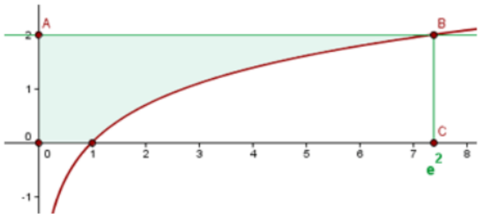
Cálculo de áreas de figuras planas

APLICACIÓN 1:

Hallar el área de la región limitada por las curvas $f(x) = lnx, y = 2$ y los ejes coordenados



Primero graficamos la función $y = lnx$, dando valores para la variable independiente x

Calculamos el punto de corte entre la recta y la curva, resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 2 \\ y = lnx \end{cases}$ igualando las ecuaciones: $2 = lnx,$

Escribimos el logaritmo en forma exponencial

$$lnx = 2, por\ lo\ tanto, e^2 = x$$

El punto de intersección esta dado por: $(e^2, 2)$

Observando la gráfica notamos que el área de la región sombreada podemos calcular obteniendo primero el área del rectángulo OABC formado por la recta $y = 2$ del cual restamos el área bajo la curva de la función $y = lnx$ integrada *respecto al eje x* en los límites calculados.

$$Área\ del\ rectángulo\ OABC$$

$$A_1 = base \times altura$$

$$A_1 = e^2 2\ u^2$$

$$A_1 = 2e^2\ u^2$$

$$A_2 = \int_1^{e^2} lnx dx$$

$$integrando\ por\ partes$$

$$u = lnx \quad y \quad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} \quad y \quad v = x$$

$$A_2 = xlnx - \int dx$$

$$A_2 = [xlnx - x]_1^{e^2}$$

$$A_2 = (2e^2 - e^2) - (ln1 - 1)$$

$$A_2 = (e^2 + 1)u^2$$

Entonces el área de la región sombreada será:

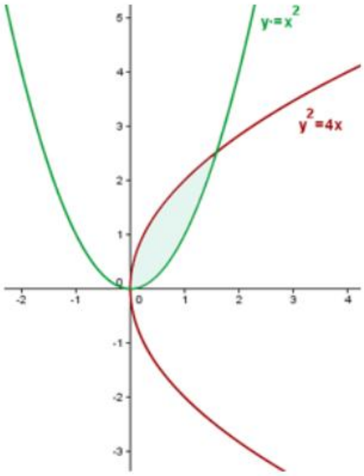
$$\mathbf{A_T = A_1 - A_2}$$

$$A_T = (2e^2 - e^2 - 1)u^2$$

$$A_T = (e^2 - 1)u^2$$

APLICACIÓN 2:

Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $y^2 = 4x$ e $y = x^2$



Despejamos la variable dependiente y de la primera función $y = 2\sqrt{x}$ y graficamos las funciones dadas.

Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases}$, y Resolvemos el sistema de ecuaciones (método de igualación) para encontrar los puntos de intersección entre las dos funciones.

$$y = 2\sqrt{x}$$
$$x^2 = 2\sqrt{x}$$
$$x^4 = 4x$$
$$x^4 - 4x = 0$$
$$x(x^3 - 4) = 0$$
$$x = 0; x = \sqrt[3]{4}$$

Sustituyendo $los\ valor\ de\ x$ en cualquiera de las ecuaciones, tenemos los pares ordenados $(0,0)\ y\ (\sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{2})$

En base a los cálculos realizados anteriormente para establecer los límites de integración y teniendo en cuenta el área bajo la curva de las funciones dadas con *respecto al eje x*, hallamos el área de la sección sombreada:

$$A = \int_0^{\sqrt[3]{4}} (2\sqrt{x} - x^2)dx$$

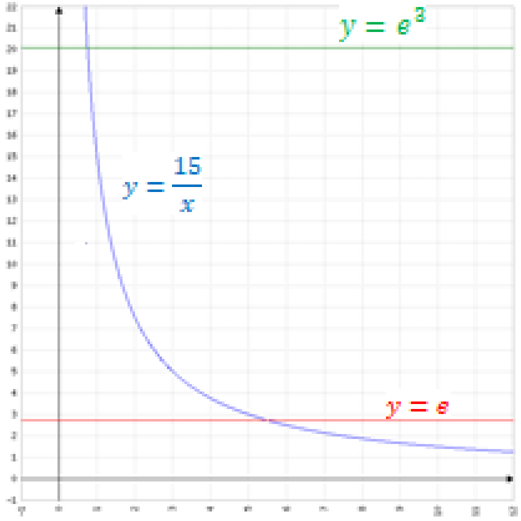
$$A = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{4}}$$

$$A = \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{3}\right]u^2$$

$$A = \frac{4}{3}u^2$$

APLICACIÓN 3:

Hallar el área de superficie limitada por las funciones $y = \frac{15}{x} con\ x > 0$ y las rectas $y = e^3$; $y = e$



Graficamos las funciones dadas y notamos que para hallar la superficie limitada entre ellas va ser más sencillo si integramos la curva con *respecto al eje y*, por lo que debemos despejar de $y = \frac{15}{x}, x > 0$ $x\ con respecto\ a\ y$, obteniendo que:

$$x = \frac{15}{y}\ con\ y > 0$$

Considerando como límites de la integral definida las rectas: $y = e^3$, $y = e$.

$$A = \int_{e}^{e^3} \frac{15}{y} dy$$

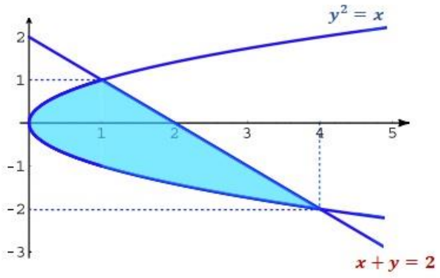
$$A = 15 ln y|_{e}^{e^3}$$

$$A = 15 ln e^3 - 15 ln e$$

$$A = 30\ u^2$$

APLICACIÓN 4:

Hallar el área de la superficie de la región sombreada, limitada por la gráfica de la parábola $y^2 = x$ y la recta $x + y = 2$



Encontramos los puntos de intersección entre las funciones dadas, resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y^2 = \mathrm{x} \\ x = 2 - \mathrm{y} \end{cases}$. Por el método de igualación tenemos que $y^2 = 2 - y$, entonces:

$$y = -2; y = 1$$

Sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación tenemos los puntos de corte $(4, -2)$ y $(1,1)$ que utilizaremos para definir los límites de la integral

Analizando la gráfica de las funciones con respecto a que eje es más sencillo hallar el área bajo la curva, concluimos que vamos a integrar con *respecto al eje y*, por lo cual *despejamos x en función de y* para hallar el área de la región sombreada.

$$A = \int_{-2}^{1} [(2 - y) - y^2] dy$$

$$A = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$

$$A = \frac{7}{6} + \frac{10}{3}$$

$$A = \frac{9}{2} u^2$$