

ESTUDIO HIDROLÓGICO Y MODELACIÓN DE AVENIDAS MÁXIMAS

Benito Mendoza T., PhD



ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN



Prueba de datos dudosos

Método Wáter Resources Council.

Los datos dudosos(outliers) son puntos de la información que se alejan significativamente de la tendencia de la información restante

$$x_H = \bar{x} + K_n * S$$

$$x_H = \bar{x} + K_n * S$$

$\bar{x}$ = media de los logaritmos de la muestra

S = desviación estándar de los logaritmos de la muestra

e^{x_H} = Umbral inferior

e^{x_L} = Umbral superior

Valores K_n para la prueba de datos dudosos

Tamaño de muestra n	K_n	Tamaño de muestra n	K_n	Tamaño de muestra n	K_n	Tamaño de muestra n	K_n
10	2.036	24	2.467	38	2.661	60	2.837
11	2.088	25	2.486	39	2.671	65	2.866
12	2.134	26	2.502	40	2.682	70	2.893
13	2.175	27	2.519	41	2.692	75	2.917
14	2.213	28	2.534	42	2.700	80	2.940
15	2.247	29	2.549	43	2.710	85	2.961
16	2.279	30	2.563	44	2.719	90	2.981
17	2.309	31	2.577	45	2.727	95	3.000
18	2.335	32	2.591	46	2.736	100	3.017
19	2.361	33	2.604	47	2.744	110	3.049
20	2.385	34	2.616	48	2.753	120	3.078
21	2.408	35	2.628	49	2.760	130	3.104
22	2.429	36	2.639	50	2.768	140	3.129
23	2.448	37	2.650	55	2.804		

Fuente: U. S. Water Resources Council, 1981. Esta tabla contiene valores de K_n de un lado con un nivel de significancia del 10% para la distribución normal.

$$K_n = -3.62201 + 6.2844n^{\frac{1}{4}} - 2.49835n^{\frac{1}{2}}n - 0.491436n^{\frac{3}{4}} - 0.037911n$$



Ajuste gráfico - Visualización

Probabilidad empírica. Weibull Asignar
a cada elemento de la
muestra una probabilidad de
excedencia de acuerdo a su posición,
ordenado de mayor a menor

$$P(x) = \frac{m}{N + 1}$$

m: es la posición (ranking) que se le asigna la
evento según la secuencia ordenada

N: tamaño de la muestra

Período de Retorno

*Es la inversa de la probabilidad de
excedencia*

$$T_R = \frac{1}{P(x)}$$

$$T_R = \frac{(N + 1)}{m}$$



ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN

Ajuste gráfico - Visualización

Factores de frecuencia

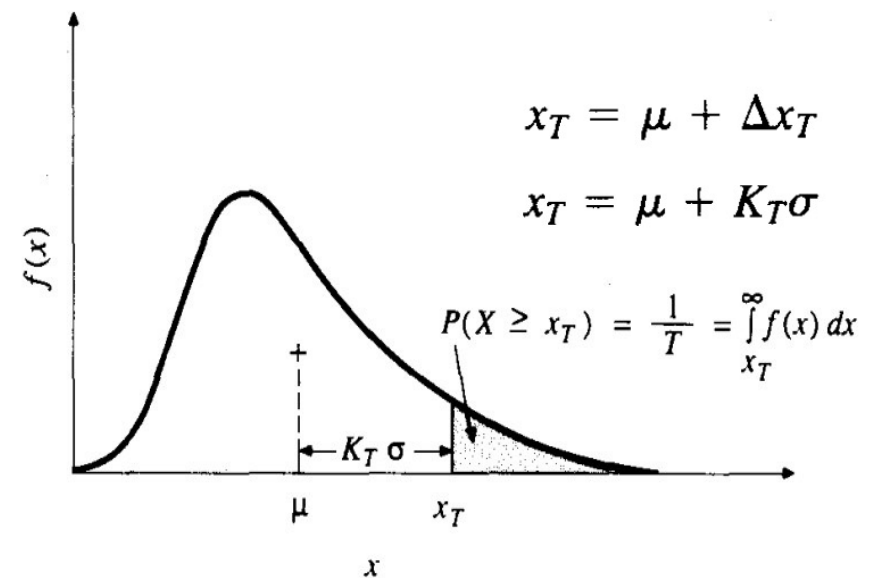
El calculo de eventos extremos requiere la inversa de la función de distribución de probabilidad . Algunas de estas distribuciones de probabilidad no son fácilmente invertibles.

Por ejemplo: Función Distribución de Gumbel

$$F(x) = \exp \left[-\exp \left(-\frac{x - u}{\alpha} \right) \right] \quad (-\infty \leq x \leq \infty)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= P(x \geq x_T) \\ &= 1 - P(x < x_T) \\ &= 1 - F(x_T) \end{aligned}$$

Un evento extremo se representa como la media mas una desviación, la cual es factor de frecuencia K_T multiplicado por la desviación estándar.





ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN

Ajuste gráfico – Visualización

Factor de Frecuencia de la Distribución Normal

$$w = \left[\ln \left(\frac{1}{p^2} \right) \right]^{1/2} \quad (0 < p \leq 0.5)$$

$$z = w - \frac{2.515517 + 0.802853w + 0.010328w^2}{1 + 1.432788w + 0.189269w^2 + 0.001308w^3}$$

Cuando $p > 0.5$, p es reemplazado por $1 - p$, y a z se le asigna signo negativo

Factor de Frecuencia de la Distribución EV1 Gumbel

$$K_T = -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \left\{ 0.5772 + \ln \left[\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right] \right\}$$



Ajuste gráfico - Visualización

Factor de Frecuencia de la distribución Pearson III

$$K_T = z + (z^2 - 1)k + \frac{1}{3}(z^3 - 6z)k^2 - (z^2 - 1)k^3 + zk^4 + \frac{1}{3}k^5$$

*Donde $k = C_s/6$, C_s = coeficiente de
asimetría*

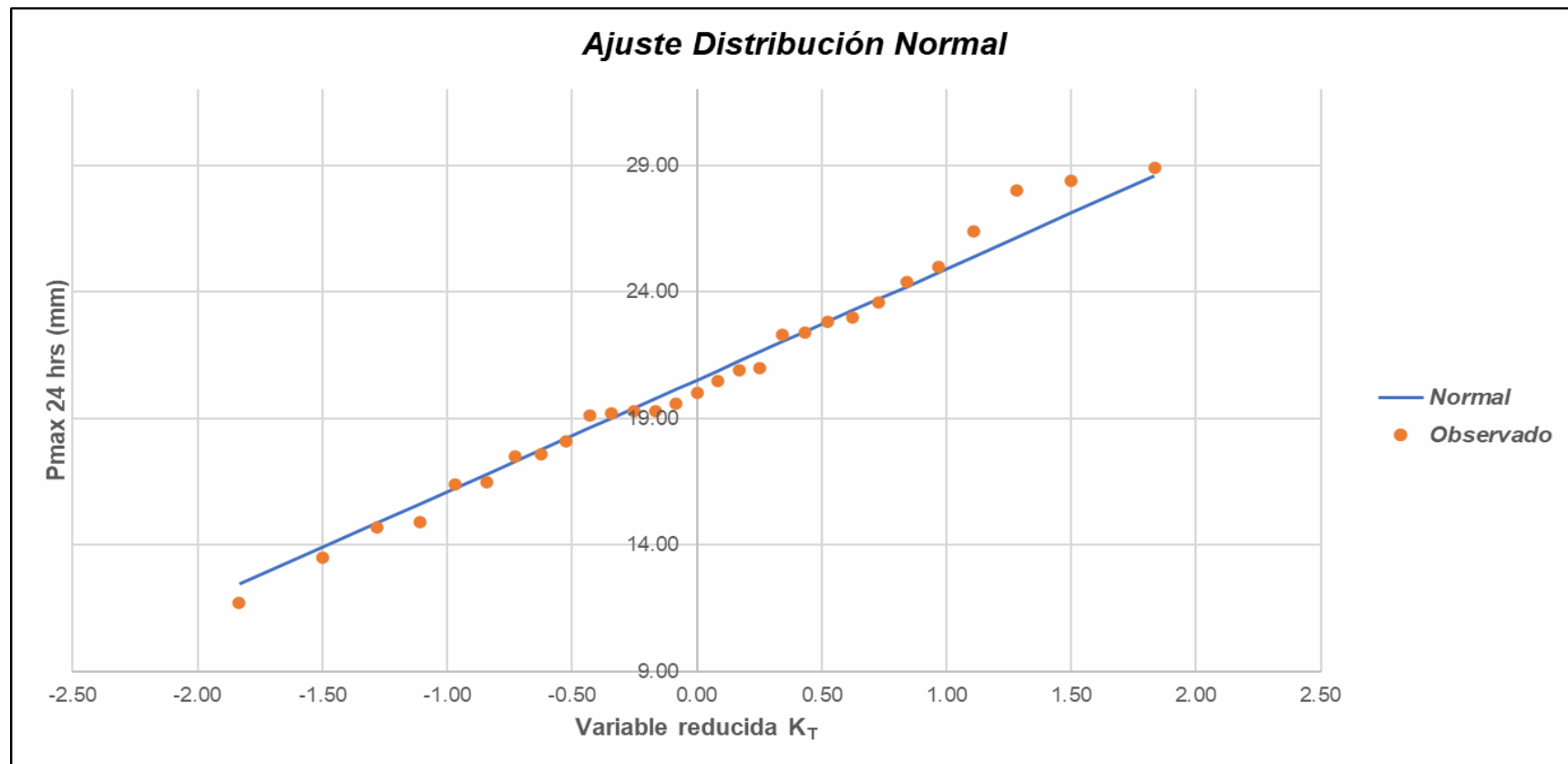
$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

$$C_s = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{(n-1)(n-2)s^3}$$



ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN

Ajuste Gráfico - Visualización





ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN

Prueba de Bondad de Ajuste

Prueba Kolmogorov-Smirnov

Esta prueba consiste en comparar el máximo valor absoluto de la diferencia entre la función de distribución de probabilidad observada y la estimada

$$D = \max |F_0(x_m) - F(x_m)|$$

$$F_0(x_m) = 1 - \frac{m}{N + 1}$$

***m:** es la posición (ranking) que se le asigna la evento según la secuencia ordenada*

***N:** tamaño de la muestra*

Tamaño muestral N	Nivel de significación α				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.21	0.22	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.20	0.22	0.24	0.29
35	0.18	0.19	0.21	0.23	0.27
N > 35	$\frac{1.07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{N}}$



ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN

Distribuciones de Probabilidad

Distribución Normal

Función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Función distribución de probabilidad (FDA)

$$F(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$$

*Estimación de
Parámetros*

$$\bar{X} = \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$S = \sigma = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$



ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN

Distribuciones de Probabilidad

Distribucion Log-Normal

Función de densidad

$$f(x) = \left(\frac{1}{x \cdot \sigma_y \cdot \sqrt{2\pi}} \right) \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right]$$

Función distribución de probabilidad (FDA)

$$F(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ \quad Z = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{\ln x - \mu_y}{\sigma_y}$$

Estimación de Parámetros

$$\mu_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\ln x_i - \mu_y \right)^2$$



ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN

Distribuciones de Probabilidad

Distribución EV1-Gumbel

Función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x-\mu}{\alpha}} e^{-\frac{x-\mu}{\alpha}}$$

Función distribución de probabilidad (FDA)

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\alpha}}}$$

α = *Parámetro de escala*

μ = *Parámetro de posición, llamado valor central o moda*

Estimación de Parámetros

$$\alpha = \frac{\sqrt{6}}{\pi} S$$

$$\mu = \bar{x} - 0.57721567\alpha$$



ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN

Distribuciones de Probabilidad

Distribución Gamma de 3 parámetros o

Pearson tipo III

Función de densidad

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^{\gamma-1} e^{-\frac{(x-x_0)}{\beta}}}{\beta^{\gamma} \Gamma(\gamma)}$$

*Función distribución de probabilidad
(FDA)*

$$F(Z) = \int_{x_0}^x \frac{(x - x_0)^{\gamma-1} e^{-\frac{(x-x_0)}{\beta}}}{\beta^{\gamma} \Gamma(\gamma)} dx$$

$$\begin{aligned} x_0 &\leq x < \infty \\ -\infty &< x_0 < \infty \\ 0 &< \beta < \infty \\ 0 &< \gamma < \infty \end{aligned}$$

Variable reducida y Pearson III

$$y = \frac{(x - x_0)}{\beta}$$

Distribución acumulada Pearson III

$$G(y) = \int_0^y \frac{y^{\gamma-1} e^{-y}}{\Gamma(\gamma)} dy$$

x_0 = *Parámetro de posición*

β = *Parámetro de escala*

γ = *Parámetro de forma*



ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN

Distribución Gamma de 3 parámetros o Pearson tipo III

Estimación de parámetros

$$\gamma = \frac{4}{C_s^2} \quad \beta = \frac{C_s S}{2}$$

$$x_0 = \bar{x} - \frac{2S}{C_s}$$

x_0 = Parámetro de posición

β = Parámetro de escala

γ = Parámetro de forma

Coefficiente de asimetría

$$C_s = g = \frac{N^2 M_3}{(N-1)(N-2)S^3}$$

$$M_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^3}{N}$$



ANÁLISIS DE DATOS DE PRECIPITACIÓN

Estadístico de Kolmogorov-Smirnov ($D_{\max}$)

Estimación de parámetros

$$D_{\max} \approx \frac{\sqrt{-\frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n} \quad \text{Si } n \leq 35$$

$$D_{\max} \approx \frac{\sqrt{-\frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \quad \text{Si } n > 35$$

Tamaño muestral N	Nivel de significación α				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.21	0.22	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.20	0.22	0.24	0.29
35	0.18	0.19	0.21	0.23	0.27
N > 35	$\frac{1.07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{N}}$



Precipitación máximas anuales en 24 horas

Con la distribución de Probabilidad que mejor se ajusta, calculamos la precipitación máxima para los siguientes periodos de retorno

$$X_T = \mu + K_T \sigma$$

T	P(X≤XT)	PEARSON III		P max (mm)	P _{MAX} (corregida) mm
		K _T	x _T		
2	0.5000	-0.0227	20.42	20.42	23.07
3	0.6667	0.4118	22.33	22.33	25.23
5	0.8000	0.8342	24.19	24.19	27.34
10	0.9000	1.2952	26.22	26.22	29.63
20	0.9500	1.6826	27.93	27.93	31.56
25	0.9600	1.7967	28.43	28.43	32.12
50	0.9800	2.1262	29.88	29.88	33.76
100	0.9900	2.4262	31.20	31.20	35.26
200	0.9950	2.7040	32.42	32.42	36.64
300	0.9967	2.8580	33.10	33.10	37.41
500	0.9980	3.0446	33.92	33.92	38.33
1000	0.9990	3.2862	34.99	34.99	39.54

P_{MAX} = Coeficiente de corrección de 1.13 para datos registrados unavez al día. Organización Meteorológica Mundial (OMM)



ELABORACIÓN DE CURVAS IDF

Tormentas de diseño

Patrón de precipitación para el diseño hidrológico. La cual es utilizada como dato de ingreso de modelos precipitación-escorrentía y transito de caudales

Curvas de Intensidad – Duración - Frecuencia

Metodología de Dyck y Peschke

Cuando no se cuente con registros pluviógrafos que permitan obtener las intensidades máxima, se pueden completar datos horarios en base a la precipitación máxima en 24 horas

$$P_d = P_{24} \left(\frac{d}{1440} \right)^{0.25}$$



ELABORACIÓN DE CURVAS IDF

$$I = \frac{KT^m}{d^n}$$

$$\log I = \log k + m \log T - n \log d$$

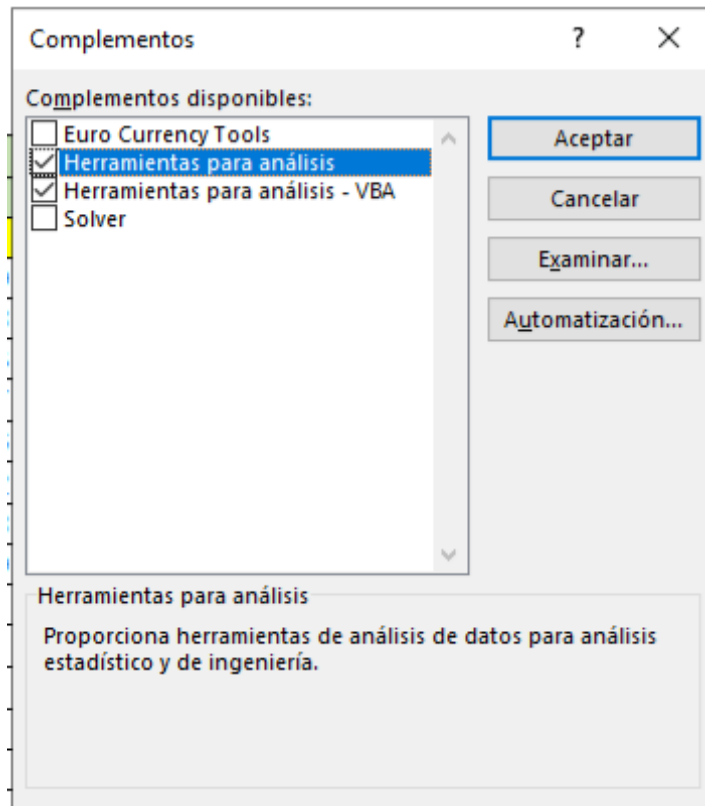
$$y = a_0 + (m * x_1) - (n * x_2)$$

Regresión lineal múltiple y, x_1, x_2

$$y = \log I$$

$$x_1 = \log T$$

$$x_2 = \log d$$



- **Activar complementos de MS Excel**
Herramienta de Análisis



HIETOGRAMA DE PRECIPITACIÓN

DURACION	INTENSIDAD	PROFUNDIDA ACUMULADA	PROFUNDIDAD INCREMENTAL
min	mm/hr	mm	mm
60	16.03	16.03	16.03
120	9.53	19.06	3.03
180	7.03	21.09	2.03
240	5.67	22.67	1.57
300	4.79	23.97	1.30
360	4.18	25.09	1.12
420	3.72	26.07	0.99
480	3.37	26.96	0.89
540	3.08	27.76	0.81
600	2.85	28.50	0.74
660	2.65	29.19	0.69
720	2.49	29.83	0.64
780	2.34	30.44	0.60
840	2.21	31.00	0.57
900	2.10	31.54	0.54
960	2.00	32.06	0.51
1020	1.91	32.55	0.49
1080	1.83	33.01	0.47
1140	1.76	33.46	0.45
1200	1.69	33.90	0.43
1260	1.63	34.31	0.42
1320	1.58	34.71	0.40
1380	1.53	35.10	0.39
1440	1.48	35.48	0.38

Para el periodo de retorno elegido para el proyecto obtenemos las intensidades de diseño del proyecto. Por ejemplo para un $T = 140$ años, tenemos la siguiente distribución de lluvia para cada hora, con el fin de conformar una tormenta

$$I = \frac{231.2797 * 140^{0.08125}}{d^{0.75}}$$

Profundidad Acumulada → Intensidad x Duración

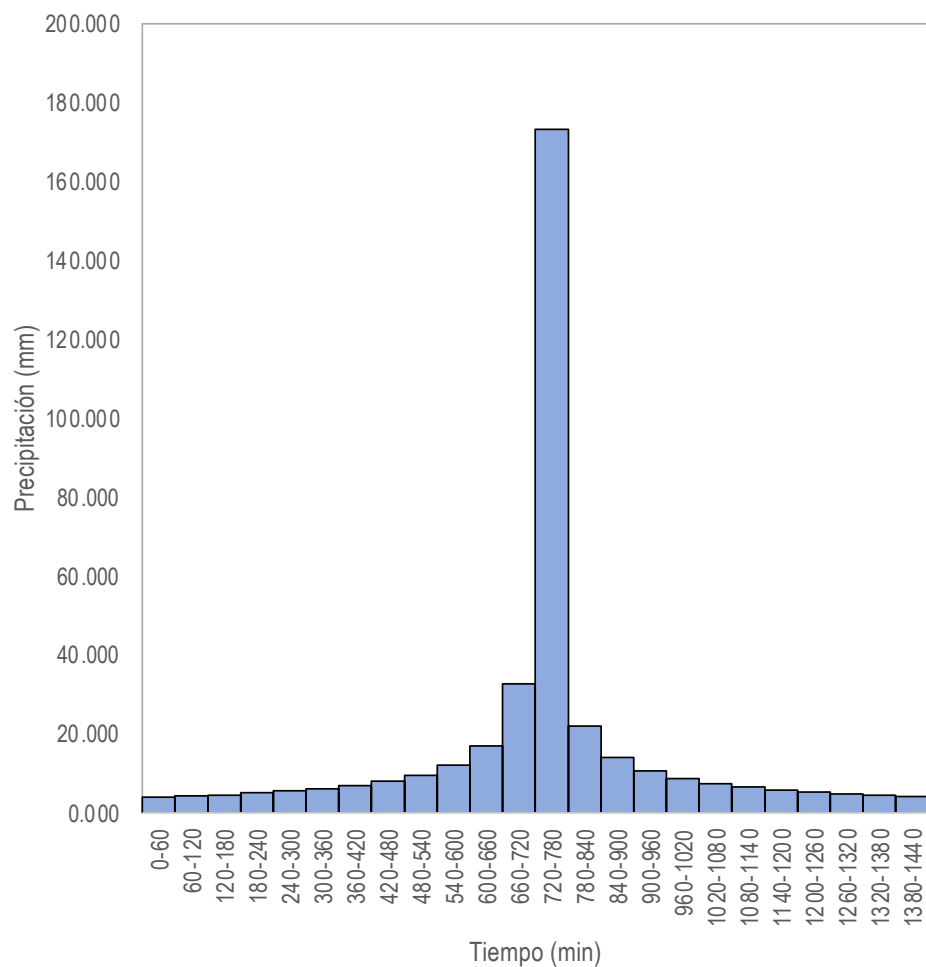
Profundidad Incremental → Prof. Acumulada(i+1) - Prof. Acumulada (i)



HIETOGRAMA DE PRECIPITACIÓN

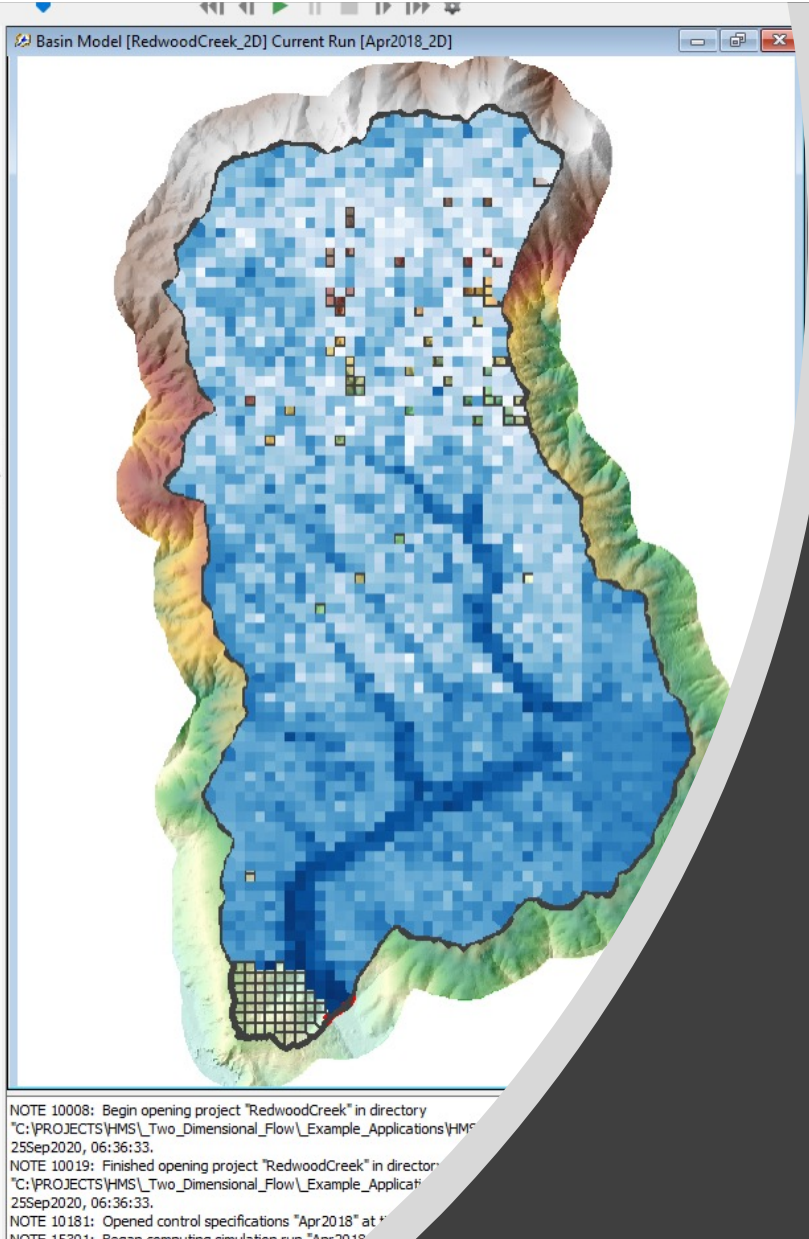
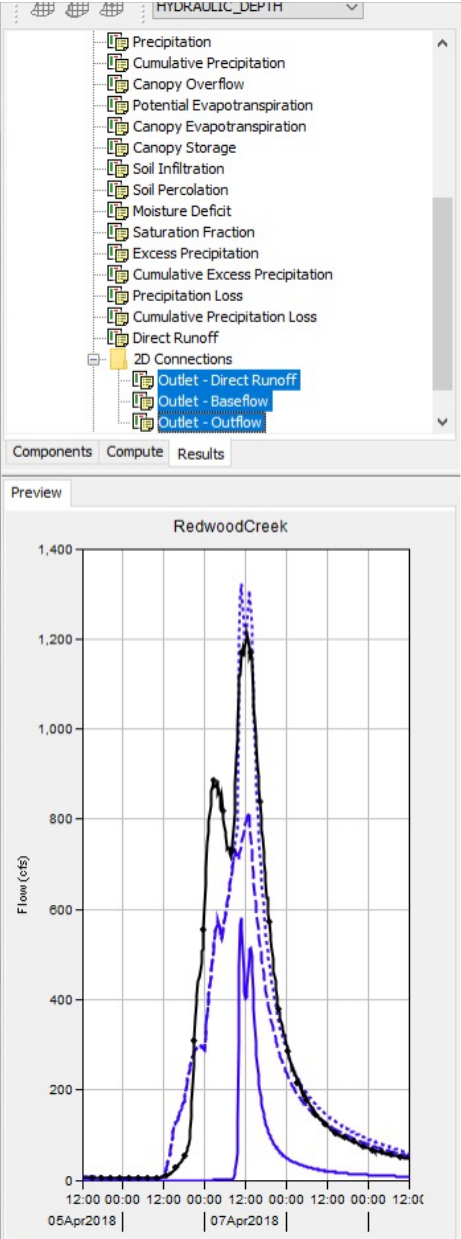
Método del Bloque alterno

Para generar esta secuencia de profundidades incrementales se sigue el orden de la siguiente imagen



TIEMPO	PRECIPITACION
min	mm
0-60	0.375
60-120	0.401
120-180	0.432
180-240	0.468
240-300	0.513
300-360	0.569
360-420	0.642
420-480	0.741
480-540	0.885
540-600	1.118
600-660	1.573
660-720	3.033
720-780	16.028
780-840	2.033
840-900	1.300
900-960	0.986
960-1020	0.806
1020-1080	0.687
1080-1140	0.603
1140-1200	0.539
1200-1260	0.490
1260-1320	0.449
1320-1380	0.416
1380-1440	0.388

1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2



Gracias