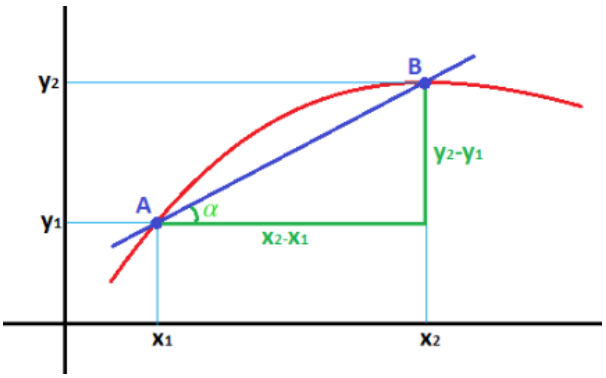
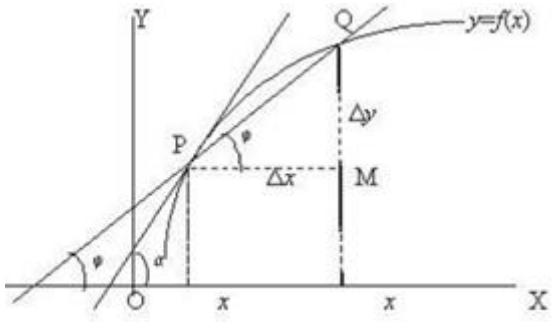
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE DERIVADA



NOTA:

La pendiente de la recta es igual a la tangente del ángulo de inclinación **m=** $tg \propto = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



Considere que la función f es continua en x_1 y se desea definir la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de coordenadas P y sea Q otro punto sobre la gráfica $f(x)$

La diferencia de las abscisas (coordenadas x) de Q a P se denota Δx, de modo que:

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}$$

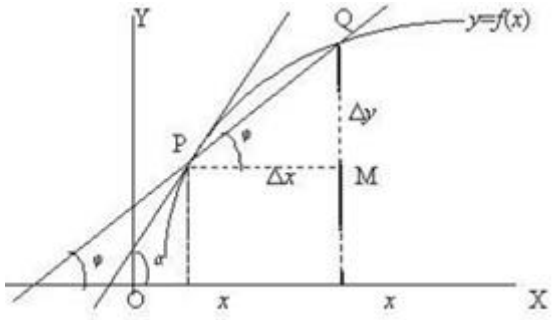
Consideremos la ***recta secante PQ*** de la figura, entonces su pendiente será:

$$mPQ = \frac{f(\boldsymbol{x_2}) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

De $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}$ despejemos $x_2 = \Delta x + x_1$ y reemplacemos en la ecuación anterior

$$mPQ = \frac{f(\Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x_1}) - f(x_1)}{\Delta \boldsymbol{x}}$$

Ahora consideremos el punto P como punto fijo y que Q se puede mover a lo largo de la curva hacia P, es decir que Q tiende a P, es decir que Δx tiende a cero.



Entonces ***la pendiente de la recta tangente*** a la gráfica de la función en P será **el límite de la recta secante mPQ conforme x tiende a cero.**

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_1) - f(x_1)}{\Delta x}$$

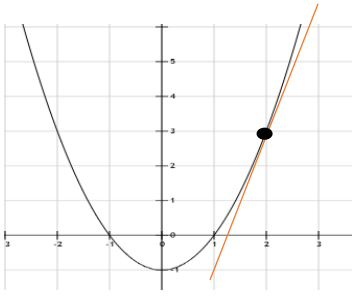
Si el límite existe

Entonces llegamos a comprender la definición geométrica de deriva.

Nota: $m = tg \propto = \frac{dy}{dx}$

Ejemplo 1:

Encuentre una recta tangente a la parábola $y = x^2 - 1$ en el punto (2,3). Realice la gráfica y un segmento de la recta tangente en **(2,3).**



$4x - y - 5 = 0$

Consideramos la función: $f(x_1 + \Delta x) = x^2 - 1$

Aplicamos *la definición de derivada* de una función en un punto

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Evaluamos la función $f(x) = x^2 - 1$ para:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x_1 + \Delta x)^2 - 1] - \left((x_1{}^2 - 1)\right)}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x_1{}^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - 1] - x_1{}^2 + 1}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$m = 2x_1$$

$$m(2) = 4$$

La ecuación de la recta tangente cuando pasa por un punto (2,3) y pendiente $m = 4$

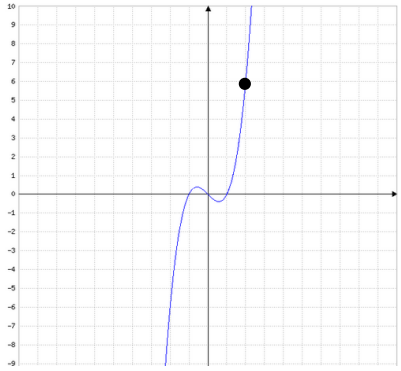
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

$$4x - y - 5 = 0$$

Ejemplo 2:

Calcular **la pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x$ en punto x=2



$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Evaluemos en la función $f(x_1) = x^3 - x$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x_1 + \Delta x)^3 - (x_1 + \Delta x)] - (x_1^3 - x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1\Delta x^2 + \Delta x^3 - x_1 - \Delta x - x_1^3 + x_1}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\Delta x + 3x_1\Delta x^2 + \Delta x^3 - \Delta x}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x_1^2 + 3x_1\Delta x + \Delta x^2 - 1)}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_1^2 + 3x_1\Delta x + \Delta x^2 - 1)$$

$$m = \mathbf{3x_1^2 - 1}$$

$$m(2) = 11$$

En el punto P(2,6) y m=11

La ecuación de la recta tangente cuando pasa por un punto (2,6) y pendiente $m = 11$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = 11(x - 2)$$

$$y - 11x + 16 = 0$$

$$y = 11x - 16$$

TEOREMAS

1. **Derivada de una constante**

$f(x) = 3$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{dx} = 0$

2. **Derivada de una variable**

$f(x) = x$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{dx} = 1$

3. **Derivada de una potencia**

$f(x) = x^n$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$