**Interpretación geométrica de derivada**

$$m = t \quad \propto = \frac{d}{d}$$

Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x$ en $x_1 = 2$, utilizando ***la definición geométrica de derivada***, además *determine los puntos donde existen un máximo y un mínimo.*

$$f(x) = x^3 - 3$$

$$m = \frac{d}{d} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x)$$

$$f(x_1) = {x_1}^3 - 3x_1$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x)] - ({x_1}^3 - 3x_1)}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x_1\Delta x^2 + \Delta x^3 - 3x - 3\Delta x] - x^3 + 3x}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x_1\Delta x^2 + \Delta x^3 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$m = 3x^2 - 3$$

$$m = 3(2)^2 - 3$$

$$m = 9$$

La recta tangente es horizontal en los puntos donde la **pendiente es cero** y de esta manera podemos conocer ***si hay un máximo o un mínimo***.

$$m = 3x^2 - 3$$

$$0 = 3x^2 - 3$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

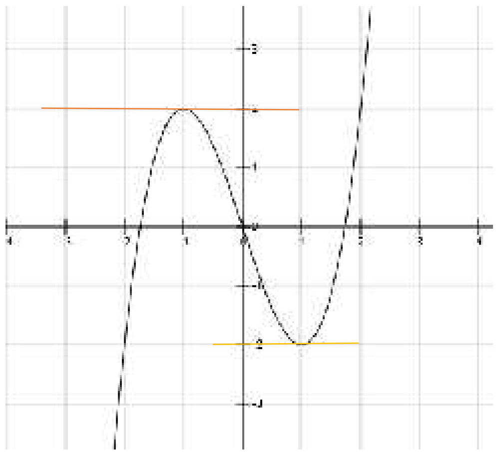
$$x = \pm 1$$

Por lo tanto, los puntos donde existe un máximo o mínimo serán aquellos **donde la recta tangente es horizontal.**

$f(1) = x^3 - 3x$ $\qquad\qquad$ $f(-1) = x^3 - 3x$

**P(1,-2)** $\qquad\qquad$ **Q(-1,2)**

**Gráficamente**



## Teoremas de derivación de las funciones elementales

Para representar la derivada de una **función** $f(x)$ se suelen utilizar 3 maneras de simbolizarlo que son:

$$f(x) = f'(x)$$

$$f(x) = \frac{d}{d}$$

$$f(x) = D_x$$

### 1. Derivada de una constante

Si c es una constante y $f(x) = c$, para *todo x en su dominio* se tiene:

$$y = c \qquad \frac{d}{d} = 0$$

### 2. Derivada de una variable con respecto a si mismo

Si $f(x) = x$, entonces la derivada de $f$ en un x elemento de su dominio es:

$$y = x \qquad \frac{d}{d} = 1$$

### 3. Derivada de una potencia

Si $f(x) = x^n$ con $n \in Q$ y x pertenece al conjunto A en el que $x^n$ está definida, entonces la derivada de $f$ es

$$y = x^n \qquad \frac{d}{d} = nx^{n-1}$$

### 4. Deriva de una constante por una función

Si c es una constante y $f$ una función $f(x)$, para todo x en su dominio se tiene que:

$$y = c\ \ (x) \qquad \frac{d}{d} = c\,\frac{df(x)}{d}$$

### 5. Derivada de la suma de funciones

Si $f$ $y$ $g$ son dos funciones derivables en su dominio, entonces su derivada será:

$$h = [f(x) \pm g(x)] \qquad \frac{d}{d} = \frac{df(x)}{d} \pm \frac{dg(x)}{d}$$

**Ejemplos:**

1. Derivar la función simple aplicando los teoremas estudiados

$$f(x) = \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{7}{\sqrt{x}} + 8x - 2$$

$$y = \frac{3x^3}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{7x}{x^{\frac{1}{2}}} + 8x - 2$$

$$y = 3x^{\frac{7}{3}} - 7x^{\frac{1}{2}} + 8x - 2$$

$$\frac{dy}{d} = 3\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - 7\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 8$$

2. Derivar la ***función compuesta***

$$f(x) = (x^2 - x)^3$$

$$\frac{d}{d} = 3(x^2 - x)^2 \left[\frac{dx^2}{d} - \frac{dx}{d}\right]$$

$$\frac{d}{d} = 3(x^2 - x)^2(2x - 1)$$

3. Derivar **la *función compuesta***:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{d} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{da^2}{d} - \frac{dx^2}{d}\right]$$

$$\frac{d}{d} = \frac{1}{2(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}(0 - 2x)$$

$$\frac{d}{d} = -\frac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

4. Derivar la función compuesta:

$$y = (2x + 1)^3$$

**Aplicación 1:**

Trace la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3$ y utilice el cálculo para hallar *su punto más bajo*

$$y = x^2 - 3$$

$$m = \frac{d}{d} = 2x$$

Debemos tener en cuenta que l**a recta tangente es horizontal**, y por lo tanto la pendiente **m=0**

$$\frac{d}{d} = 0$$

$$0 = 2x$$

$$x = 0$$

$$y = x^2 - 3$$

$$y = -3$$

**El punto más bajo P(0,-3)**

**Debemos *comprobar analíticamente* si efectivamente hay un mínimo**

$$\frac{d}{d} = 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

Si $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ comprobamos que efectivamente ***hay un mínimo***

Si $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ comprobamos que ***hay un máximo***

**Aplicación 2**

Obtener una **ecuación de cada recta normal** a la curva $y = x^3 - 3$ que sea ***paralelo a la recta*** $2x + 18y - 9 = 0$

Calculemos la pendiente de la recta paralela: $2x + 18y - 9 = 0$

$$L \quad e \qquad ón \; g \qquad d \;\; l \; r \qquad : a \quad + b \quad + c = 0$$

$$m = -\frac{a}{b}$$

$$m_2 = -\frac{1}{9}$$

La p**endiente de la recta normal**: (son perpendiculares)

$$m_1 m_2 = -1$$

$$m = 9$$

Si derivo la función dada

$$y = x^3 - 3$$

$$\frac{d}{d} = 3x^2 - 3$$

$$9 = 3x^2 - 3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Reemplacemos el valor de $x = \pm 2$

**P(2**,2) **Q(-2,-2**)

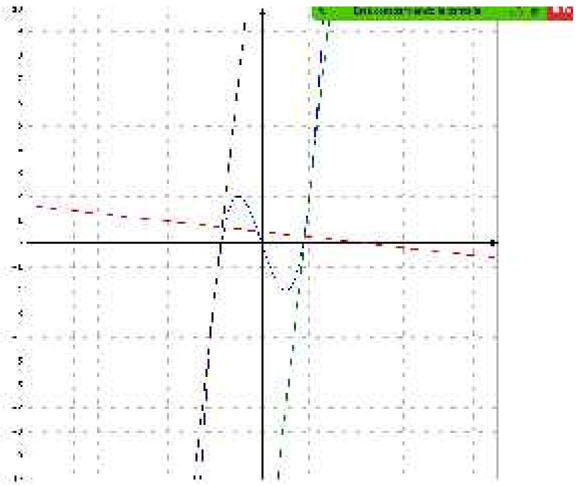
Hallemos la ***ecuación de la recta normal*** con la ecuación de la recta punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 9(x - 2)$$

$$y = 9x - 16$$

$$y = 9x + 16$$



**Aplicación 3**

Un diseñador desea encerar *un jardín rectangular* con 200m de cerca, utilice el cálculo para ***hallar el área más grande que se pueda encerrar con la cantidad de cerca*** disponible y *compruebe que hay un máximo*.

| | | |
|---|---|---|
| perímetro: 200 m | $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{2} \quad + \boldsymbol{2}$ | $A = la$ |
| largo: **x** | $200 = 2x + 2y$ | $A(x) = x(100 - x)$ |
| ancho: y | $100 = x + y$ | $A(x) = 100x - x^2$ |
| | $\boldsymbol{y} = 100 - x$ | |

Debemos encontrar la derivada de la función A(x) para saber donde está el punto máximo

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}} = 100 - 2x$$

$$\boldsymbol{0} = 100 - 2x$$

$$x = 50$$

Entonces el jardín tiene 50m de largo y el ancho es de 50 m, entonces el área máxima que se puede cercar es de **A=2500** metros cuadrados.

***Comprobemos que efectivamente hay un máximo***

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}} = 100 - 2\boldsymbol{x}$$

Hallemos la segunda derivada

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -2$$

Como la $\frac{d^2A}{dx^2} < 0$

**Aplicación 4**

De un pedazo cuadrado de cartón de 18 pulgadas de lado se fabrica una caja abierta, quitándole un ´pequeño cuadrado de cada esquina y doblando para arriba las alas para formas los lados. Exprese el volumen de la caja resultante como una función de la longitud x del lado de los cuadrados eliminados. Dibuje la gráfica y cálcale el valor de x para el cual el volumen de la caja es máximo.