A. ÁREAS DE FIGURAS PLANAS.

En Geometría Elemental se conocen las fórmulas para hallar el área de cualquier región limitada por una poligonal cerrada. Ahora bien, si una región está limitada por alguna línea curva, como es el círculo, el área se expresa como un límite de las áreas de poligonales "próximas". El procedimiento descrito en el capítulo anterior para definir el concepto de integral de una función consiste precisamente en aproximar la función por funciones escalonadas; si consideramos una función $y = f(x)$ no negativa en un intervalo $[a, b]$, la integral inferior es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos en la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$, y la integral superior es el límite de las áreas de los rectángulos circunscritos a dicha región. De este modo podemos definir el área de dicha región como la integral de la función f en el intervalo $[a, b]$. En general,

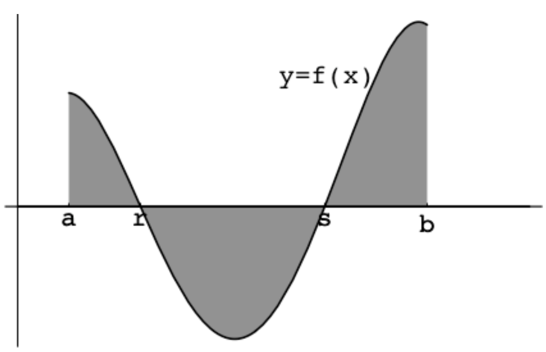
Dada una función $y = f(x)$ integrable en un intervalo $[a, b]$, el área de la región limitada por la función, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ se define como

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Observación: El valor absoluto de la función es debido a que en los intervalos donde la función es negativa, la integral también es negativa y su valor es opuesto al del área correspondiente.

En la práctica, para eliminar el valor absoluto en el integrando, debemos determinar los intervalos de $[a, b]$ donde la función es positiva o negativa y descomponer la integral en suma de integrales correspondientes a cada uno de los intervalos indicados colocando el signo adecuado. Así, en la figura adjunta, el área se expresa como

$$A = \int_a^r f(x) \, dx - \int_r^s f(x) \, dx + \int_s^b f(x) \, dx.$$



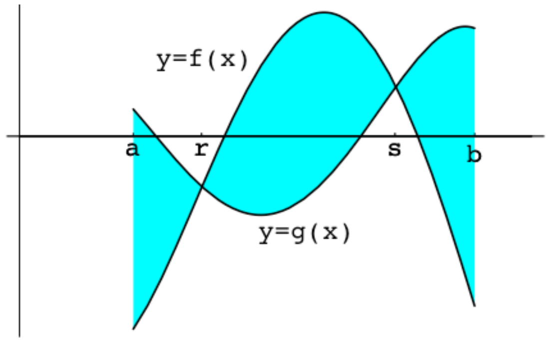
En particular, si la función está expresada en forma paramétrica $x = x(t),\ y = y(t)$, el área viene expresada como

$$A = \int_a^b y\ dx = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot x'(t)\ dt,$$

donde $a = x(t_0),\ b = x(t_1)$.

Regiones más generales que las descritas son aquellas que están limitadas por dos funciones $y = f(x),\ y = g(x)$ entre dos rectas verticales $x = a$ y $x = b$. En este caso el área se expresa mediante la fórmula

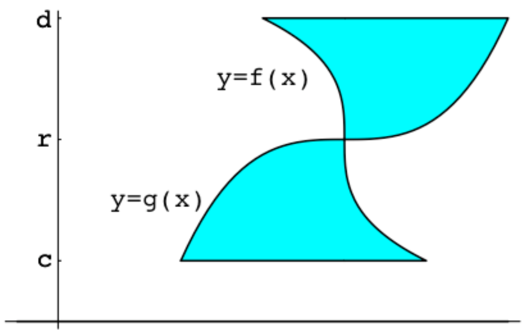
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx.$$



En el ejemplo de la figura, el área se descompone como:

$$A = \int_a^r [g(x) - f(x)]\ dx + \int_r^s [f(x) - g(x)]\ dx + \int_s^b [g(x) - f(x)]\ dx.$$

Si la región está limitada por dos curvas $y = f(x),\ y = g(x)$ entre dos rectas horizontales $y = c$ e $y = d$, consideramos las funciones inversas e integramos respecto a la variable y. El área se expresa entonces como $A = \displaystyle\int_c^d |f^{-1}(y) - g^{-1}(y)|\ dy$.



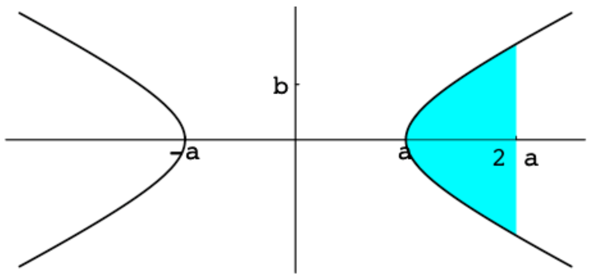
En el ejemplo de la figura, dicha integral se descompone como

$$A = \int_c^r [f^{-1}(y) - g^{-1}(y)]\ dy + \int_r^d [g^{-1}(y) - f^{-1}(y)]\ dy.$$

PROBLEMA 11.4

Hallar el área de la figura limitada por la recta $x = 2a$ y la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución



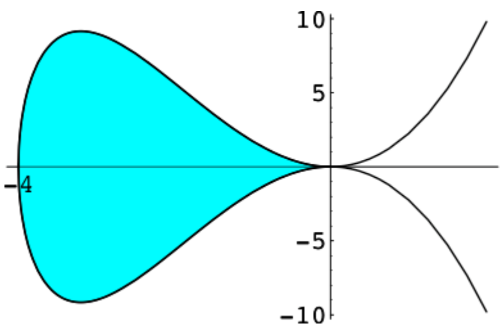
De acuerdo con la figura, el área se obtiene como

$$\begin{aligned} A &= 2\int_a^{2a} b\sqrt{(x/a)^2 - 1}\, dx \\ &= \left[\frac{bx}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - ab\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| \right]_a^{2a} = ab[2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})]. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.5

Hallar el área limitada por la curva $y^2 = x^4(4 + x)$.

Solución



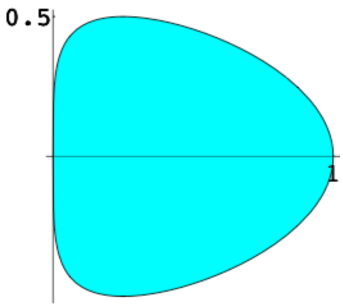
Como la figura está determinada por el intervalo $x \in [-4, 0]$ y es simétrica respecto al eje X, el área será

$$A = 2\int_{-4}^{0} x^2\sqrt{4 + x}\, dx = \left[4(4 + x)^{3/2}\left(\frac{(4 + x)^2}{7} - \frac{8(4 + x)}{5} + \frac{16}{3} \right) \right]_{-4}^{0} = \frac{4096}{105}.$$

PROBLEMA 11.8

Hallar el área limitada por la curva $x = (y^2 + x)^2$.

Solución



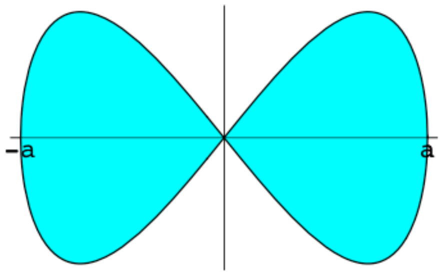
En forma explícita, la ecuación de la curva es $y = \pm\sqrt{\sqrt{x} - x}$. Como la gráfica es simétrica respecto al eje OX, el área viene dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^1 \sqrt{\sqrt{x} - x}\, dx = \ (\text{cambio } \frac{1}{2} - \sqrt{x} = \frac{\operatorname{sen} t}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \cdot (1 - \operatorname{sen} t)\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.9

Hallar el área encerrada por la curva $y^2 = \dfrac{x^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Solución



De acuerdo con la figura y gracias a la simetría, tenemos:

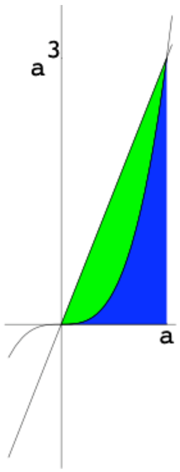
$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^a \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \ (\text{cambio } x = a \operatorname{sen} t)\ = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t\, dt \\ &= 4a^2 \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{4a^2}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.18

Dada la curva de ecuación $y = x^3$ y la recta $y = \lambda x$ (ver figura), demostrar que la región S_1 limitada por la curva y la recta en el intervalo $x \in [0, a]$ tiene la misma área que la región S_2 limitada por la curva y el eje X en el mismo intervalo.

Solución

Como la recta pasa por el punto (a, a^3), se debe cumplir que $a^3 = \lambda a$, es decir $\lambda = a^2$.



Al calcular cada una de las áreas mencionadas obtenemos

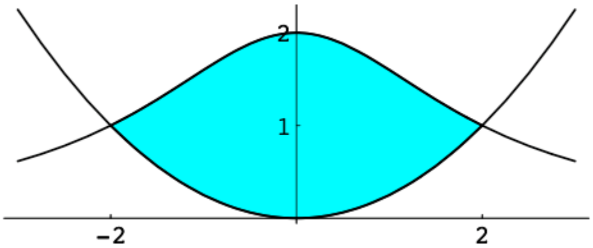
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a (\lambda x - x^3)\,dx = \left[\frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{2\lambda a^2 - a^4}{4} = \frac{a^4}{4}, \\ S_2 &= \int_0^a x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4}{4}, \end{aligned}$$

lo que prueba el enunciado.

PROBLEMA 11.19

Hallar el área de la figura encerrada por la parábola $y = x^2/4$ y la curva de Agnesi $y = \dfrac{8}{x^2+4}$.

Solución



Los puntos de intersección de ambas curvas son solución del sistema formado por ambas ecuaciones. Tenemos que:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4} \iff x^4 + 4x^2 = 32 \iff x^2 = -2 \pm \sqrt{4+32} = -2 \pm 6.$$

Como la solución $x^2 = -8$ no es real, sólo es posible $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$. El área es entonces, teniendo en cuenta la simetría de la figura,

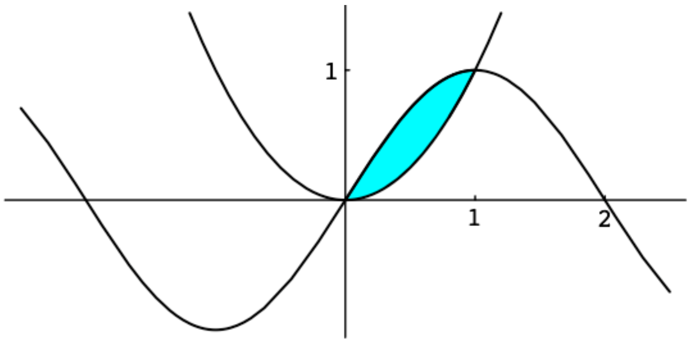
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} \left[\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right] dx = 2\int_0^2 \left[\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right] dx \\ &= 2\left[4 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^2 = 2\pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.20

Calcular el área limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$.

Solución

Como se observa en la figura, la región que limitan dichas curvas se encuentra en el intervalo $[0,1]$ en el cual la función $y = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$ queda por encima de $y = x^2$.



El área es entonces

$$A = \int_0^1 \left[\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} - x^2 \right] dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}.$$

PROBLEMA 11.28

Calcular el área de la región limitada por las gráficas de f y g en el intervalo que se indica en cada caso:

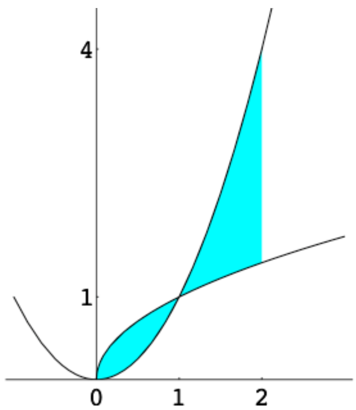
a) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x^2$ en $[0, 2]$.

b) $f(x) = x(x^2 - 1),\ g(x) = x$ en $[-1, 2]$.

Solución

a) Los puntos de intersección de las curvas son

$$y = \sqrt{x},\ y = x^2 \Longrightarrow x = x^4 \Longrightarrow x = 0,\ x = 1.$$

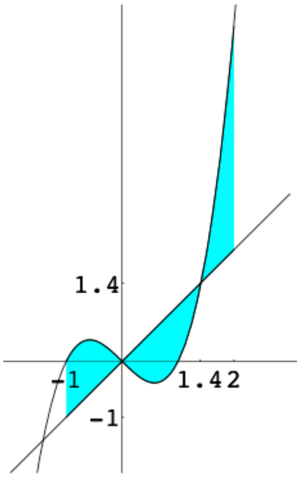


El área se descompone entonces como la suma

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx + \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})\, dx = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

b) Los puntos de intersección de las curvas son:

$$y = x(x^2 - 1),\ y = x \Longrightarrow x(x^2 - 1) = x \Longrightarrow x = 0,\ x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}.$$



El área se obtiene entonces como:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} |x(x^2-1)-x|\,dx \\ &= \int_{-1}^{0}(x^3-2x)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{2}}(2x-x^3)\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}(x^3-2x)\,dx = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

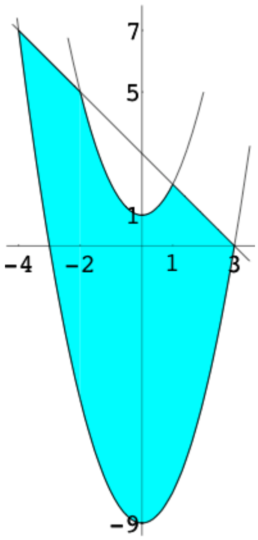
PROBLEMA 11.29

Calcular el área limitada por las regiones $y \le x^2+1,\ y \ge x^2-9,\ y \le 3-x$.

Solución

Calculamos los puntos de intersección de las curvas:

$$\begin{aligned} y = x^2+1,\ y = 3-x \quad &\Longrightarrow x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=-2,\ x=1; \\ y = x^2-9,\ y = 3-x \quad &\Longrightarrow x^2+x-12=0 \Longrightarrow x=-4,\ x=3. \end{aligned}$$



El área queda entonces como la suma de las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{-2} [(3-x)-(x^2-9)]\,dx + \int_{-2}^{1} [(x^2+1)-(x^2-9)]\,dx \\ &\quad + \int_{1}^{3} [(3-x)-(x^2-9)]\,dx \\ &= \int_{-4}^{-2} (-x^2-x+12)\,dx + \int_{-2}^{1} 10\,dx + \int_{1}^{3} (-x^2-x+12)\,dx = \frac{158}{3}. \end{aligned}$$

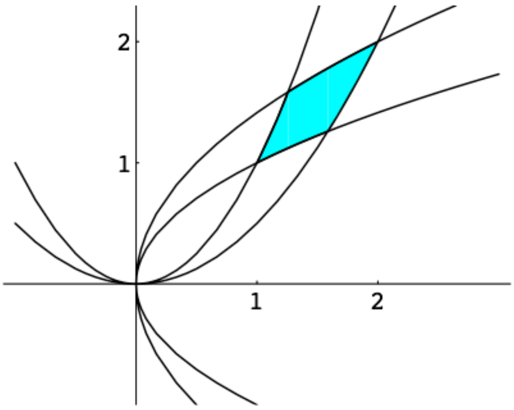
PROBLEMA 11.30

Calcular el área comprendida entre las cuatro parábolas $y^2 = x,\ y^2 = 2x,\ x^2 = y,\ x^2 = 2y$.

Solución

Los distintos puntos de intersección son los siguientes:

$$\begin{aligned} x^2 = 2y,\ y^2 = x &\implies x = 0,\ x = 4^{1/3}; \\ x^2 = y,\ y^2 = x &\implies x = 0,\ x = 1; \\ x^2 = y,\ y^2 = 2x &\implies x = 0,\ x = 4^{1/6}; \\ x^2 = 2y,\ y^2 = 2x &\implies x = 0,\ x = 2. \end{aligned}$$



El área es entonces

$$A = \int_1^{4^{1/6}} [x^2 - \sqrt{x}]\,dx + \int_{4^{1/6}}^{4^{1/3}} [\sqrt{2x} - \sqrt{x}]\,dx + \int_{4^{1/3}}^{2} [\sqrt{2x} - x^2/2]\,dx = \frac{1}{3}.$$

PROBLEMA 11.31

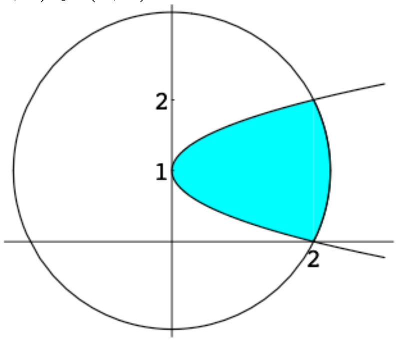
Calcular el área de la figura interior a la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 5$ y a la parábola $x = 2(y-1)^2$.

Solución

Los puntos de intersección de ambas curvas son:

$$x^2 + (y-1)^2 = 5,\ x/2 = (y-1)^2 \Longrightarrow 2x^2 + x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 2,\ x = -5/2.$$

Como la parábola está definida en $x \geq 0$, sólo es posible la solución $x = 2$ lo que da los puntos $(2, 0)$ y $(2, 2)$.



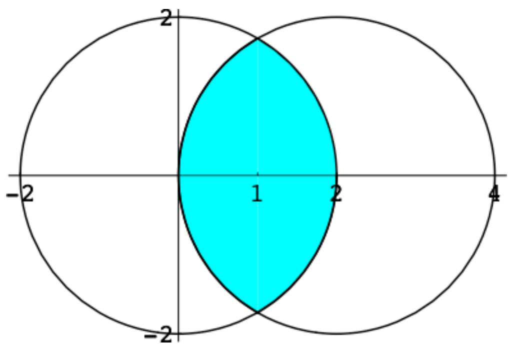
Como debemos descomponer la integral en dos sumandos para integrar respecto a la variable x, integramos respecto a y, lo que da lugar a:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \left[\sqrt{5-(y-1)^2} - 2(y-1)^2 \right] dy \\ &= \left[\frac{5}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{y-1}{\sqrt{5}} + \frac{y-1}{2}\sqrt{5-(y-1)^2} - \frac{2}{3}(y-1)^3 \right]_0^2 = 5 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.32

Encontrar el área de la región común a las circunferencias $C_1 : x^2+y^2=4,\ C_2 : x^2+y^2=4x$.

Solución



Los puntos de intersección de las circunferencias son $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$, de modo que, si integramos respecto a la variable y, el área puede expresarse como la integral

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\sqrt{3}} [\sqrt{4-y^2} - (2-\sqrt{4-y^2})]\, dy = 4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2}-1)\, dy \\ &= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{2} - y \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.33

Sea f la función indicada en la figura adjunta.

Hallar $\int_0^1 f$ y también el área de la región comprendida entre la función f y el eje X.