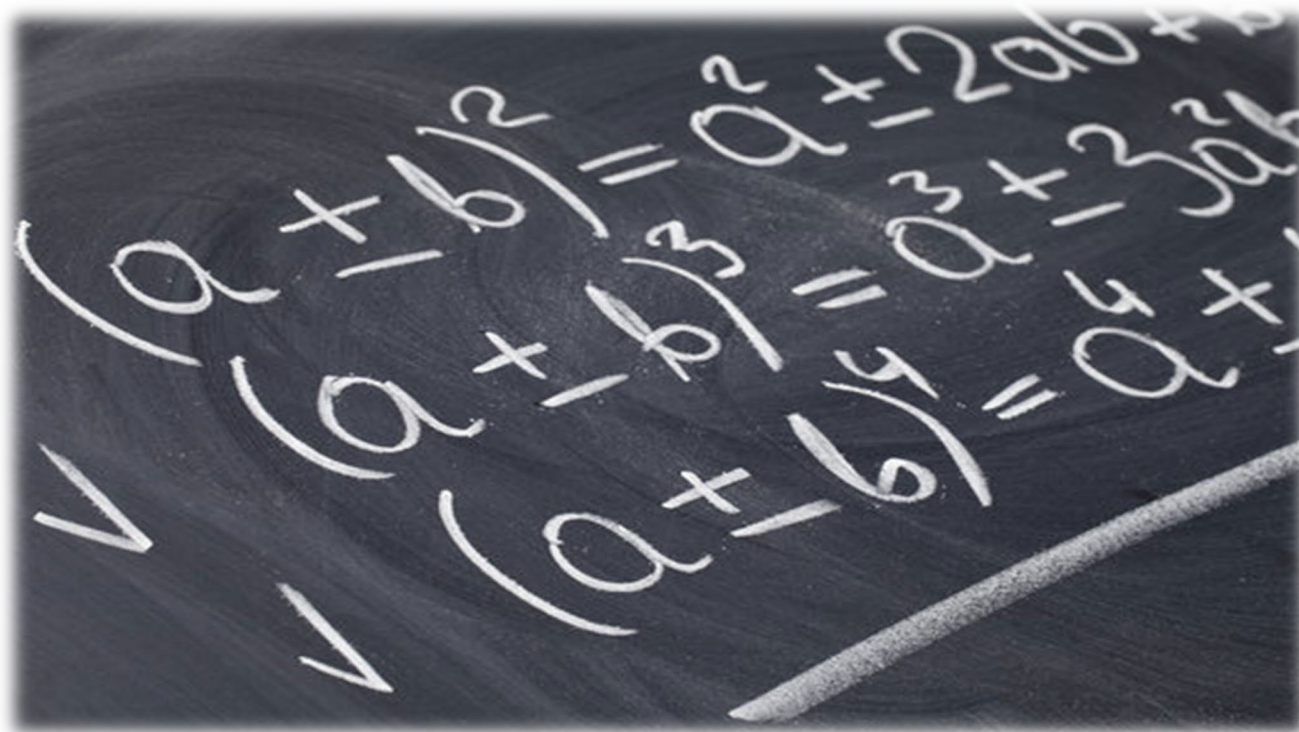


TEMA

2

Matemática básica para la física



Resultado de aprendizaje: Demuestra dominio en el uso de álgebra y geometría necesarios para el estudio de la física.

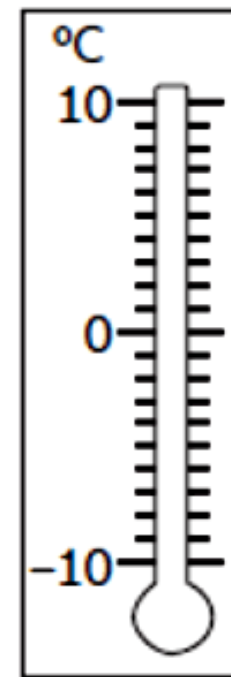
Repaso de aritmética

Las matemáticas son el lenguaje de la física. Los fundamentos son importantes y que ciertas habilidades matemáticas son indispensables. Por ello, es necesario tener claros varios conceptos.

Números con signo: A menudo se deberán trabajar con magnitudes positivas y negativas. En estos casos, el número se refiere a una *magnitud*, mientras que el signo indica el *sentido* con respecto al cero.

Por ejemplo, una temperatura de 10°C indica que la temperatura está 10 grados por encima de cero; mientras que una temperatura de -10°C indica que está 10 grados por debajo de cero.

El valor de un número sin el signo representa el **valor absoluto**.



Para operar números con signo, se deben seguir las siguientes reglas:

Regla de la suma: Para sumar dos números del mismo signo, se suman sus valores absolutos y se coloca el signo común. Para sumar dos números de distinto signo, se encuentra la diferencia entre sus valores absolutos y se coloca el signo del número con mayor valor.

Regla de la resta: Para restar un número, b , con signo de otro número, a , con signo, cambiamos el signo de b y luego sumamos este número a a aplicando la regla de la suma.

Regla de la multiplicación: Si dos factores tienen signos iguales, su producto es positivo; si tienen signos diferentes, su producto es negativo.

Regla de la división: el cociente de dos números con signos iguales es positivo y el cociente de dos números con signos diferentes es negativo.

Una fuente importante de errores en la resolución de problemas de física es el uso de los números con signo; por lo que es conveniente aplicar estas reglas adecuadamente.

Ejemplo 2.1

Resolver las operaciones propuestas; siguiendo las reglas apropiadas:

- $(+2) + (+5)$
- $(-2) + (6)$
- $(-4) - (-6)$
- $(+6) - (+8)$
- $(-3) - (+7)$
- $(-15) - (+18)$
- $(-4) - (+3) - (-2)$
- $(-6) + (-7) - (+4)$
- $(-2)(-3)$
- $(-16)(+2)$
- $(-6)(-3)(-2)$
- $(-6)(+2)(-2)$
- $(-3)(-4)(-2)(2)$
- $(-6)(2)(3)(-4)$
- $(-6) \div (-3)$
- $(-14) \div (+7)$
- $(+16) \div (-4)$
- $(+18) \div (-6)$

Repaso de álgebra

El álgebra es en realidad una generalización de la aritmética, en la que se usan letras para reemplazar números. En física, con frecuencia es necesario resolver (despejar) una fórmula o una ecuación para una letra que es sólo parte de la fórmula.

Básicamente, una **ecuación** es un enunciado matemático que dice que dos expresiones son iguales. Por ejemplo,

$$2b + 4 = 3b - 1$$

es una ecuación. En este caso, es evidente que la letra b representa la cantidad desconocida o, mejor dicho, la **incógnita**. Si sustituimos $b = 5$ en ambos lados o miembros de esta ecuación, obtenemos $14 = 14$. Por tanto, $b = 5$ es la **solución** de la ecuación.

Para despejar una incógnita de una ecuación, se recomienda seguir los siguientes pasos:

- 1) **Identificar la incógnita:** Determinar la variable que se desea despejar.
- 2) **Simplificar la ecuación:** Reducir términos semejantes y eliminar paréntesis si es necesario.
- 3) **Aislar la incógnita:** Aplicar operaciones inversas de manera sistemática para dejar la variable sola en un lado de la ecuación.
- 4) **Mantener el equilibrio:** Toda operación realizada en un lado debe aplicarse igualmente en el otro.
- 5) **Verificar el resultado:** Sustituir la solución en la ecuación original para comprobar su validez.

Si se realiza la misma serie de operaciones en cada miembro de una ecuación es posible obtener finalmente una igualdad con una sola letra en el miembro izquierdo. En este caso, se dice que hemos resuelto (o despejado) la ecuación para esa letra.

Ejemplo 2.2

Resolver las ecuaciones para las incógnitas sugeridas:

- $5m - 16 = 3m - 4$

- $\frac{p}{3} = \frac{2}{6}$

- $4m = 2(m - 4)$

- $\frac{96}{x} = 48$

- $3(m - 6) = 6$

- $R^2 = (4)^2 + (3)^2$

- $\frac{x}{3} = (4)(3)$

- $\frac{1}{2} = \frac{1}{P} + \frac{1}{6}$

Al resolver problemas de física, con frecuencia se necesita obtener una solución para una ecuación de segundo grado cuya incógnita está elevada a la segunda potencia. Por ejemplo:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad F = m \frac{v^2}{R}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones cuadráticas**. Hay varios métodos para resolver este tipo de ecuaciones, pero quizá para los problemas de física el más útil sea aplicar el de la **fórmula cuadrática**:

Dada una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$; con $a \neq 0$, sus soluciones (también llamados ceros o raíces) se pueden hallar con la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 2.3

Se lanza una pelota hacia arriba con una rapidez inicial de $v_0 = 20 \text{ m/s}$. La aceleración debida a la gravedad es $g = -9,80 \text{ m/s}^2$. Si se tiene un desplazamiento de $y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$, determine los dos instantes en que el desplazamiento es $y = 12 \text{ m}$ arriba del punto donde se suelta la pelota.

Actividades en clase

1. En las siguientes ecuaciones, despeje el término que se solicita:

$$V = IR; \quad R$$

$$PV = nRT; \quad T$$

$$F = ma; \quad a$$

$$F = \frac{mv^2}{R}; \quad v$$

$$x = \frac{1}{2}at^2; \quad a$$

$$C = \frac{Q^2}{2V}; \quad V$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \quad R$$

$$mv_2 - mv_1 = Ft; \quad v_2$$

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}; \quad T_2$$

$$v_f = v_0 + at; \quad a$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}; \quad L$$

$$P = \rho gh; \quad h$$

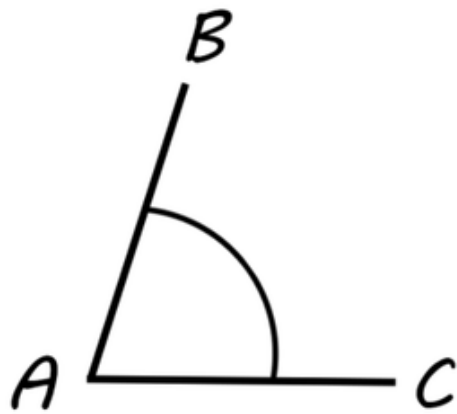
$$V - \frac{Q}{C} = iR; \quad C$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}; \quad p$$

$$\Delta t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad v$$

Geometría básica

Un **ángulo** es la abertura comprendida entre 2 rectas o semirrectas que tienen un punto en común llamado **vértice**.



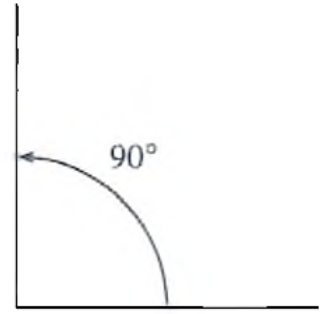
Un ángulo se representa como $\angle A$, $\sphericalangle A$, $\angle BAC$ o mediante letras del alfabeto griego.

- Si un ángulo se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (sentido antihorario), entonces es **positivo**.
- Si un ángulo se mide en el mismo sentido de las manecillas del reloj (sentido horario), entonces es **negativo**.

Los ángulos usualmente se miden en **grados**. Un grado ($^{\circ}$) es una parte de un círculo igual a $1/360$ de una revolución completa (rev). Por tanto, en 1 rev hay 360° :

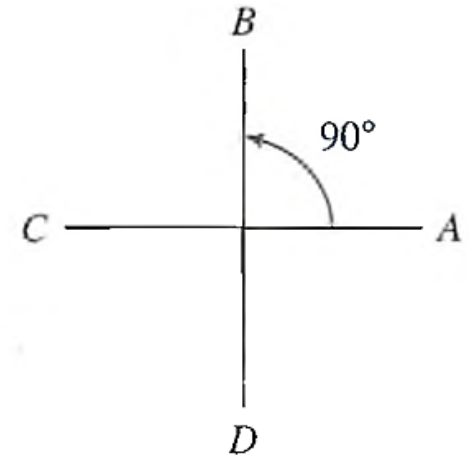
$$1^{\circ} = \frac{1}{360} \text{ rev} \qquad 1 \text{ rev} = 360^{\circ}$$

El ángulo que corresponde a un cuarto de 1 rev, es decir, a 90° , recibe un nombre especial: **ángulo recto**.



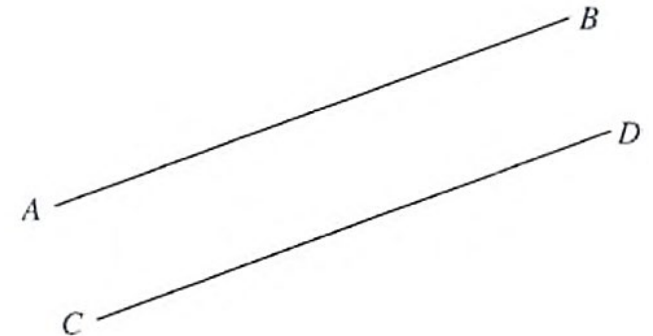
Cuando dos rectas se intersecan de manera que el ángulo formado entre ellas es recto, se dice que son **perpendiculares**.

La recta CA de la figura es perpendicular a la recta BD. Esto puede escribirse como: $CA \perp AB$ donde $\perp$ significa “es perpendicular a”.



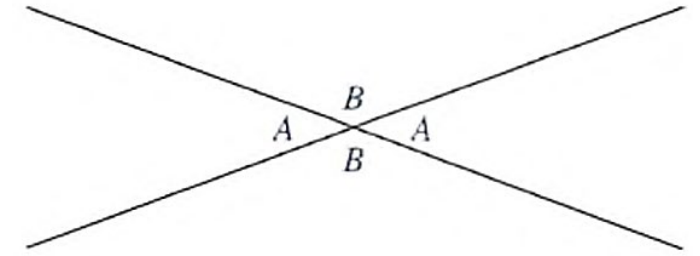
Se dice que dos rectas son **paralelas** si nunca se intersecan, por más que se prolonguen sus extremos.

En la figura la recta AB es paralela a la línea CD, lo cual se escribe así: $AB \parallel CD$, donde $\parallel$ significa “es paralela a”.

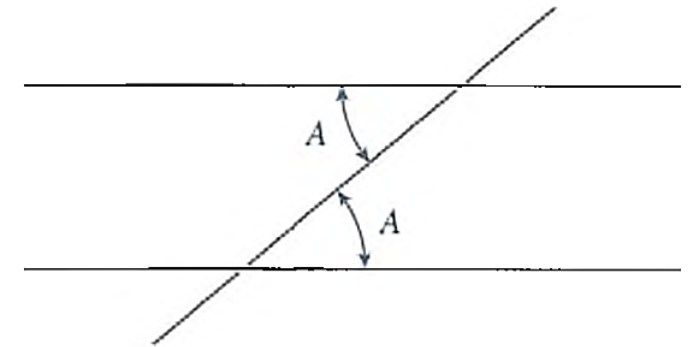


La aplicación de la geometría requiere conocer sólo algunas reglas generales, de las cuales se describirán tres de las más importantes:

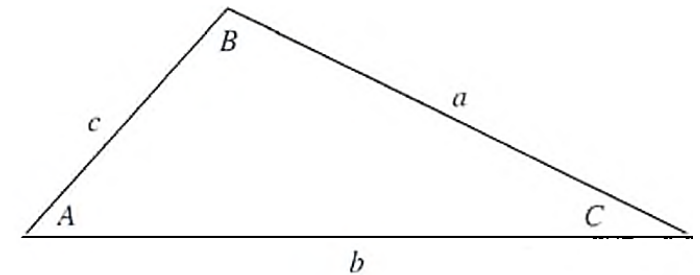
Cuando dos rectas se intersecan (se cortan), los ángulos opuestos por el vértice son iguales.



Cuando una recta interseca (se corta con) dos rectas paralelas, los ángulos alternos internos son iguales.



En cualquier tipo de triángulo, la suma de los ángulos internos es igual a 180° .



Respecto a la tercera regla, cabe señalar que en un triángulo rectángulo (aquellos que tienen un ángulo recto), la suma de sus otros dos ángulos es igual a 90° .

Ejemplo 2.4

Aplique las reglas de la geometría para determinar los ángulos desconocidos en el caso ilustrado en la figura. Nótese que $RQ \perp MC$ y $NF \perp RP$.

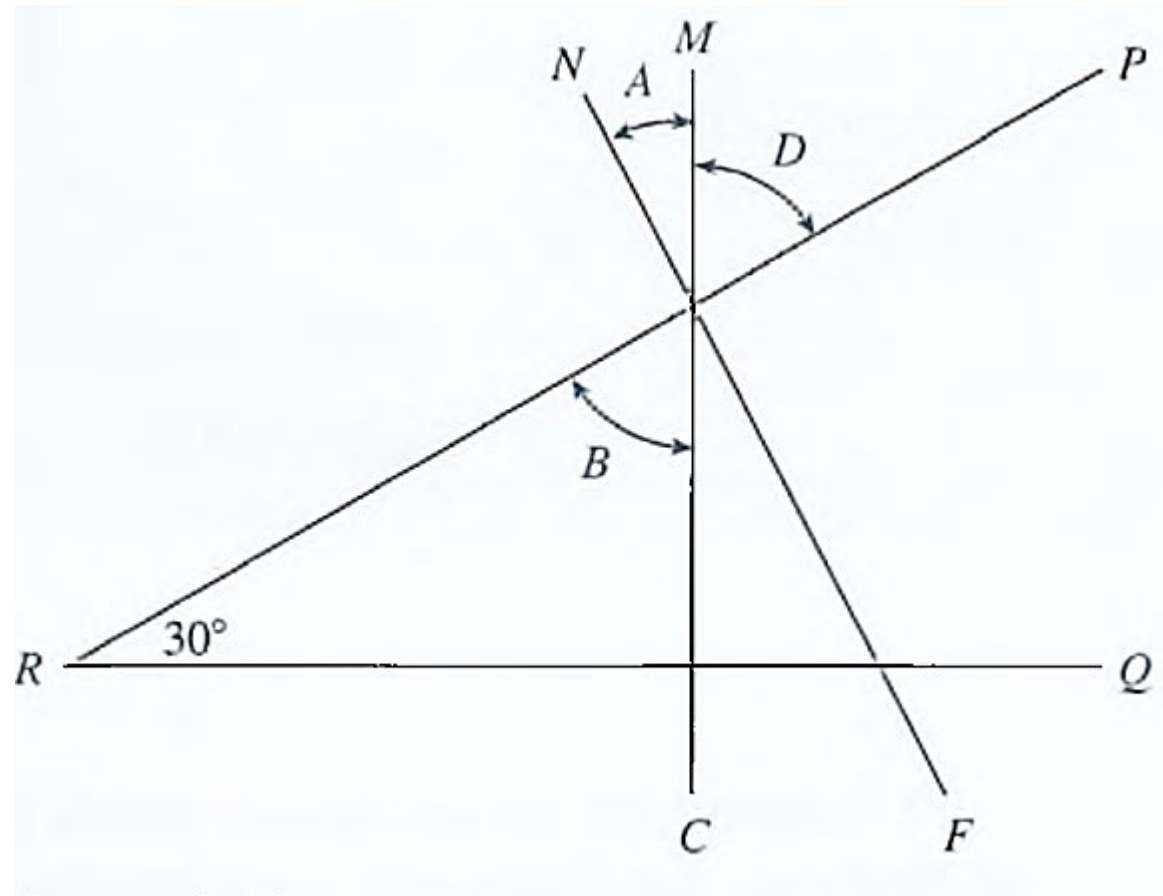
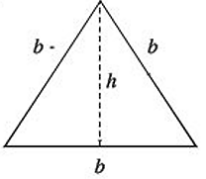
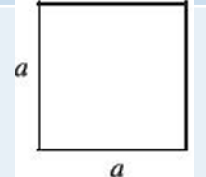
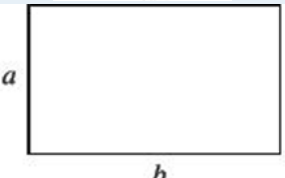
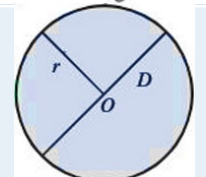
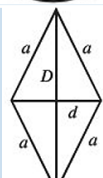
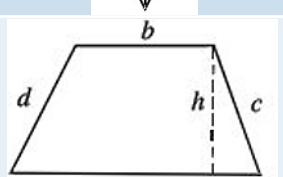
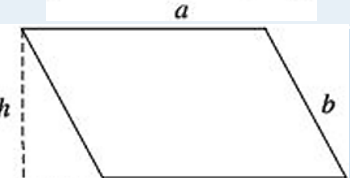
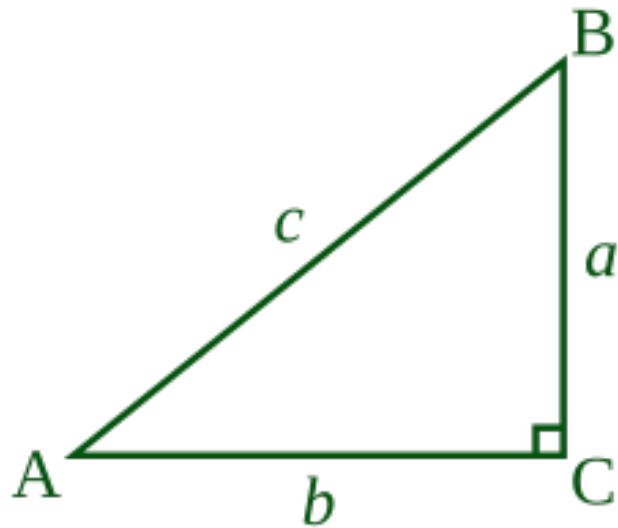


Gráfico	Nombre	Perímetro	Área	Simbologías
	Triángulo	$P = L + L + L$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	L : cada lado del triángulo b : base del triángulo h : altura
	Cuadrado	$P = 4a$	$A = a \cdot a = a^2$	a : cada lado del cuadrado
	Rectángulo	$P = 2a + 2b$	$A = b \cdot a$	a : altura del rectángulo b : base del rectángulo
	Círculo	$P = D\pi$ $P = 2\pi R$	$A = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$	D : diámetro R : radio
	Rombo	$P = 4a$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$	a : cada lado del rombo D : diagonal mayor d : diagonal menor
	Trapezio	$P = a + b + c + d$	$A = \frac{(a + b)h}{2}$	a y b : bases mayor y menor c y d : lados del trapezio h : altura
	Romboide	$P = 2b + 2c$	$A = c \cdot h$	c y b : lados del romboide h : altura

Resolución de triángulos rectángulos

Un triángulo rectángulo consta de 6 elementos:



- **Un ángulo recto (C):** ángulo de 90° .
- **Dos ángulos agudos (A y B):** ángulos menores a 90° . La suma de ambos es de 90° .
- **La hipotenusa (c):** lado más largo de un triángulo rectángulo.
- **El cateto opuesto (a con respecto a A):** lado que está frente a un ángulo y no tiene contacto con este.
- **El cateto adyacente (b con respecto a A):** lado que está en contacto con el ángulo y no es la hipotenusa.

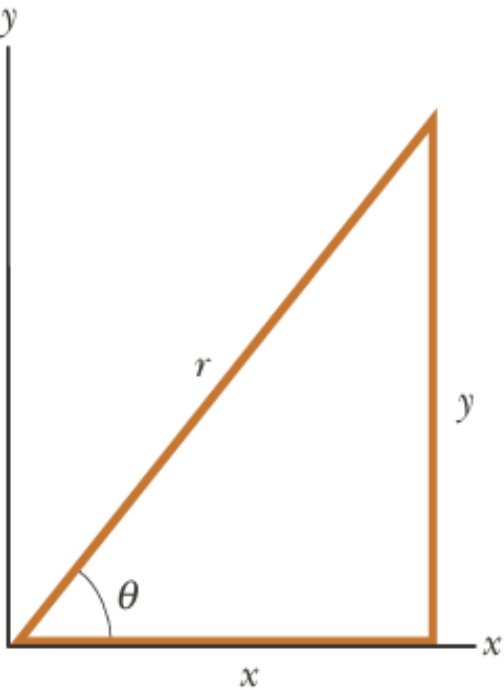
Resolver un triángulo rectángulo implica determinar todos los elementos de este. Para ello, es necesario conocer al menos 3 elementos, de los cuales al menos uno debe ser un lado.

Para la resolución de triángulos rectángulos se aplica:

(a) El teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

(b) Funciones trigonométricas: En todo triángulo rectángulo, las principales funciones trigonométricas de un ángulo agudo son:



Función	Símbolo	Triángulo rectángulo	Fórmula
Seno	$sen \theta$	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{y}{r}$
Coseno	$cos \theta$	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{x}{r}$
Tangente	$tan \theta$	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\frac{y}{x}$

Ejemplo 2.5

En el triángulo rectángulo ABC, determinar:

(a) B en términos de a , b ;

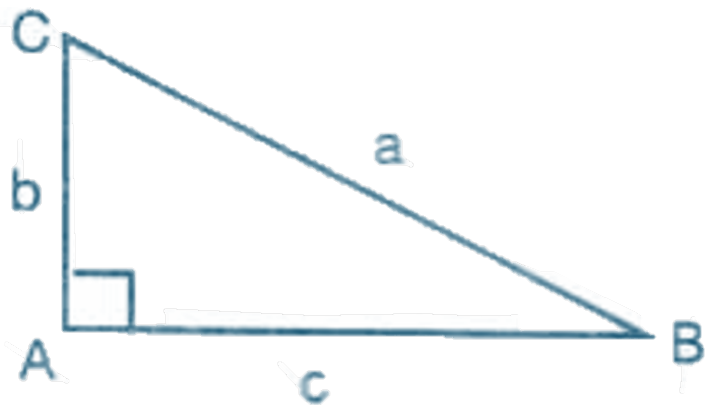
(b) b en términos de a , c ;

(c) a en términos de c , C ;

(d) C en términos de b , c ;

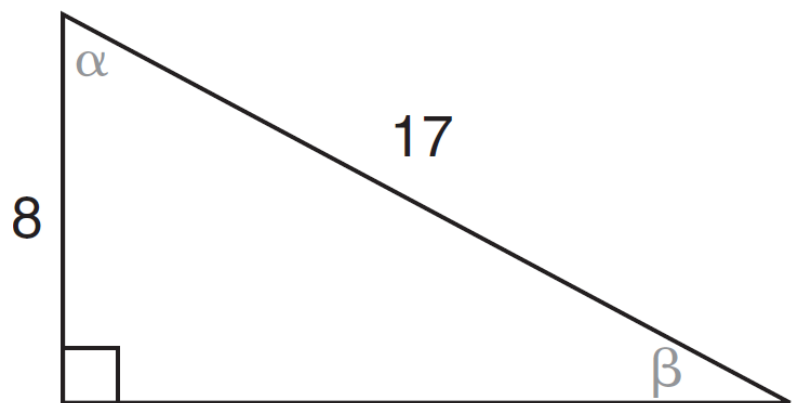
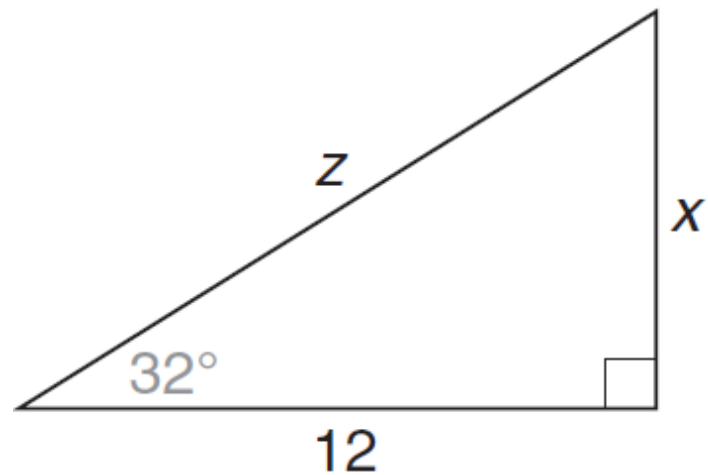
(e) b en términos de c , B ;

(f) c en términos de a , C .



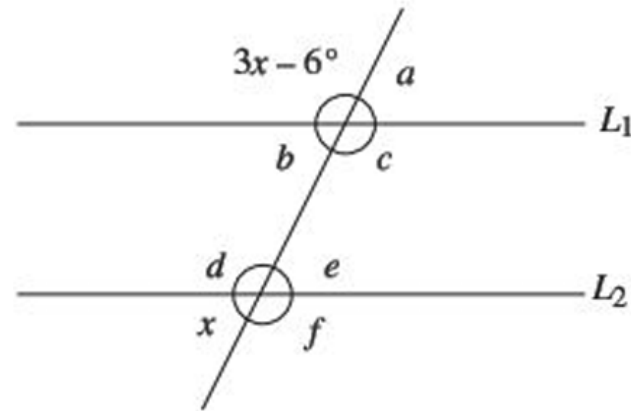
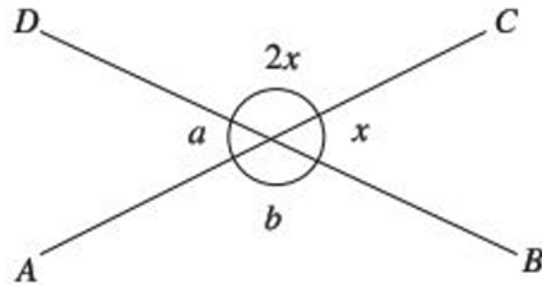
Ejemplo 2.6

Resolver los siguientes triángulos rectángulos:

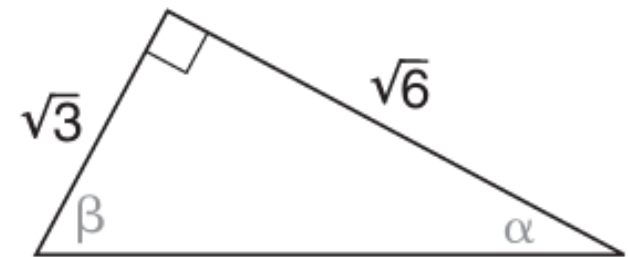
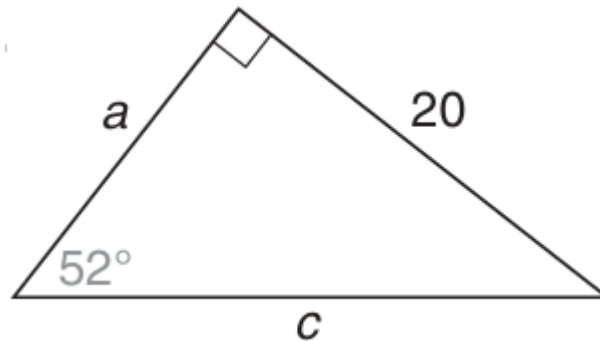
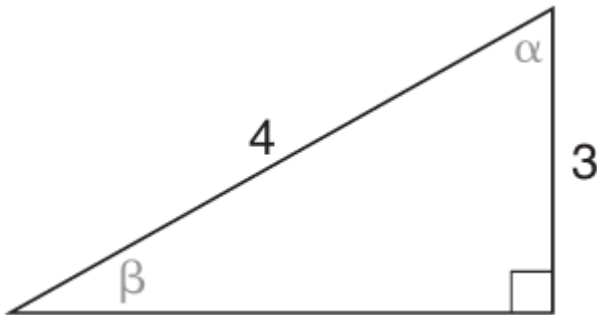


Actividades en clase

1. Calcule los ángulos que se indican en las figuras:



2. Resolver los triángulos rectángulos:



Notación científica

Es importante recordar algunas de las reglas necesarias para trabajar con potencias:

Propiedades	Fórmula
Cuando se multiplican dos cantidades de la misma base su producto se obtiene sumando algebraicamente los exponentes.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Cuando la base no es cero, un exponente negativo se define como el inverso de la potencia con exponente positivo.	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
Cualquier base diferente de cero elevada a la potencia cero es igual a 1.	$a^0 = 1; \quad a \neq 0$
El cociente de dos cantidades diferentes de cero con la misma base se halla efectuando la resta algebraica de sus exponentes.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Al elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
La potencia de un producto o un cociente se obtienen aplicando el exponente a cada uno de los factores.	$(ab)^m = a^m \cdot b^m$
Las raíces de una potencia se calculan aplicando la definición de exponentes fraccionarios.	$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Es muy común que en el ámbito científico existan cantidades muy grandes o muy pequeñas, lo que puede dificultar tanto su escritura como su lectura.

Por ello, se opta por trabajar con potencias de base 10 para señalar la posición del punto decimal sin tener que manejar un gran número de ceros al realizar cada uno de los cálculos. A este proceso se le conoce como **notación científica**.

La notación científica de un número real es su expresión como el producto de un número mayor o igual que 1 y menor que 10, por una potencia de 10.

Considere los múltiplos de 10 siguientes y algunos ejemplos de su utilización en la notación científica:

- $0,001 = 1 \times 10^{-3}$
- $0,01 = 1 \times 10^{-2}$
- $0,1 = 1 \times 10^{-1}$
- $1 = 1 \times 10^0$
- $10 = 1 \times 10^1$
- $100 = 1 \times 10^2$
- $1000 = 1 \times 10^3$
- $2,34 \times 10^{-3} = 0,00234$
- $2,34 \times 10^{-2} = 0,0234$
- $2,34 \times 10^{-1} = 0,234$
- $2,34 \times 10^0 = 2,34$
- $2,34 \times 10^1 = 23,4$
- $2,34 \times 10^2 = 234$
- $2,34 \times 10^3 = 2340$

Para escribir en notación científica un número mayor que 1 debe determinar el número de veces que es preciso mover el punto decimal a la izquierda para obtener la notación abreviada. Por ejemplo:

$$7\,000\,000\,000 \rightarrow 7 \cdot 10^9$$

$$35\,700 \rightarrow 3,57 \cdot 10^4$$

Cuando los números son pequeños, el punto decimal se recorre hacia la derecha hasta dejar como parte entera la primera cifra significativa y el exponente del número 10 es de signo negativo. Por ejemplo:

$$0,00000125 \rightarrow 1,25 \cdot 10^{-6}$$

$$0,176 \rightarrow 1,76 \cdot 10^{-1}$$

Para convertir la notación científica en notación decimal simplemente se invierte el proceso: se realiza la multiplicación por la potencia de 10 desarrollada.

La notación científica y las potencias de base 10 son muy importantes y significativas cuando se trabaja con unidades métricas, como se verá en la conversión de unidades.

Ejemplo 2.7

Convertir a notación científica:

- 4 350
- 16 000
- 350 000 000
- 0,00428
- 0,000000003
- 0,0000000000569

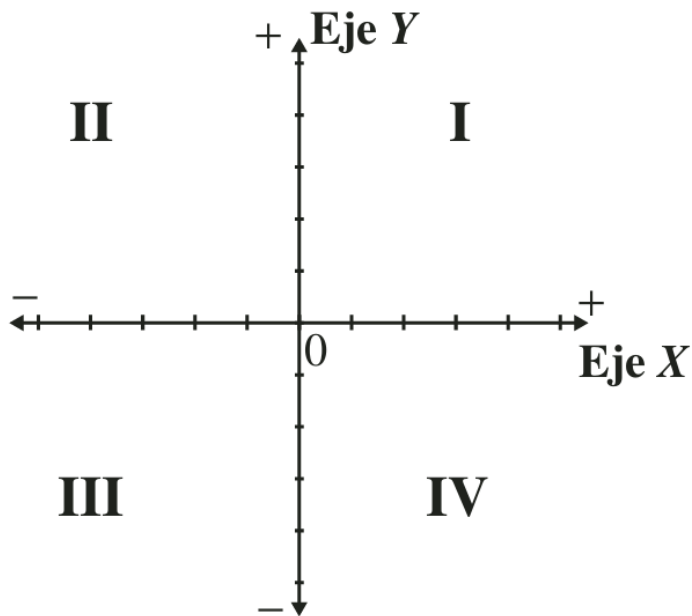
Ejemplo 2.8

Convertir a notación decimal:

- $1,6 \times 10^4$
- $1,05 \times 10^7$
- $4,14501 \times 10^8$
- $6,0 \times 10^{-3}$
- $2,34 \times 10^{-1}$
- $3,002 \times 10^{-7}$

El plano cartesiano

Muchos aspectos de la física tratan de la ubicación en el espacio, lo que requiere la definición de un sistema de coordenadas. Un punto en una recta se puede ubicar con una coordenada, un punto en un plano con dos coordenadas y un punto en el espacio con tres.



El plano cartesiano se forma con dos rectas perpendiculares, cuyo punto de intersección se denomina **origen**.

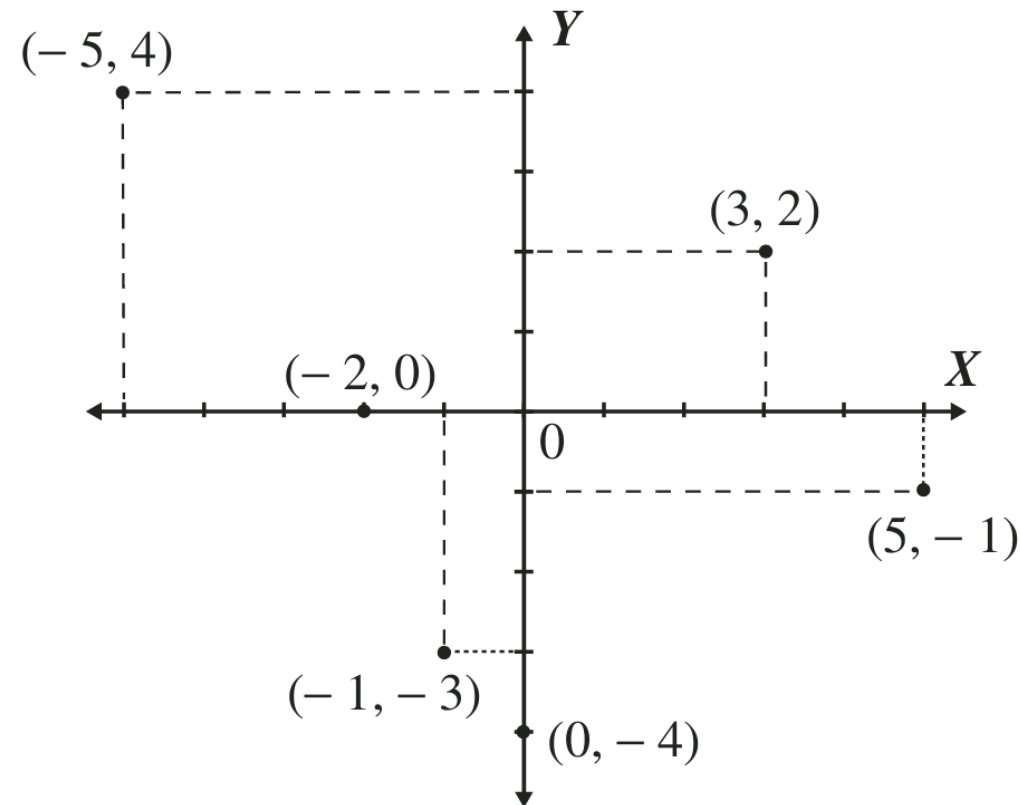
La recta horizontal recibe el nombre de **eje X** o **eje de las abscisas** y la recta vertical recibe el nombre de **eje Y** o **eje de las ordenadas**.

El plano cartesiano se divide en cuatro regiones llamadas “cuadrantes”.

A cada punto P se le asigna un par ordenado o coordenada $P(x, y)$.

Para localizar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano se toma como referencia el origen, se avanza tanto como lo indica el primer número (abscisa) hacia la derecha o izquierda, según sea su signo, de ese punto se avanza hacia arriba o hacia abajo, tanto como lo indica el segundo número (ordenada) según sea su signo.

Por ejemplo, en la figura adjunta se grafican los puntos: $(-5; 4)$, $(3; 2)$, $(-2; 0)$, $(-1; -3)$, $(0; -4)$ y $(5; -1)$ en el plano cartesiano.



Actividades en clase

1. Convertir de notación científica a decimal o de notación decimal a científica:

- | | | |
|------------|-------------------------|-------------------------|
| • 0,176 | • 18 600 000 | • $6,234 \times 10^6$ |
| • 5342 | • $4,14 \times 10^{-5}$ | • $3,21 \times 10^{-1}$ |
| • 0,000408 | • $1,001 \times 10^2$ | • $3,003 \times 10^9$ |

2. Representar en un mismo plano los siguientes puntos:

- A (-4; 3)
- B (1; -8)
- C (-7; -2)
- D (0; 6)
- E (5; 0)
- F (3; 4)
- G (-2; -5)
- H (8; -4)
- I (-1; 7)

3. Determinar los coordenadas que corresponden a los siguientes puntos:

