en el caso de una hipérbola no tenemos esa restricción y puede ser que $a > b$ o que $b > a$. En este caso, vemos que $a = 5$, $b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$. Por tanto, la posición de los focos es $F(h \pm c, k) = \left(3 \pm \sqrt{29}, -1\right)$. Los vértices están en $V(h \pm a, k) = (3 \pm 5, -1) = (-2, -1)$ y $(8, -1)$. En este caso, las asíntotas están dadas por $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$, es decir: $y + 1 = \pm\frac{2}{5}(x - 3)$.

Para construir la gráfica de la hipérbola, dibujamos líneas verticales que pasen por los vértices y líneas horizontales que pasen por los puntos $(h, k \pm b) = (3, -1 \pm 2) = (3, -3)$ y $(3, 1)$; así, estas líneas forman un rectángulo en el centro de la hipérbola. Si prolongamos las diagonales de este rectángulo obtenemos las asíntotas de la hipérbola. Por último, dibujamos la hipérbola desde los vértices hacia las asíntotas; la gráfica de la hipérbola se muestra en la figura 7.37.

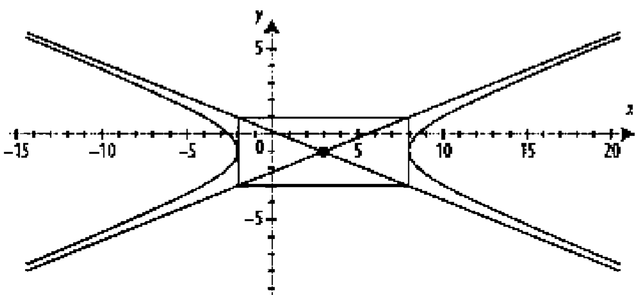


Figura 7.37 Gráfica de la hipérbola $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

Ejemplo 43

Analizar y construir un esbozo de la gráfica de la hipérbola

$$25y^2 - 9x^2 - 200y - 36x + 139 = 0.$$

Solución

Procedemos como en el ejemplo anterior; primero para completar los cuadrados en x y en y.

Primero agrupamos los términos en x y en y:

$$25y^2 - 200y - 9x^2 - 36x = -139$$

$$25(y^2 - 8y) - 9(x^2 + 4x) = -139$$

Ahora completamos los cuadrados:

$$25(y^2 - 8y + 16) - 9(x^2 + 4x + 4) = -139 + 25(16) - 9(4)$$

Esto se puede escribir como:

$$25(y - 4)^2 - 9(x + 2)^2 = 225$$

Enseguida, dividimos todo entre 225 para obtener la forma estándar de la hipérbola:

$$\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{25} = 1$$

Como el coeficiente que acompaña al término y^2 es positivo, tenemos una hipérbola vertical con su eje paralelo al eje y. Comparamos la expresión que obtuvimos con la forma estándar de una hipérbola vertical con orientación estándar con centro en el punto $C(h, k)$: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$. Como podemos observar aquí, el centro está en $C(h,k) = (-2, 4)$. En este caso, $a = 3$ y $b = 5$. Además, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$. Por tanto, la posición de los focos es $F(h, k \pm c) = (-2, 4 \pm \sqrt{34})$; los vértices están en $V(h, k \pm a) = (-2, 4 \pm 3) = (-2, 1)$ y $(-2, 7)$; las asíntotas están dadas por $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$, es decir: $y - 4 = \pm\frac{3}{5}(x + 2)$. Ahora procedemos como en el ejemplo anterior y construimos la gráfica de la hipérbola que se muestra en la figura 7.38.

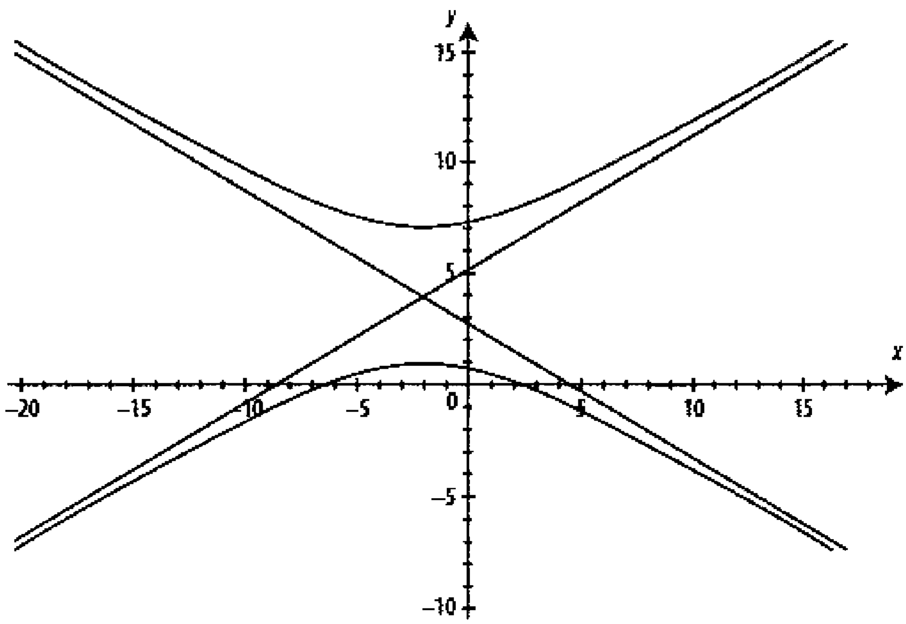


Figura 7.38 Gráfica de la hipérbola $\frac{(y-4)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{25}=1.$

Ejemplo 44

Analizar y esbozar la gráfica de $16x^2 - 64y^2 - 64x - 384y - 1\,536 = 0$.

Solución

Como en los ejemplos anteriores, para completar los cuadrados en x y en y:

Primero agrupamos los términos en x y en y:

$$16x^2 - 64x - 64y^2 - 384y - 1\,536 = 0$$

Ahora factorizamos:

$$16(x^2 - 4x) - 64(y^2 + 6y) = 1\,536$$

Enseguida completamos cuadrados:

$$16(x^2 - 4x + 4) - 64(y^2 + 6y + 9) = 1536 + 16(4) - 64(9)$$

Esto se puede escribir como:

$$16(x-2)^2 - 64(y+3)^2 = 1024$$

Ahora dividimos todo entre 1 024:

$$\frac{(x-2)^2}{64}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$$

Como el coeficiente que acompaña al término x^2 es positivo, tenemos una hipérbola horizontal, con su eje paralelo al eje x. Comparando la expresión anterior con la forma estándar de una hipérbola horizontal con orientación estándar y centro en $C(h,k)$: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$; tenemos que $C(h,\ k) = (2,\ -3)$, $a = 8$ y $b = 4$, además $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=2\sqrt{20}$. Por tanto, la posición de los focos es $F(h\pm c,k)=\left(2\pm 2\sqrt{20},-3\right)$. En tanto, los vértices están en $V(h \pm a, k) = (2 \pm 8, -3) = (-6, -3)$ y $(10, -3)$. Para una hipérbola horizontal, las asíntotas están dadas por $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$, es decir: $y+3=\pm\frac{1}{2}(x-2)$. La figura 7.39 muestra la gráfica de esta hipérbola.

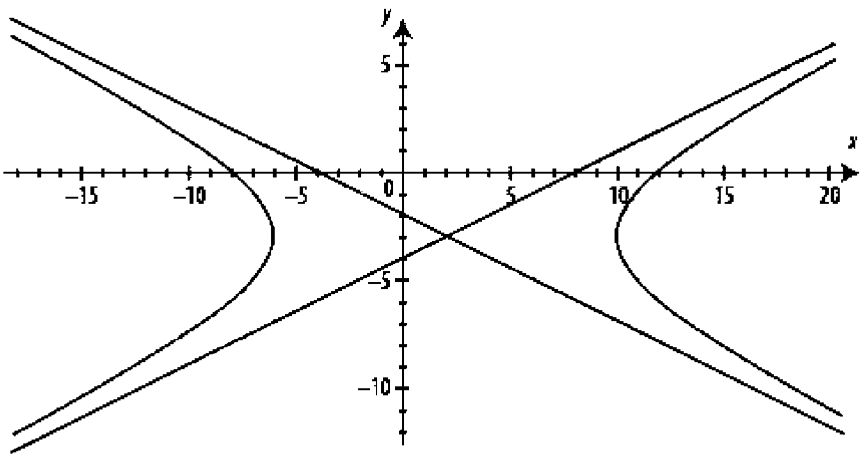


Figura 7.39 Gráfica de la hipérbola $\frac{(x-2)^2}{64}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$.

Ejemplo 45

Analizar la excentricidad $e=\frac{c}{a}$ de una elipse y de una hipérbola.

Solución

Para una elipse, $0 < c < a$, así que $0<\frac{c}{a}=e<1$. Entonces, la excentricidad determina la forma de la elipse como sigue:

- Si e es pequeña, es decir, si e es cercana a 0, entonces c es pequeña comparada con a; de aquí que $b=\sqrt{a^2-c^2}$ es cercana a a. En este caso, el eje menor y el eje mayor de la elipse son más o menos del mismo tamaño, y la elipse se parece a un círculo (la palabra *excentricidad* significa que se aleja del centro).
- Si e es grande, es decir, si es cercana a 1, entonces c es cercana a a, por tanto el semieje menor es cercano a 0. En este caso, el eje mayor de la elipse es mucho mayor que el eje menor y la elipse tiene una forma muy elongada.

Para una hipérbola, $c > a$, así que $\frac{c}{a} = e > 1$. La excentricidad determina la forma de la hipérbola restringiendo la pendiente de las asíntotas de la siguiente manera:

- Si e es pequeña, es decir, si e es cercana a 1, entonces c es cercana a a, así que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ es cercano a 0. En este caso, las asíntotas que tienen pendientes $\pm\frac{b}{a}$ o $\pm\frac{a}{b}$ que aparecerán cercanas a los ejes sobre los que están los vértices y la hipérbola tendrá la forma de una horquilla muy cerrada.
- Si e es grande, es decir, mucho mayor que 1, entonces a es pequeña comparada con c, así que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ es cercana a c, por tanto será grande comparada con a. En este caso, las asíntotas aparecerán lejos de los ejes sobre los que están los vértices y la hipérbola será muy abierta, tendiendo sus dos ramas a ser dos líneas paralelas.

Ejemplo 46

Encontrar la ecuación de la hipérbola en posición estándar con focos en $F(\pm 3, 0)$ e intersección con el eje x en $(\pm 1, 0)$, y construir un esbozo de su gráfica.

Solución

En este caso, la hipérbola está en posición estándar con focos a lo largo del eje x, así que su ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Por tanto, a partir de la posición de los focos sabemos que $c = 3$, mientras que a partir de la posición de los vértices sabemos que $a = 1$. Con estos datos, podemos encontrar el segmento $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$. Por consiguiente, la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$. La figura 7.40 muestra la gráfica de esta hipérbola.

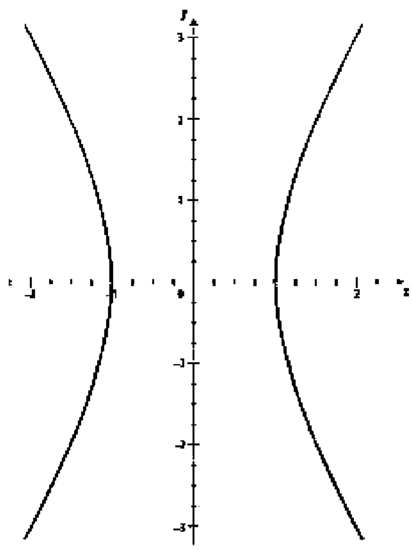


Figura 7.40 Gráfica de la hipérbola $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Ejemplo 47

Encontrar la ecuación de la hipérbola en posición estándar con focos en $F_1(0, -4)$ y $F_2(0, 4)$, y asíntotas dadas por las rectas $y = \pm 2x$, y construir un esbozo de su gráfica.

Solución

Por la información dada, sabemos que $c = 4$. Entonces, tenemos una hipérbola con su eje focal que coincide con el eje y, así que sus asíntotas están dadas por las rectas $y = \pm \frac{a}{b}x$; por tanto, en este caso: $\frac{a}{b} = 2$. En el caso de una hipérbola, al utilizar la relación entre los parámetros a, b y c tenemos que $b^2 = c^2 - a^2$, luego dividiendo toda esta ecuación entre b^2 y sustituyendo los valores de c y de $\frac{a}{b}$, nos queda que $1 = \frac{16}{b^2} - 4$, lo cual implica que $b = \frac{4}{\sqrt{5}}$ y que $a = \frac{8}{\sqrt{5}}$. Ahora, al sustituir estos valores en la forma estándar de la ecuación de una hipérbola vertical en posición estándar, tenemos que $\frac{y^2}{\left(\frac{64}{5}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{16}{5}\right)} = 1$. La gráfica de esta hipérbola se muestra en la figura 7.41.

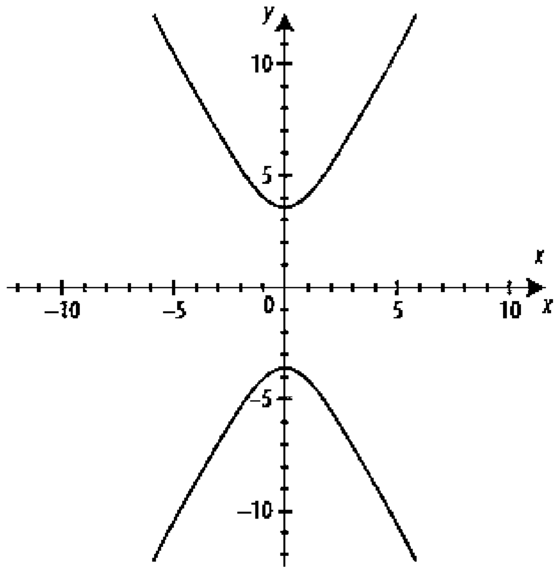


Figura 7.41 Gráfica de la hipérbola $\frac{y^2}{\left(\frac{64}{5}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{16}{5}\right)} = 1$.

Ejemplo 48

Encontrar la ecuación de la hipérbola en orientación estándar con vértices en $V_1(6, -2)$ y $V_2(6, 8)$, y excentricidad $e = 2$, y construir un esbozo de su gráfica.

Solución

El centro de la hipérbola está en el punto medio entre los dos vértices, así que $C(h, k) = (6, 3)$. Como sabemos que la distancia entre los dos vértices es $2a$, por tanto,

$a = 5$. Como también sabemos que la excentricidad es $e = 2$, entonces $\frac{c}{a} = 2$ y, por tanto, $c = 2a = 10$. Por último, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75}$.

Como el eje focal de la hipérbola es paralelo al eje y, su ecuación es de la forma $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, así que la ecuación de la hipérbola que estamos buscando es:

$$\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x-6)^2}{75} = 1$$

La gráfica de esta hipérbola se muestra en la figura 7.42.

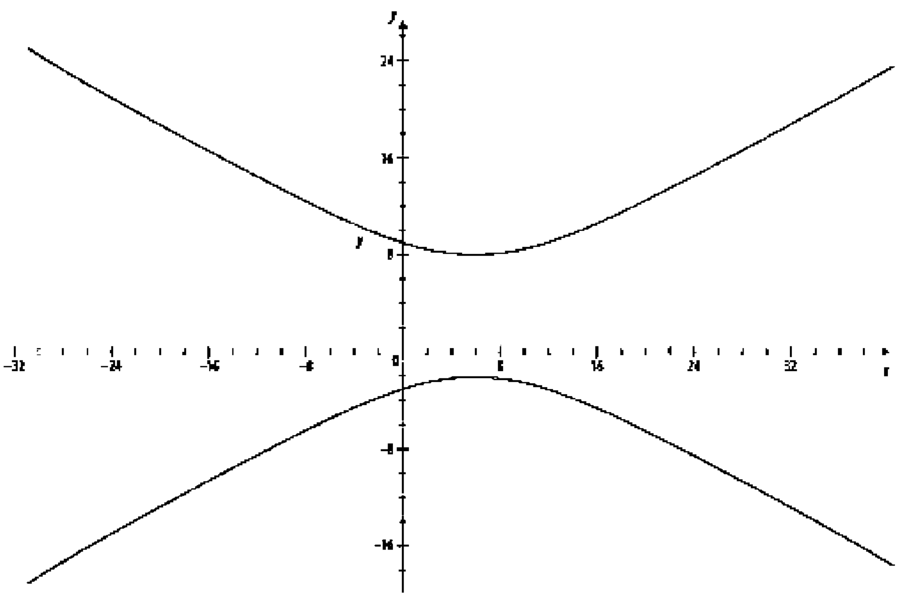


Figura 7.42 Gráfica de la hipérbola $\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x-6)^2}{75} = 1$.

Ejemplo 49

Encontrar la ecuación de la hipérbola horizontal en orientación estándar, con distancia del centro al foco $c = 4$ y asíntotas $y + 3 = \pm\frac{2}{\sqrt{12}}(x + 5)$, y construir un esbozo de su gráfica.

Solución

Sabemos que las asíntotas de una hipérbola horizontal están dadas por las rectas $y - k = \pm\frac{b}{a}(x + h)$; entonces, comparando con la información dada tenemos que $C(h, k) = (-5, -3)$ y que $\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{12}}$. Por otro lado, tenemos que $b^2 = c^2 - a^2$. Al dividir todo entre a^2 y usar el valor dado de c tenemos: $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1 \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{16}{a^2} - 1$, lo cual implica que $a=\sqrt{12}$ y que, por tanto, $b = 2$. Si usamos la forma estándar de una hipérbola horizontal con centro en (h, k): $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, tenemos que $\frac{(x+5)^2}{12}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$. La figura 7.43 muestra la gráfica de esta hipérbola.

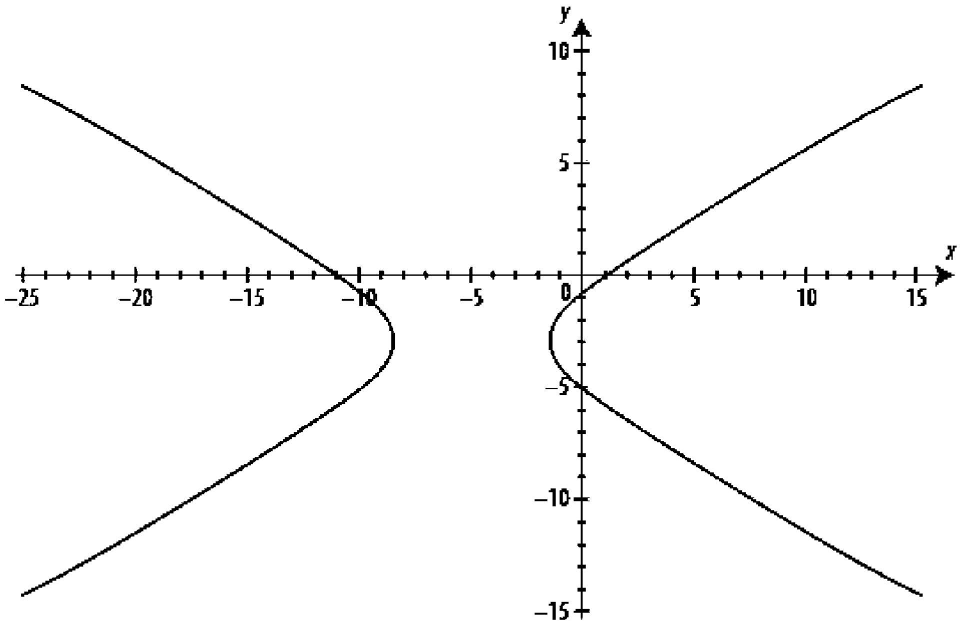


Figura 7.43 Gráfica de la hipérbola $\frac{(x+5)^2}{12}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$.

Ejemplo 50

Analizar y construir la gráfica de la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$.

Solución

En este caso, la hipérbola está en posición estándar, por lo que su centro está en el origen $C(h, k) = (0, 0)$. Como el coeficiente que acompaña a x^2 es positivo, tenemos una hipérbola horizontal con eje focal paralelo al eje x. Al comparar con la forma estándar de la ecuación de la hipérbola vemos que $a = 4$ y $b = 5$. Como $b^2 = c^2 - a^2$, tenemos que $c=\sqrt{41}$. En este caso, los focos están en $F(\pm c,0)=\left(\pm\sqrt{41},0\right)$; los vértices están en $V(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$; las asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{5}{4}x$ y la excentricidad de la hipérbola es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{4}=1.60$. La gráfica de esta hipérbola se muestra en la figura 7.44.

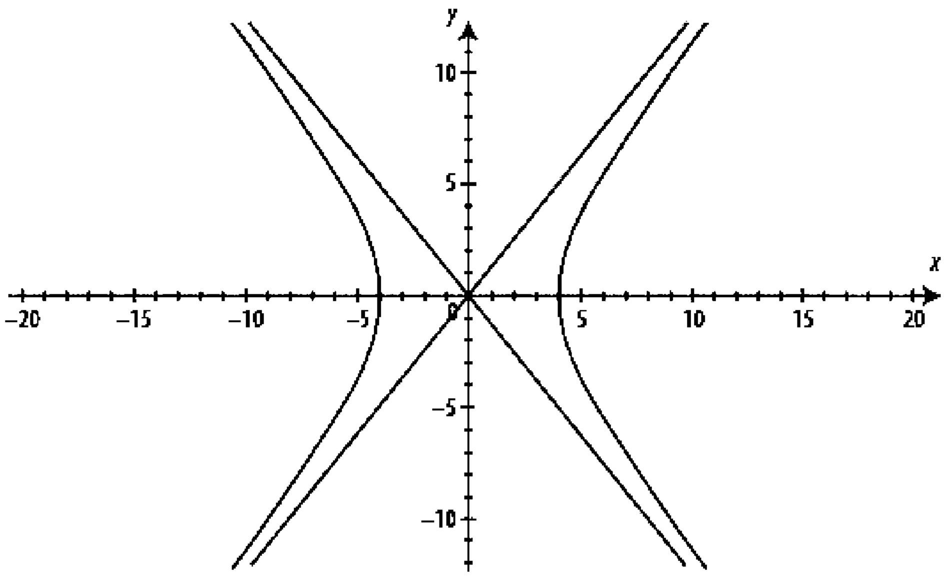


Figura 7.44 Gráfica de la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$.

Ejemplo 51

Analizar la hipérbola $2y^2 - 10x^2 + 16y - 160x - 628 = 0$, determinar la posición de los focos, de los vértices, sus asíntotas, su excentricidad y construir un esbozo de su gráfica.

Solución

Primero agrupamos términos en x y en y, y factorizamos:

$$2y^2 - 10x^2 + 16y - 160x - 628 = 0$$

$$2y^2 + 16y - 10x^2 - 160x = 628$$

$$2(y^2 + 8y) - 10(x^2 + 16x) = 628$$

Ahora completamos cuadrados en x y en y:

$$2(y^2+8y+16)-10(x^2+16x+64)=628+2(16)-10(64)$$

$$2(y+4)^2-10(x+8)^2=20$$

$$\frac{(y+4)^2}{10}-\frac{(x+8)^2}{2}=1$$

Como podemos observar, tenemos una hipérbola con orientación estándar, con eje focal paralelo al eje y y centro en $C(h,k) = (-8, -4)$, cuyos parámetros son $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{2}$ y $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10+2}=\sqrt{12}$. Los focos están en $F(h,k\pm c)=\left(-8,-4\pm\sqrt{12}\right)$;

los vértices están en $V(h, k \pm a) = \left(-8, -4 \pm \sqrt{10}\right)$; las asíntotas, $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$, son $y + 4 = \pm\sqrt{5}\,(x + 8)$; la excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{6}{5}}$, y su gráfica se muestra en la figura 7.45.

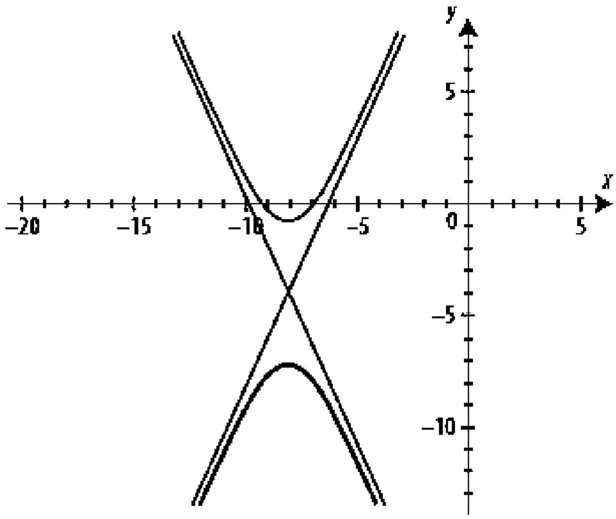


Figura 7.45 Gráfica de la hipérbola $\frac{(y+4)^2}{10} - \frac{(x+8)^2}{2} = 1$.

Ejemplo 52

Encontrar la excentricidad de las siguientes hipérbolas.

a) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{10} = 1$

b) $3y^2 - 2x^2 - 6y - 8x - 6 = 0$

Solución

a) De la ecuación de la hipérbola tenemos que $a = \sqrt{100} = 10$ y $b = \sqrt{10}$. Así que $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{100 + 10} = \sqrt{110}$. Por tanto, la excentricidad de la hipérbola es:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{110}{100}} = \sqrt{\frac{55}{50}} = 1.05$$

b) Como en los ejemplos anteriores, tenemos que transformar la ecuación de la hipérbola de su forma general, $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, a su forma estándar $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$. Así pues, comenzamos con la expresión dada, agrupamos términos en x y en y, completamos cuadrados y simplificamos:

$$3y^2-2x^2-6y-8x-11=0$$
$$3y^2-6y-2x^2-8x=11$$
$$3(y^2-2y)-2(x^2+4x)=11$$
$$3(y^2-2y+1)-2(x^2+4x+4)=11+3(1)-2(4)$$
$$3(y-1)^2-2(x+2)^2=6$$
$$\frac{(y-1)^2}{2}-\frac{(x+2)^2}{3}=1$$

Así:

$$a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{3},\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$$

Por tanto, la excentricidad de la hipérbola es:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{5}{2}}=1.58$$

Ejemplo 53

Encontrar la ecuación en forma estándar de la hipérbola con vértices en $V(\pm 4, 0)$ y excentricidad $e = 4$.

Solución

Los vértices están sobre el eje x, así que tenemos una hipérbola horizontal. Además, el punto medio entre los vértices es $(0, 0)$, así que la hipérbola está centrada en el origen, $C(h, k) = (0, 0)$. Como la distancia del centro al vértice son 4 unidades, tenemos que $a = 4$. Además, sabemos que $e = 4$, y como $e=\frac{c}{a}=4$, tenemos que $c = 4a = 16$. Por último, como $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos que $16^2=4^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{240}$. Por tanto, la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{240}=1$.

Ejemplo 54

Encontrar las asíntotas de la hipérbola vertical centrada en el origen con un vértice en $V_2(0, 8)$ y excentricidad $e = 1.1$.

Solución

La distancia del centro al vértice son 8 unidades, así que $a = 8$. Además, $e = 1.1$, así que $\frac{c}{a}=1.1 \Rightarrow c=1.1a=1.1(8)=8.8$. Como $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 8.8^2=8^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{13.44}$. La ecuación de las asíntotas de una hipérbola vertical centrada en el origen es $y=\pm\frac{a}{b}x$. Por consiguiente, en este caso las asíntotas son: $y=\pm\frac{8}{\sqrt{13.44}}x=2.18x$.

Aplicaciones de la hipérbola

Una de las aplicaciones más comunes de las hipérbolas es en la localización de puntos en el espacio. Por ejemplo, para ubicar la posición de un punto *P* se usa un par de radiotransmisores, *T*1 y *T*2, y se emite una señal de radio desde cada uno de los transmisores, con lo cual se registra la *diferencia* en los tiempos de llegada de la señal del transmisor *T*1 a *P* y del transmisor *T*2 a *P*. Al conocer la distancia entre ambos radiotransmisores se puede establecer que el punto, *P*, pertenece a una hipérbola dada con una ecuación conocida. Si se repite este procedimiento para otro par de radiotransmisores *S*1 y *S*2, se establece que el punto, *P*, pertenece a una segunda hipérbola dada con ecuación también conocida. Al hallar la intersección de estas dos hipérbolas se puede determinar la posición del punto *P*. Este es el principio que se usa en el sistema de navegación LORAN (siglas en inglés de *Long Range Navigation*), para ubicar la posición de barcos o aviones. Sin embargo, hoy día este sistema de localización está siendo desplazado por el sistema de localización satelital más avanzado GPS (siglas en inglés de *Global Positioning System*), que funciona en base a triangulación.

Ejercicios propuestos

89. Obtén la ecuación de una hipérbola en posición estándar con focos sobre el eje y.

90. Analiza la ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ de una hipérbola en posición estándar con focos sobre el eje y.

En los ejercicios 91 y 92 analiza y construye un esbozo de la gráfica de la hipérbola dada.

91. $16x^2 - y^2 = 16$

92. $9y^2 - 25x^2 - 225 = 0$

En los ejercicios 93 a 99 encuentra la forma estándar, el centro, los focos, los vértices, las asíntotas y construye un esbozo de la gráfica de las hipérbolas dadas.

93. $9x^2 - 49y^2 - 90x + 294y - 657 = 0$

94. $25y^2 - 81x^2 - 200y - 1625 = 0$

95. $36x^2 - 9y^2 + 360x + 576 = 0$

96. $y^2 - 4x^2 - 12y - 64x - 221 = 0$

97. $4x^2 - 4y^2 + 56x - 12y + 171 = 0$

98. $4y^2 - 36x^2 + 32y + 432x - 1241 = 0$

99. $324x^2 - 100y^2 - 2268x + 500y + 1319 = 0$

100. Encuentra la ecuación de la hipérbola en posición estándar con focos en $F(0, \pm 4)$ e intersección con el eje y en $V(0, \pm 2)$, y construye un esbozo de su gráfica.

101. Encuentra la ecuación de la hipérbola en posición estándar con focos en $F_1(-8, 0)$ y $F_2(8, 0)$ e intersección con el eje x en $V\left(\pm\frac{15}{2}, 0\right)$, y construye un esbozo de su gráfica.

102. Encuentra la ecuación de una hipérbola en orientación estándar con focos en $F_1(1, 5)$ y $F_2(1, 7)$ y excentricidad 2, y construye un esbozo de su gráfica.

103. Encuentra la ecuación de la hipérbola en posición estándar con vértices en $V(0, \pm 2)$, excentricidad $e = 9$, y construye un esbozo de su gráfica.

104. Encuentra la ecuación de la hipérbola en posición estándar con focos en $F_1(0, -6)$ y $F_2(0, 6)$, y asíntotas dadas por las rectas $y = \pm x$.

105. Encuentra la ecuación de la hipérbola con orientación estándar con focos en $F_1(3, 6)$ y $F_2(11, 6)$, y excentricidad $\frac{4}{3}$.

106. Encuentra la ecuación de la hipérbola horizontal con orientación estándar, distancia del foco al centro $c = 6$ y asíntotas $y - 4 = \pm\frac{\sqrt{11}}{5}(x - 5)$, y construye un esbozo de su gráfica.

107. Encuentra la ecuación de la hipérbola vertical (es decir, con su eje paralelo al eje y)con distancia del centro al vértice $a = 3$ y asíntotas $y + 3 = \pm\frac{5}{2}(x + 3)$. Calcula la excentricidad de la hipérbola y construye un esbozo de su gráfica.

108. Encuentra la ecuación de la hipérbola vertical con distancia del centro al foco $\frac{\sqrt{26}}{2}$ y asíntotas $y + 8 = \pm 5(x - 6)$. Calcula su excentricidad y elabora un esbozo de su gráfica.

109. Determina la excentricidad de las siguientes hipérbolas:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$

b) $x^2 - y^2 + 6x + 34 = 0$

110. Determina la excentricidad de la hipérbola $4y^2 - 16x^2 + 24y + 64x - 92 = 0$.

111. Determina las coordenadas del centro y la excentricidad de la hipérbola $25y^2 - 9x^2 - 300y - 54x + 594 = 0$, y construye un esbozo de su gráfica.

112. Determina las coordenadas del centro y las asíntotas de la hipérbola $7x^2 - 18y^2 + 112x + 322 = 0$, y construye un esbozo de la gráfica de la hipérbola.

113. Determina la excentricidad y la posición de los vértices de la hipérbola $23y^2 - 14x^2 + 230y + 253 = 0$, y construye un esbozo de la gráfica de la hipérbola.

114. Determina la posición de los focos y las asíntotas de la hipérbola $3x^2 - 8y^2 - 36x - 32y + 52 = 0$, y construye un esbozo de su gráfica.

115. Determina la posición del centro, de los focos y de los vértices de la hipérbola $9y^2 - 14x^2 + 162y - 84x + 477 = 0$, y construye un esbozo de su gráfica.

116. Encuentra la ecuación en forma estándar de la hipérbola con orientación estándar con vértices en $V_1(-3, 6)$ y $V_2(3, 6)$ y excentricidad $e = \sqrt{10}$, y elabora un esbozo de su gráfica.

117. Encuentra la ecuación de la hipérbola que tiene centro en $C(-5, 7)$, un vértice en $V_2(-5, 9)$ y un foco en $F_2\left(-5, \dfrac{21}{2}\right)$. Determina su excentricidad y construye un bosquejo de su gráfica.

118. Encuentra la ecuación de la hipérbola en posición estándar, con eje focal paralelo al eje x, longitud del eje transverso 2 y excentricidad $e = \sqrt{2}$.

Bibliografía

Barnett, Raymond, A.; Ziegler, Michael R. y Byleen, Karl, E. (2000). *Precálculo: Funciones y gráficas*. 4a ed., México, McGraw-Hill.

Coburn, John, W. (2007). *Precalculus*, 1a ed., USA, McGraw-Hill.

Cohen, David (1998). *Precalculus with unit-circle trigonometry*, 3a ed., USA, Brooks/Cole Publishing Company.

Demana, Franklin, D.; Waits, Bert, K.; Foley, Gregory, D. y Kennedy, Daniel (2007). *Precálculo: gráfico, numérico y algebraico*. México, Pearson, Addison Wesley.

Larson, Ron y Hostetler, Robert (2008). *Precálculo*. 7a ed., México, Editorial Reverté.

Sokowski, Earl y Cole, Jeffery (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. 13a ed., México, Cengage Learning.

Stewart, James; Redlin, Lothar y Watson, Saleem (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. 6a ed., México, Cengage Learning.

Sullivan, Michael (2008). *Precalculus*, 8a ed., USA, Pearson, Prentice Hall.