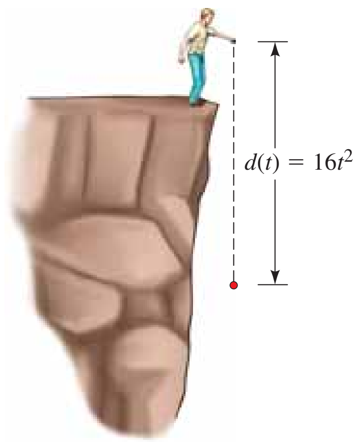
CAPÍTULO 2

FUNCIONES

Quizá la idea más útil para modelar el mundo real sea el concepto de *función*. Veamos un ejemplo. Si un escalador deja caer una piedra desde un alto risco, sabemos que la piedra caerá. Pero esta descripción general no nos ayuda a saber cuándo llegará la piedra al suelo. Para averiguarlo, necesitamos una *regla* que relacione la distancia d que cae la piedra y el tiempo que haya estado en caída. Galileo fue el primero en descubrir la regla: en t segundos la piedra cae $16t^2$ pies. Esta "regla" se denomina *función*; escribimos esta función como $d(t) = 16t^2$. Con el uso de este modelo de función, podemos *predecir* cuándo caerá la piedra al suelo. En este capítulo estudiamos propiedades de funciones y la forma en que los modelos funcionales pueden ayudarnos a obtener información precisa acerca de la cosa o proceso que se esté modelando.

Descripción general: La piedra cae.



Función: En t segundos, la piedra cae $16t^2$ pies.

2.1 ¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Funciones a nuestro alrededor ▶ Definición de función ▶ Evaluación de una función ▶ Dominio de una función ▶ Cuatro formas de representar una función

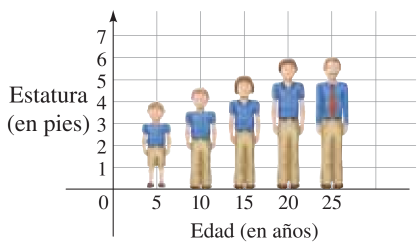
En esta sección exploramos la idea de una función y a continuación damos la definición de función.

▼ Funciones a nuestro alrededor

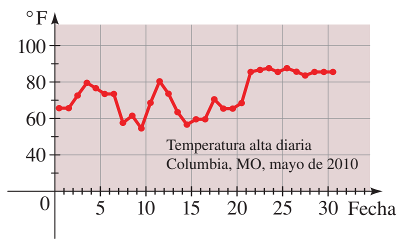
En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso (vea Figura 1). Usamos el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad con respecto a otra. Esto es, decimos lo siguiente:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

La Oficina de Correos de Estados Unidos utiliza una sencilla regla para determinar el costo de enviar por correo un paquete de primera clase con base en el peso del paquete. Pero no es tan fácil describir la regla que relaciona la estatura con la edad o la regla que relaciona temperatura y fecha.



La estatura es función de la edad.



La temperatura es función de la fecha.

w (onzas)	Porte (dólares)
$0 < w \leq 1$	1.22
$1 < w \leq 2$	1.39
$2 < w \leq 3$	1.56
$3 < w \leq 4$	1.73
$4 < w \leq 5$	1.90
$5 < w \leq 6$	2.07

El porte es función del peso.

FIGURA 1

¿Puede usted considerar otras funciones? Veamos a continuación algunos ejemplos:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.
- El peso de una astronauta es una función de su elevación.
- El precio de una mercancía es una función de la demanda de esa mercancía.

La regla que describe la forma en que el área A de un círculo depende de su radio r está dada por la fórmula $A = \pi r^2$. Aun cuando no exista una regla o fórmula precisa que describa una función, todavía podemos describir la función por medio de una gráfica. Por ejemplo, cuando abrimos la llave del agua caliente de una llave, la temperatura del agua depende de cuánto tiempo haya estado saliendo el agua. Por tanto, podemos decir:

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

La Figura 2 muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como función del tiempo t que haya transcurrido desde que se abrió la llave. La gráfica muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del tanque de agua caliente llega a la llave, la temperatura T del agua aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua del tanque. Cuando éste se descarga, T disminuye a la temperatura del agua fría de alimentación.

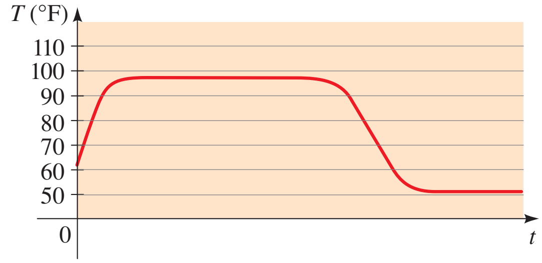


FIGURA 2 Gráfica de la temperatura T del agua como función del tiempo t

Definición de función

Ya antes hemos empleado letras para representar números. Aquí hacemos algo muy distinto: usamos letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar de una función, es necesario darle un nombre. Usaremos letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, podemos usar la letra f para representar una regla como sigue:

"f" es la regla "elevar al cuadrado el número"

Cuando escribimos $f(2)$ queremos decir "aplicar la regla f al número 2". La aplicación de la regla da $f(2) = 2^2 = 4$. Del mismo modo, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

La tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de una calculadora es un buen ejemplo de una función como máquina. Primero se ingresa x en la pantalla y, a continuación, se pulsa la tecla marcada como $\boxed{\sqrt{\ }}$. (En casi todas las calculadoras *graficadoras* se invierte el orden de estas operaciones.) Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; esto es, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparece una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla, correcta a cierto número de lugares decimales. (Entonces, la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculadora no es exactamente la misma que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.)

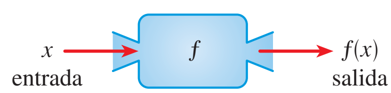
Por lo general consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x" y se denomina **valor de f en x**, o la **imagen de x bajo f**. El conjunto A recibe el nombre de **dominio** de la función. El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía en todo el dominio, es decir,

$$\text{Rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función f se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama **variable dependiente**. Por tanto, si escribimos $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Es útil considerar una función como una **máquina** (vea Figura 3). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando x entra a la máquina, es aceptada como **entrada** y la máquina produce una **salida** $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

FIGURA 3 Diagrama de máquina de f



Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flecha** como en la Figura 4. Cada flecha conecta un elemento de A con un elemento de B. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

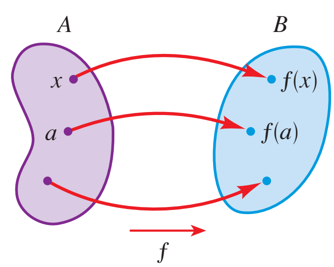


FIGURA 4 Diagrama de flecha de f

EJEMPLO 1 | Análisis de una función

Una función f está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 + 4$$

(a) Exprese verbalmente cómo actúa f sobre la entrada x para producir la salida $f(x)$.
(b) Evalúe $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.
(c) Encuentre el dominio y rango de f.
(d) Trace un diagrama de máquina para f.

SOLUCIÓN

(a) La fórmula nos dice que f primero eleva al cuadrado la entrada x y luego suma 4 al resultado. Por tanto, f es la función

"elevar al cuadrado, luego sumar 4"

(b) Los valores de f se encuentran al sustituir por x en la fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } 3$$
$$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } -2$$
$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } \sqrt{5}$$

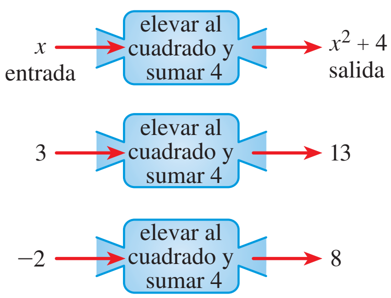


FIGURA 5 Diagrama de máquina

(c) El dominio de f está formado por todas las posibles entradas para x. Como podemos evaluar la fórmula $f(x) = x^2 + 4$ para cada número real x, el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

El rango de f está formado por todas las posibles salidas de f. Como $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, tenemos $x^2 + 4 \geq 4$, de modo que por cada salida de f tenemos $f(x) \geq 4$. Entonces, el rango de f es $\{y \mid y \geq 4\} = [4, \infty)$.

(d) Un diagrama de máquina para f se ilustra en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9, 13, 17** Y **43**

Evaluación de una función

En la definición de una función, la variable independiente x desempeña el papel de un símbolo o dígito. Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

$$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$$

Para evaluar f en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

EJEMPLO 2 | Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

(a) $f(-2)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(4)$ **(d)** $f\left(\frac{1}{2}\right)$

SOLUCIÓN Para evaluar f en un número, sustituimos el número por x en la definición de f.

(a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

(b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

(c) $f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$

(d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

EJEMPLO 3 | Una función definida por tramos

Un plan de teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cobra \$0.20 por cada minuto adicional de uso. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \le x \le 400 \\ 39 + 0.20(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Encuentre $C(100)$, $C(400)$ y $C(480)$.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. He aquí cómo aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada x. Si $0 \le x \le 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otra parte, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.20((x - 400)$.

Como $100 \le 400$, tenemos $C(100) = 39$.

Como $400 \le 400$, tenemos $C(400) = 39$.

Como $480 > 400$, tenemos $C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$.

Por tanto, el plan cobra \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos.

Una **función definida** por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. La función C del Ejemplo 3 está definida por tramos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

EJEMPLO 4 | Evaluación de una función

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

(a) $f(a)$ **(b)** $f(-a)$

(c) $f(a + h)$ **(d)** $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$

Expresiones como la del inciso (d) del ejemplo 4 aparecen con frecuencia en cálculo y se les llama *cociente de diferencias* y representan el cambio promedio en el valor de f entre $x = a$ y $x = a + h$.

SOLUCIÓN

(a) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

(b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

(c)
$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1 \end{aligned}$$

(d) Usando los resultados de las partes (c) y (a), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 5 | El peso de una astronauta

Si una astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando esté a h millas sobre la Tierra está dado por la función

$$w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

(a) ¿Cuál es su peso cuando ella esté a 100 millas sobre la Tierra?

El peso de un cuerpo que esté sobre la Tierra, o muy cerca de ésta, es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ese cuerpo. Cuando se encuentre en órbita alrededor de la Tierra, una astronauta experimenta la sensación de "ingravidez" porque la fuerza centrípeta que la mantiene en órbita es exactamente igual que la atracción gravitacional de la Tierra.

(b) Construya una tabla de valores para la función w que da el peso de la astronauta a altitudes de 0 a 500 millas. ¿Qué se concluye a partir de la tabla?

SOLUCIÓN

(a) Buscamos el valor de la función w cuando $h = 100$; esto es, debemos calcular $w(100)$.

$$w(100) = 130\left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 \approx 123.67$$

Entonces, a una altitud de 100 millas, ella pesa unas 124 lb.

(b) La tabla da el peso de la astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla están calculados como en la parte (a).

h	$w(h)$
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107
500	102

La tabla indica que cuanto más alto se encuentre ella, menor es su peso.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real.* Por ejemplo, considere las funciones

Los dominios de expresiones algebraicas se estudian en la página 35.

$$f(x) = \frac{1}{x - 4} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, de modo que su dominio es $\{x \mid x \neq 4\}$. La función g no está definida para x negativa, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ge 0\}$.

EJEMPLO 6 | Hallar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ **(b)** $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **(c)** $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t + 1}}$

SOLUCIÓN

(a) Una expresión racional no está definida cuando el denominador es 0. Como

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

vemos que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio también se puede escribir en notación de intervalos como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

(b) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, de modo que debemos tener $9 - x^2 \geq 0$. Usando los métodos de la Sección 1.7, podemos resolver esta desigualdad para hallar que $-3 \leq x \leq 3$. Por lo tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

(c) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, y no podemos dividir entre 0, de modo que debemos tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por lo tanto, el dominio de h es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **51** ■

Cuatro formas de representar una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de máquina y de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (por descripción en palabras)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)
- visualmente (por una gráfica)
- numéricamente (por una tabla de valores)

Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros. Un ejemplo de una descripción verbal es la siguiente regla para convertir entre escalas de temperatura:

"Para hallar el equivalente Fahrenheit de una temperatura Celsius, multiplicar por $\frac{9}{5}$ la temperatura Celsius y luego sumar 32."

En el Ejemplo 7 vemos cómo describir esta regla verbal algebraica, gráfica y numéricamente. Una representación útil del área de un círculo como función de su radio es la fórmula algebraica

$$A(r) = \pi r^2$$

La gráfica producida por un sismógrafo (vea la caja en la página siguiente) es una representación visual de la función de aceleración vertical $a(t)$ del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final, considere la función $C(w)$, que se describe verbalmente como "el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w". La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente, es decir, usando una tabla de valores.

Estaremos usando las cuatro representaciones de funciones en todo este libro; las resumimos en el cuadro siguiente.

CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbal

Usando palabras:

"Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplicar la temperatura Celsius por $\frac{9}{5}$, luego sumar 32."

Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

Algebraica

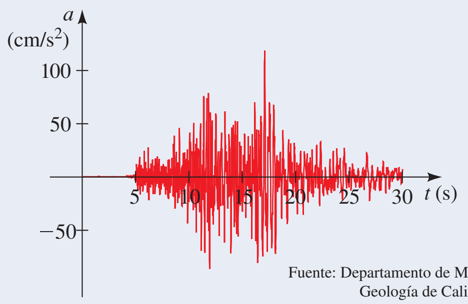
Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Usando una gráfica:



Fuente: Departamento de Minas y Geología de California

Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Usando una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	1.22
$1 < w \leq 2$	1.39
$2 < w \leq 3$	1.56
$3 < w \leq 4$	1.73
$4 < w \leq 5$	1.90
$\vdots$	$\vdots$

Costo de enviar por correo un paquete de primera clase

EJEMPLO 7 | Representar una función verbal, algebraica, numérica y gráficamente

Sea $F(C)$ la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius C. (Así, F es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro citado líneas antes da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

(a) Algebraicamente (usando una fórmula)

(b) Numéricamente (usando una tabla de valores)

(c) Visualmente (usando una gráfica)

SOLUCIÓN

(a) La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada C por $\frac{9}{5}$ y luego sumar 32 al resultado.

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

(b) Usamos la fórmula algebraica para F que encontramos en la parte (a) para construir una tabla de valores:

C (Celsius)	F (Fahrenheit)
−10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

(c) Usamos los puntos tabulados en la parte (b) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la Figura 6.

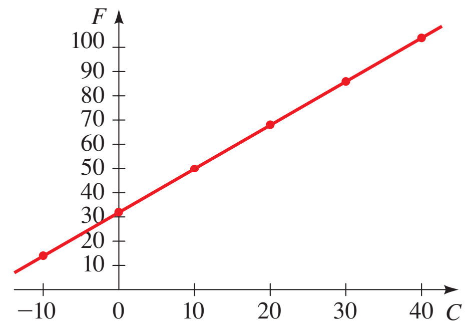


FIGURA 6 Celsius y Fahrenheit

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

2.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si una función f está dada por la fórmula $y = f(x)$, entonces $f(a)$ es la ______de f en $x = a$.

2. Para una función f, el conjunto de todas las posibles entradas se denomina _____de f, y el conjunto de todas las posibles salidas se denomina _______de f.

3. (a) ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen 5 en sus dominios?

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = \frac{x-5}{x} \qquad h(x) = \sqrt{x-10}$$

(b) Para las funciones de la parte (a) que *tienen* 5 en sus dominios, encuentre el valor de la función en 5.

4. Una función está dada algebraicamente por la fórmula $f(x) = (x-4)^2 + 3$. Complete estas otras formas de representar a f:

(a) *Verbal:* "Restar 4, luego _____ y _____.
(b) *Numérica:*

x	$f(x)$
0	19
2	
4	
6	

HABILIDADES

5-8 ■ Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "elevar al cuadrado, luego restar 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

5. Sumar 3, luego multiplicar por 2

6. Dividir entre 7, luego restar 4

7. Restar 5, luego elevar al cuadrado

8. Tomar la raíz cuadrada, sumar 8, luego multiplicar por $\frac{1}{3}$.

9-12 ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

9. $h(x) = x^2 + 2$

10. $k(x) = \sqrt{x+2}$

11. $f(x) = \dfrac{x-4}{3}$

12. $g(x) = \dfrac{x}{3} - 4$

13-14 ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

13. $f(x) = \sqrt{x-1}$

14. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

15-16 ■ Complete la tabla.

15. $f(x) = 2(x-1)^2$

16. $g(x) = |2x+3|$

x	$f(x)$
−1	
0	
1	
2	
3	

x	$g(x)$
−3	
−2	
0	
1	
3	

17-26 ■ Evalúe la función en los valores indicados.

17. $f(x) = x^2 - 6$; $\quad f(-3), f(3), f(0), f(\frac{1}{2}), f(10)$

18. $f(x) = x^3 + 2x$; $\quad f(-2), f(1), f(0), f(\frac{1}{3}), f(0.2)$

19. $f(x) = 2x + 1$;
$f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a+b)$

20. $f(x) = x^2 + 2x$;
$f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

21. $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$;
$g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a-1), g(-1)$

22. $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$;

$h(1), h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x), h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

23. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$;

$f(0), f(2), f(-2), f(\sqrt{2}), f(x+1), f(-x)$

24. $f(x) = x^3 - 4x^2$;

$f(0), f(1), f(-1), f(\frac{3}{2}), f\left(\dfrac{x}{2}\right), f(x^2)$

25. $f(x) = 2|x - 1|$;

$f(-2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(2), f(x+1), f(x^2+2)$

26. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

$f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

27-30 ■ Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados.

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

28. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

29. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

30. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

31-34 ■ Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

31. $f(x) = x^2 + 1$; $\quad f(x+2), f(x) + f(2)$

32. $f(x) = 3x - 1$; $\quad f(2x), 2f(x)$

33. $f(x) = x + 4$; $\quad f(x^2), (f(x))^2$

34. $f(x) = 6x - 18$; $\quad f\left(\dfrac{x}{3}\right), \dfrac{f(x)}{3}$

35-42 ■ Encuentre $f(a)$, $f(a+h)$, y el cociente de diferencias $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$.

35. $f(x) = 3x + 2$

36. $f(x) = x^2 + 1$

37. $f(x) = 5$

38. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

39. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

40. $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

41. $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$

42. $f(x) = x^3$

43-64 ■ Encuentre el dominio de la función.

43. $f(x) = 2x$

44. $f(x) = x^2 + 1$

45. $f(x) = 2x, \quad -1 \leq x \leq 5$

46. $f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 5$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

48. $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$

49. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

50. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

51. $f(x) = \sqrt{x-5}$

52. $f(x) = \sqrt[4]{x+9}$

53. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

54. $g(x) = \sqrt{7-3x}$

55. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

56. $G(x) = \sqrt{x^2-9}$

57. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

58. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

59. $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

60. $g(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

61. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

62. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{6-x}}$

63. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

64. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

65-68 ■ Se da una descripción verbal de una función. Encuentre representaciones **(a)** algebraica, **(b)** numérica y **(c)** gráfica para la función.

65. Para evaluar $f(x)$, divida la entrada entre 3 y sume $\frac{2}{3}$ al resultado.

66. Para evaluar $g(x)$, reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por $\frac{3}{4}$.

67. Sea $T(x)$ la cantidad de impuesto de ventas cobrado en el condado de Lemon por la compra de x dólares. Para hallar el impuesto, tome 8% del precio de compra.

68. Sea $V(d)$ el volumen de una esfera de diámetro d. Para hallar el volumen, tome el cubo del diámetro, luego multiplique por π y divida entre 6.

APLICACIONES

69. Costo de producción El costo C en dólares por producir x yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

(a) Encuentre $C(10)$ y $C(100)$.

(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?

(c) Encuentre $C(0)$. (Este número representa los *costos fijos*.)

70. Área de una esfera El área superficial S de una esfera es una función de su radio r dado por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

(a) Encuentre $S(2)$ y $S(3)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

71. Ley de Torricelli Un tanque contiene 50 galones de agua, que se descarga por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. El tanque se descarga con más rapidez cuando está casi lleno porque es mayor la presión sobre la fuga. La **Ley de Torricelli** da el volumen de agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 20$$

(a) Encuentre $V(0)$ y $V(20)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
(c) Haga una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0, 5, 10, 15, 20$.

72. ¿A qué distancia puede usted ver? Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia D máxima a que se puede ver desde la parte superior de un edificio alto o un avión a una altitud h está dada por la función

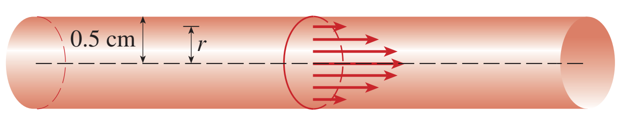
$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h se miden en millas.
(a) Encuentre $D(0.1)$ y $D(0.2)$.
(b) ¿A qué distancia puede usted ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, a 1135 pies del suelo?
(c) Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?

73. Circulación sanguínea Cuando la sangre circula por una vena o una arteria, su velocidad v es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que la distancia r desde el eje central aumenta (vea la figura). La fórmula que da v como función de r se llama **ley de flujo laminar**. Para una arteria con radio 0.5 cm, la relación entre v (en cm/s) y r (en cm) está dada por la función

$$v(r) = 18{,}500(0.25 - r^2) \qquad 0 \le r \le 0.5$$

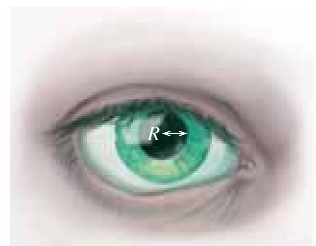
(a) Encuentre $v(0, 1)$ y $v(0, 4)$.
(b) ¿Qué le dicen sus respuestas a la parte (a) acerca de la circulación sanguínea en esta arteria?
(c) Haga una tabla de valores de $v(r) = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.



74. Tamaño de la pupila Cuando aumenta la brillantez x de una fuente de luz, el ojo reacciona al disminuir el radio R de la pupila. La dependencia de R en x está dada por la función

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

donde R se mide en milímetros y x se mide en unidades de brillantez apropiadas.
(a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.
(b) Haga una tabla de valores de $R(x)$.



75. Relatividad Según la Teoría de la Relatividad, la longitud L de un cuerpo es una función de su velocidad v con respecto a un observador. Para un cuerpo cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz (300,000 km/s).
(a) Encuentre $L(0.5c)$, $L(0.75c)$ y $L(0.9c)$.
(b) ¿Cómo cambia la longitud de un cuerpo cuando aumenta su velocidad?

76. Impuesto sobre la renta En cierto país, el impuesto sobre la renta T se valora de acuerdo con la siguiente función de ingreso x:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 10{,}000 \\ 0.08x & \text{si } 10{,}000 < x \le 20{,}000 \\ 1600 + 0.15x & \text{si } 20{,}000 < x \end{cases}$$

(a) Encuentre $T(5{,}000)$, $T(12{,}000)$, y $T(25{,}000)$.
(b) ¿Qué representan sus repuestas en el inciso (a)?

77. Compras por Internet Una librería de ventas por Internet cobra $15 por envío de pedidos de menos de $100 pero no cobra nada por pedidos de $100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x del libro comprado, dado por

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{si } x < 100 \\ x & \text{si } x \ge 100 \end{cases}$$

(a) Encuentre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ y $C(105)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

78. Costo de una estancia en hotel Una cadena hotelera cobra $75 por noche por las primeras dos noches y $50 por cada noche adicional de estancia. El costo total T es una función del número de noches x que permanezca un huésped.

(a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por tramos.

$$T(x) = \begin{cases} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(b) Encuentre $T(2)$, $T(3)$ y $T(5)$.

(c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

79. Boleta de infracción por rebasar límite de velocidad En cierto estado, la máxima velocidad permitida en autopistas es de 65 mi/h, y la mínima es 40 mi/h. La multa F por violar estos límites es de $15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

(a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por partes, donde x es la velocidad a la cual una persona está viajando.

$$F(x) = \begin{cases} & \text{si } 0 < x < 40 \\ & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ & \text{si } x > 65 \end{cases}$$

(b) Encuentre $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$.

(c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

80. Altura de césped El propietario de una casa poda el césped en la tarde de todos los miércoles. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo en el curso de un período de 4 semanas que empieza un domingo.

81. Cambio de temperatura Una persona coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. A continuación, saca el pastel y lo deja enfriar antes de consumirlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

82. Cambio diario de temperatura Las lecturas de temperatura T (en °F) fueron registradas cada 2 horas de la medianoche al mediodía en Atlanta, Georgia, el 18 de marzo de 1996. El tiempo t se midió en horas desde la medianoche. Trace una gráfica aproximada de T como función de t.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	58	57	53	50	51	57	61

83. Crecimiento poblacional La población P (en miles) de San José, California, de 1988 a 2000 se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mediados de año.) Trace una gráfica aproximada de P como función de t.

t	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
P	733	782	800	817	838	861	895

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

84. Ejemplos de funciones Al principio de esta sección estudiamos tres ejemplos de funciones ordinarias y frecuentes: la estatura es función de la edad, la temperatura es función de la fecha y el costo del porte es función del peso. Dé otros tres ejemplos de funciones de nuestra vida diaria.

85. Cuatro formas de representar una función En el cuadro de la página 148 representamos cuatro funciones diferentes verbal, algebraica, visual y numéricamente. Considere una función que pueda representarse en las cuatro formas y escriba las cuatro representaciones.

2.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

Graficar funciones por localización de puntos ▶ Graficar funciones con calculadora graficadora ▶ Graficar funciones definidas por tramos ▶ La prueba de la recta vertical ▶ Ecuaciones que definen funciones

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica. En esta sección investigamos con más detalle el concepto de graficar funciones.

▼ Graficar funciones por localización de puntos

Para graficar una función f, localizamos los puntos $(x, f(x))$ en un plano de coordenadas. En otras palabras, localizamos los puntos (x, y) cuya coordenada x es una entrada y cuya coordenada y es la correspondiente salida de la función.

2.3 INFORMACIÓN A PARTIR DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Valores de una función: dominio y rango ▶ Funciones crecientes y decrecientes ▶ Valores máximo y mínimo locales de una función

Numerosas propiedades de una función se obtienen más fácilmente de una gráfica que de la regla que describe la función. Veremos en esta sección cómo una gráfica nos dice si los valores de una función son crecientes o decrecientes, así como también dónde están los valores máximo y mínimo de una función.

▼ Valores de una función: dominio y rango

Una gráfica completa de una función contiene toda la información acerca de una función, porque la gráfica nos dice cuáles valores de entrada corresponden a cuáles valores de salida. Para analizar la gráfica de una función, debemos recordar que *la altura de la gráfica es el valor de la función*. Entonces, podemos leer los valores de una función a partir de su gráfica.

EJEMPLO 1 | Hallar los valores de una función a partir de una gráfica

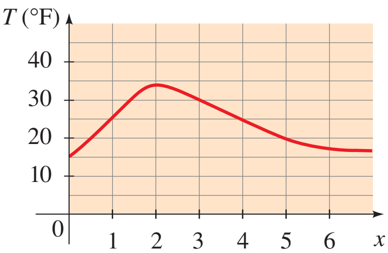


FIGURA 1 Función temperatura

La función T graficada en la Figura 1 da la temperatura entre el mediodía y las 6:00 p.m. en cierta estación meteorológica.

(a) Encuentre $T(1)$, $T(3)$ y $T(5)$.

(b) ¿Cuál es mayor, $T(2)$ o $T(4)$?

(c) Encuentre el (los) valor(es) de x para los que $T(x) = 25$.

(d) Encuentre el (los) valor(es) de x para los que $T(x) \geq 25$.

SOLUCIÓN

(a) $T(1)$ es la temperatura a la 1:00 p.m. Está representada por la altura de la gráfica arriba del eje x en $x = 1$. Entonces, $T(1) = 25$. Análogamente, $T(3) = 30$ y $T(5) = 20$.

(b) Como la gráfica es más alta en $x = 2$ que en $x = 4$, se deduce que $T(2)$ es mayor que $T(4)$.

(c) La altura de la gráfica es 25 cuando x es 1 y cuando x es 4. En otras palabras, la temperatura es 25 a la 1:00 p.m. y a las 4:00 p.m.

(d) La gráfica es más alta de 25 para x entre 1 y 4. En otras palabras, la temperatura era 25 o mayor entre la 1:00 p.m. y las 4:00 p.m.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5** ■

La gráfica de una función nos ayuda a representar el dominio y rango de la función en el eje x y eje y, como se ve en la figura 2.

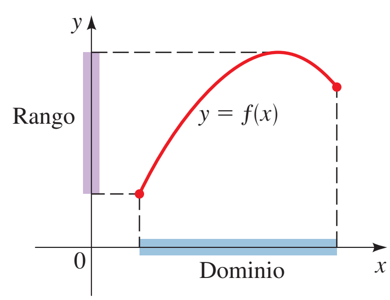


FIGURA 2 Dominio y rango de f

EJEMPLO 2 | Hallar el dominio y rango a partir de una gráfica

(a) Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

(b) Encuentre el dominio y rango de f.

SOLUCIÓN

(a) La gráfica se muestra en la Figura 3.

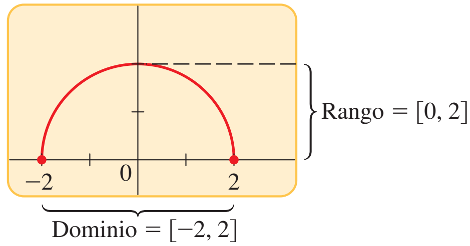


FIGURA 3 Gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(b) De la gráfica de la Figura 3 vemos que el dominio es $[-2, 2]$ y el rango es $[0, 2]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

Funciones crecientes y decrecientes

Es muy útil saber en dónde sube la gráfica y en dónde baja. La gráfica que se ve en la Figura 4 sube, baja y luego sube de nuevo a medida que avanzamos de izquierda a derecha: sube de A a B, baja de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es *creciente* cuando su gráfica sube y *decreciente* cuando baja.

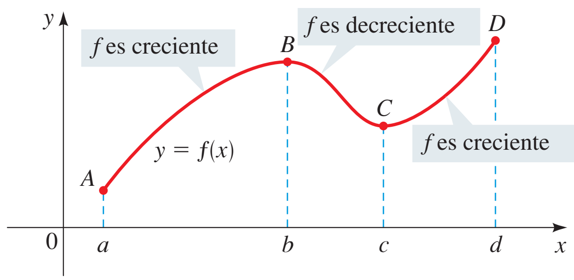


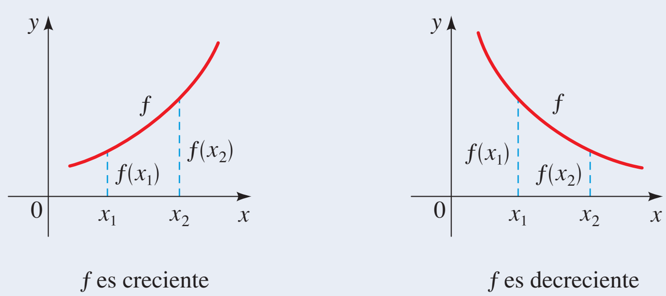
FIGURA 4 f es creciente en $[a, b]$ y $[c, d]$. f es decreciente en $[b, c]$.

Tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

f es **creciente** en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

f es **decreciente** en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.



EJEMPLO 3 | Intervalos en los que una función crece y decrece

La gráfica de la Figura 5 da el peso W de una persona a la edad x. Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.

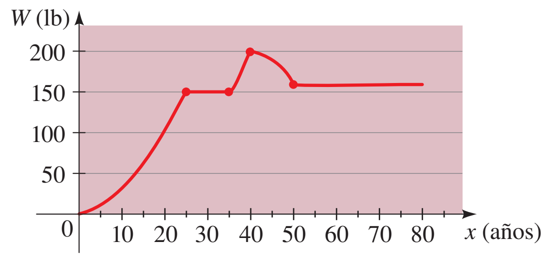


FIGURA 5 El peso como función de la edad

SOLUCIÓN La función W es creciente en $[0, 25]$ y $[35, 40]$. Es decreciente en $[40, 50]$. La función W es constante (ni creciente ni decreciente) en $[25, 30]$ y $[50, 80]$. Esto significa que la persona aumentó de peso hasta la edad de 25, luego aumentó de peso otra vez entre las edades de 35 y 40. Bajó de peso entre las edades de 40 y 50.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

EJEMPLO 4 | Hallar intervalos donde una función crece y decrece

(a) Trace la gráfica de la función $f(x) = 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$.

(b) Encuentre el dominio y rango de f.

(c) Encuentre los intervalos en los que f crece y decrece.

SOLUCIÓN

(a) Usamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la Figura 6.

(b) El dominio de f es $\mathbb{R}$ porque f está definida para todos los números reales. Usando la función TRACE de la calculadora, encontramos que el valor más alto de $f(2) = 32$. Por lo tanto, el rango de f es $(-\infty, 32]$.

(c) De la gráfica vemos que f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[0, 2]$ y es creciente en $[-1, 0]$ y $[2, \infty)$.

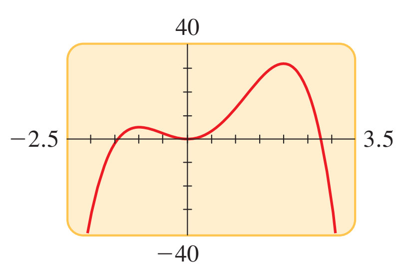


FIGURA 6 Gráfica de $f(x) = 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

EJEMPLO 5 | Hallar intervalos donde una función crece y decrece

(a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}$.
(b) Encuentre el dominio y rango de la función.
(c) Encuentre los intervalos en los que f crece y decrece.

SOLUCIÓN

(a) Usamos una calculadora graficadoras para trazar la gráfica en la Figura 7.
(b) De la gráfica observamos que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el rango es $[0, \infty)$.
(c) De la gráfica vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$.

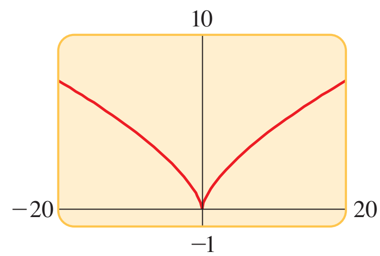


FIGURA 7 Gráfica de $f(x) = x^{2/3}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 29

▼ Valores máximo y mínimo locales de una función

Hallar los valores máximo y mínimo de una función es importante en numerosas aplicaciones. Por ejemplo, si una función representa ingreso o utilidad, entonces estamos interesados en su valor máximo. Para una función que representa costo, desearíamos hallar su valor mínimo. (Vea *Enfoque sobre el modelado*: *Modelado con funciones* en las páginas 213-222 para muchos otros ejemplos.) Fácilmente podemos hallar estos valores a partir de la gráfica de una función. Primero definimos qué queremos decir con un máximo o mínimo locales.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES DE UNA FUNCIÓN

1. El valor de una función $f(a)$ es un **valor máximo local** de f si

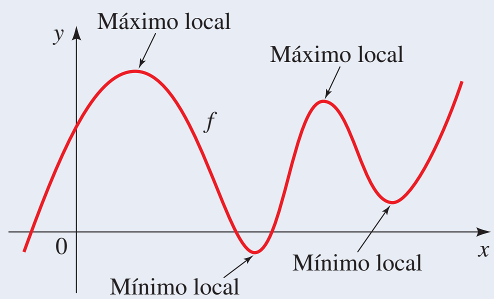
$$f(a) \geq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ es cercana a } a$$

(Esto significa que $f(a) \geq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a a.)
En este caso decimos que f tiene un **máximo local** en $x = a$.

2. El valor de la función $f(a)$ es un **mínimo local** de f si

$$f(a) \leq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ es cercana a } a$$

(Esto significa que $f(a) \leq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a a.)
En este caso decimos que f tiene un **mínimo local** en $x = a$.



Podemos hallar los valores máximo y mínimo locales de una función usando una calculadora graficadora.

Si hay un rectángulo de vista tal que el punto $(a, f(a))$ es el punto más alto en la gráfica de f *dentro del* rectángulo de vista (no en el borde), entonces el número $f(a)$ es un valor máximo local de f (vea Figura 8). Observe que $f(a) \geq f(x)$ para todos los números x que sean cercanos a a.

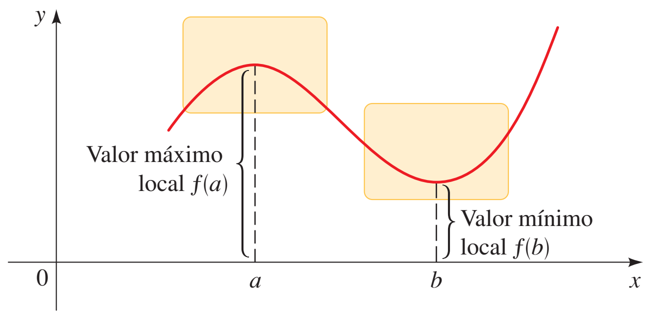


FIGURA 8

Análogamente, si hay un rectángulo de vista tal que el punto $(b, f(b))$ es el punto más bajo en la gráfica de f dentro del rectángulo de vista, entonces el número $f(b)$ es un valor mínimo local de f. En este caso, $f(b) \leq f(x)$ para todos los números x que sean cercanos a b.

EJEMPLO 6 | Hallar máximos y mínimos locales para una gráfica

Encuentre los valores máximo y mínimo local de la función $f(x) = x^3 - 8x + 1$, correctos a tres lugares decimales.

SOLUCIÓN La gráfica de f se muestra en la Figura 9. Parece haber un máximo local entre $x = -2$ y $x = -1$, y un mínimo local entre $x = 1$ y $x = 2$.

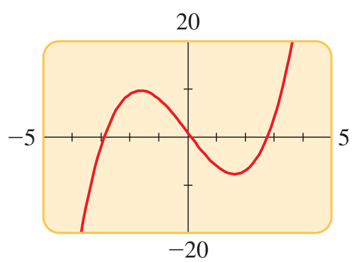


FIGURA 9 Gráfica de $f(x) = x^3 - 8x + 1$

Primero busquemos las coordenadas del punto máximo local. Hacemos acercamiento (zoom) para ampliar el área cerca de este punto, como se ve en la Figura 10. Con el uso de la función $\boxed{\text{TRACE}}$ de la calculadora graficadora, movemos el cursor a lo largo de la curva y observamos cómo cambian las coordenadas y. El valor máximo local de y es 9.709 y este valor ocurre cuando x es -1.633 correcto a tres lugares decimales.

Localizamos el valor mínimo en una forma similar. Al hacer acercamiento en el rectángulo de vista como se ve en la Figura 11, encontramos que el valor mínimo local es aproximadamente -7.709, y este valor se presenta cuando $x \approx 1.633$.

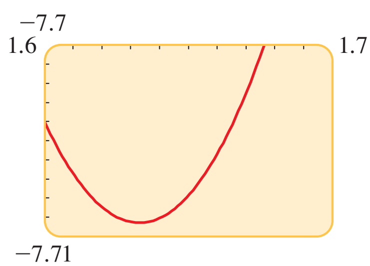


FIGURA 10

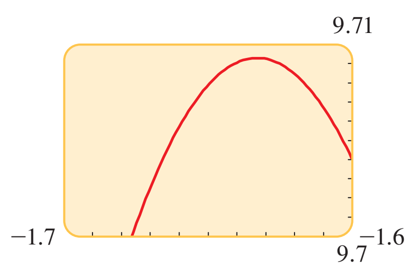


FIGURA 11

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

Los comandos `maximum` y `minimum` en una calculadora TI-83 o TI-84 son otro método para hallar valores extremos de funciones. Usamos este método en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 | Un modelo para el índice de precios de alimentos

Un modelo para el índice de precios de alimentos (el precio de una "canasta" representativa de alimentos) entre 1990 y 2000 está dado por la función

$$I(t) = -0.0113t^3 + 0.0681t^2 + 0.198t + 99.1$$

donde t se mide en años desde la mitad del año 1990, de modo que $0 \leq t \leq 10$, e $I(t)$ está a escala para que $I(3) = 100$. Estime el tiempo cuando el alimento fue más costoso durante el período 1990-2000.

SOLUCIÓN La gráfica de I como función de t se muestra en la Figura 12(a). Parece haber un máximo entre $t = 4$ y $t = 7$. Usando el comando `maximum`, como se ve en la Figura 12(b), observamos que el valor máximo de I es alrededor de 100.38 y se presenta cuando $t \approx 5.15$, que corresponde a agosto de 1995.

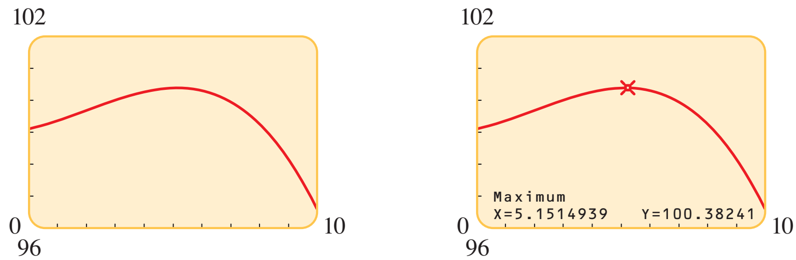


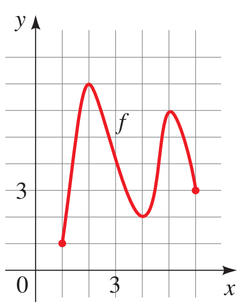
FIGURA 12 (a) (b)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

2.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1-4 ■ Estos ejercicios se refieren a la gráfica de la función f que se muestra a continuación.



1. Para hallar el valor de una función $f(x)$ a partir de la gráfica de f, encontramos la altura de la gráfica arriba del eje x en $x =$ ______. De la gráfica de f vemos que $f(3) =$ ______.

2. El dominio de la función f es todos los valores de ___ de los puntos sobre la gráfica, y el rango es todos los valores ____ correspondientes. De la gráfica de f vemos que el dominio de f es el intervalo _____ y el rango de f es el intervalo _____.

3. **(a)** Si f es creciente en un intervalo, entonces los valores y de los puntos en la gráfica ____ cuando aumentan los valores x. De la gráfica de f vemos que f es creciente en los intervalos _____ y ______.

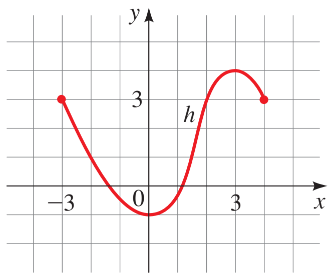
(b) Si f es decreciente en un intervalo, entonces los valores y de los puntos sobre la gráfica _____cuando aumentan los valores x. De la gráfica de f vemos que f es decreciente en los intervalos _____ y _____.

4. **(a)** El valor de una función $f(a)$ es un valor máximo local de f si $f(a)$ es el ______valor de f en algún intervalo que contenga a a. De la gráfica de f vemos que un valor máximo local de f es ____ y que este valor se presenta cuando x es _____.

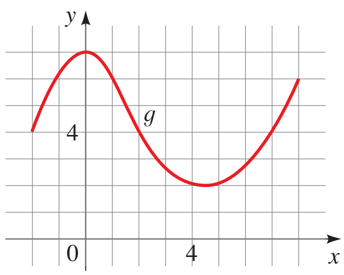
(b) El valor de una función $f(a)$ es un valor mínimo local de f si $f(a)$ es el ______valor de f en algún intervalo que contenga a a. De la gráfica de f vemos que un valor mínimo local de f es ____ y que este valor se presenta cuando x es _____.

HABILIDADES

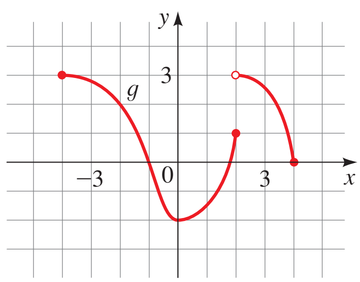
5. Se da la gráfica de una función h.
(a) Encuentre $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.
(b) Encuentre el dominio y rango de h.
(c) Encuentre los valores de x para los cuales $h(x) = 3$.
(d) Encuentre los valores de x para los cuales $h(x) \leq 3$.



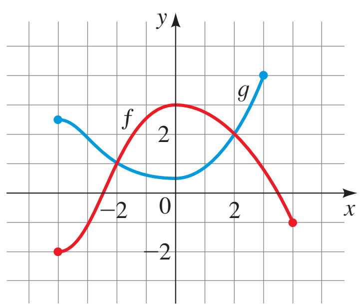
6. Se da la gráfica de una función h.
(a) Encuentre $g(-2)$, $g(0)$ y $g(7)$.
(b) Encuentre el dominio y rango de g.
(c) Encuentre los valores de x para los cuales $g(x) = 4$.
(d) Encuentre los valores de x para los cuales $g(x) > 4$.



7. Se da la gráfica de una función g.
(a) Encuentre $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$.
(b) Encuentre el dominio y rango de g.



8. Se dan las gráficas de las funciones f y g.
(a) ¿Cuál es mayor, $f(0)$ o $g(0)$?
(b) ¿Cuál es mayor, $f(-3)$ o $g(-3)$?
(c) ¿Para cuáles valores de x es $f(x) = g(x)$?



9-18 ■ Se da una función f. **(a)** Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de f. **(b)** Encuentre el dominio y rango de f a partir de la gráfica.

9. $f(x) = x - 1$

10. $f(x) = 2(x + 1)$

11. $f(x) = 4, \quad 1 \leq x \leq 3$

12. $f(x) = x^2, \quad -2 \leq x \leq 5$

13. $f(x) = 4 - x^2$

14. $f(x) = x^2 + 4$

15. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

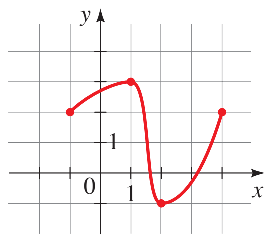
16. $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

17. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

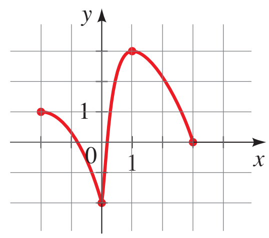
18. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

19-22 ■ Se da la gráfica de una función. Determine los intervalos en los que la función es **(a)** creciente y **(b)** decreciente.

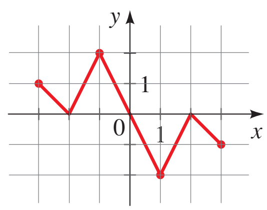
19.



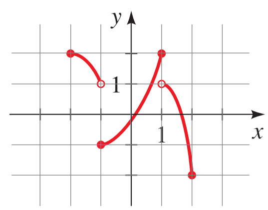
20.



21.



22.



23-30 ■ Se da una función f. **(a)** Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de f. **(b)** Exprese aproximadamente los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

23. $f(x) = x^2 - 5x$

24. $f(x) = x^3 - 4x$

25. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

26. $f(x) = x^4 - 16x^2$

27. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

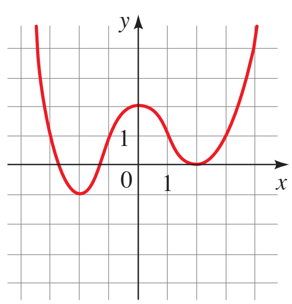
28. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

29. $f(x) = x^{2/5}$

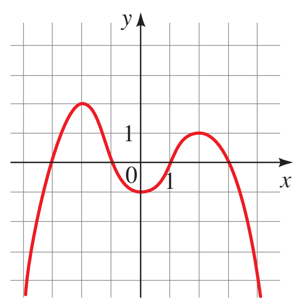
30. $f(x) = 4 - x^{2/3}$

31-34 ■ Se da la gráfica de una función. **(a)** Encuentre todos los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. **(b)** Encuentre los intervalos en los que la función es creciente y en los que la función es decreciente.

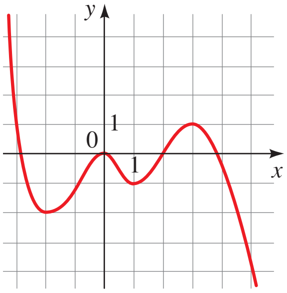
31.



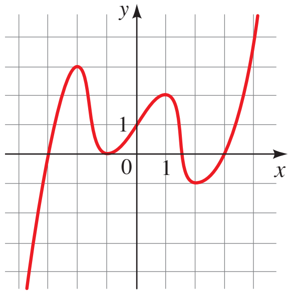
32.



33.



34.



35-42 ■ Se da una función. **(a)** Encuentre todos los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales. **(b)** Encuentre los intervalos en los que la función es creciente y en los que la función es decreciente. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

35. $f(x) = x^3 - x$

36. $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

37. $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

38. $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

39. $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

40. $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

41. $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$

42. $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

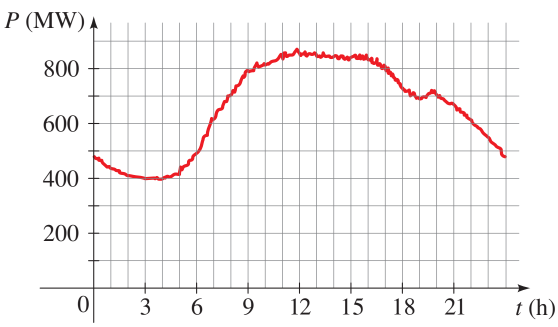
APLICACIONES

43. Consumo de energía eléctrica La figura muestra el consumo de energía eléctrica en San Francisco para el 19 de septiembre de 1996 (P se mide en megawatts; t se mide en horas empezando a la medianoche).

(a) ¿Cuál fue el consumo de energía eléctrica a las 6:00 a.m.? ¿A las 6:00 p.m.?

(b) ¿Cuándo fue mínimo el consumo de energía eléctrica?

(c) ¿Cuándo fue máximo el consumo de energía eléctrica?



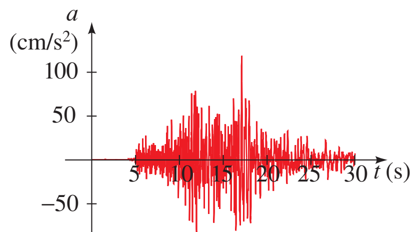
Fuente: Pacific Gas & Electric

44. Terremoto La gráfica muestra la aceleración vertical del suelo por el terremoto Northridge de 1994 en Los Ángeles, medido por un sismógrafo. (Aquí t representa el tiempo en segundos.)

(a) ¿En qué tiempo t el terremoto hizo los primeros movimientos observables de la tierra?

(b) ¿En qué tiempo t pareció terminar el terremoto?

(c) ¿En qué tiempo t alcanzó su intensidad máxima el terremoto?

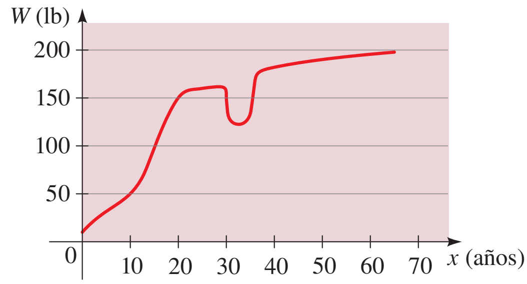


Fuente: California Department of Mines and Geology

45. Función de peso La gráfica da el peso W de una persona a la edad x.

(a) Determine los intervalos en los que la función W es creciente y aquellos en los que es decreciente.

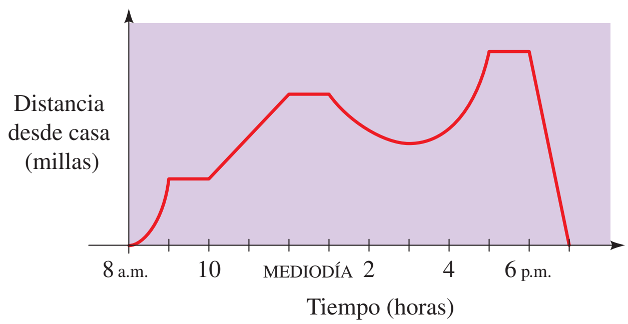
(b) ¿Qué piensa usted que ocurrió cuando esta persona tenía 30 años de edad?



46. Función de distancia La gráfica da la distancia de un representante de ventas desde su casa como función del tiempo en cierto día.

(a) Determine los intervalos (tiempo) en los que su distancia desde casa fue creciente y aquellos en los que fue decreciente.

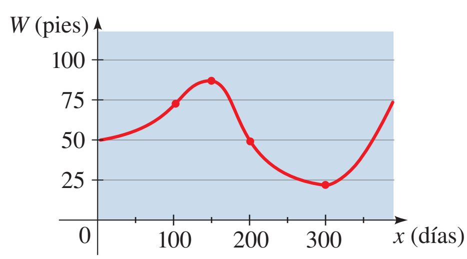
(b) Describa verbalmente lo que indica la gráfica acerca de sus viajes en este día.



47. Niveles cambiantes de agua La gráfica muestra la profundidad del agua W en un depósito en un período de un año, como función del número de días x desde el principio del año.

(a) Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.

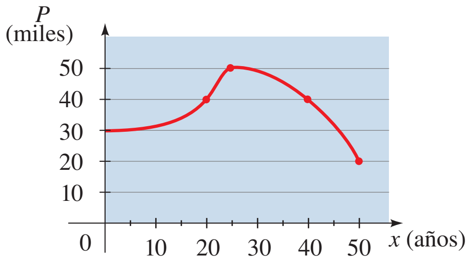
(b) ¿En qué valor de x alcanza W un máximo local? ¿Un mínimo local?



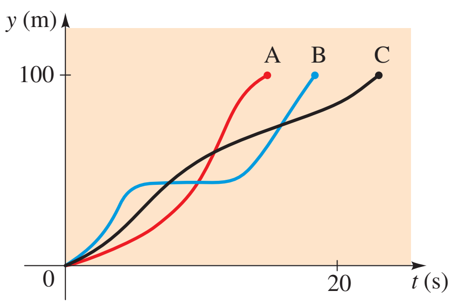
48. Aumento y disminución de población La gráfica siguiente muestra la población P en una pequeña ciudad industrial de 1950 a 2000. La variable x representa los años desde 1950.

(a) Determine los intervalos en los que la función P es creciente y aquellos en los que es decreciente.

(b) ¿Cuál fue la población máxima, y en qué año se alcanzó?



49. Carrera de obstáculos Tres atletas compiten en una carrera de 100 metros con vallas. La gráfica describe la distancia corrida como función del tiempo para cada uno de los atletas. Describa verbalmente lo que indica la gráfica acerca de la carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada uno de los atletas terminó la carrera? ¿Qué piensa usted que le ocurrió al corredor B?



50. Gravedad cerca de la Luna Podemos usar la Ley de Newton de Gravitación para medir la atracción gravitacional entre la Luna y un estudiante de álgebra en una nave espacial situada a una distancia x sobre la superficie de la Luna:

$$F(x) = \frac{350}{x^2}$$

Aquí F se mide en newtons (N), y x se mide en millones de metros.

(a) Grafique la función F para valores de x entre 0 y 10.

(b) Use la gráfica para describir el comportamiento de la atracción gravitacional F cuando aumenta la distancia x.

51. Radios de estrellas Los astrónomos infieren los radios de estrellas con el uso de la Ley de Stefan Boltzmann:

$$E(T) = (5.67 \times 10^{-8})T^4$$

donde E es la energía radiada por unidad de área superficial medida en watts (W) y T es la temperatura absoluta medida en kelvin (K).

(a) Grafique la función E para temperaturas T entre 100 K y 300 K.

(b) Use la gráfica para describir el cambio en energía E cuando la temperatura T aumenta.

52. Peces migratorios Un pez nada a una velocidad v con respecto al agua, contra una corriente de 5 mi/h. Usando un modelo matemático de gasto de energía, puede demostrarse que la energía total E requerida para nadar una distancia de 10 millas está dada por

$$E(v) = 2.73v^3 \frac{10}{v - 5}$$

Los biólogos piensan que los peces migratorios tratan de reducir al mínimo la energía necesaria para nadar una distancia fija. Encuentre el valor de v que minimiza la energía necesaria.

NOTA: Este resultado ha sido verificado; los peces migratorios nadan contra una corriente a una velocidad 50% mayor que la velocidad de la corriente.

53. Ingeniería de carreteras Una ingeniera de carreteras desea estimar el número máximo de autos que con seguridad puedan viajar por una carretera en particular a una velocidad determinada. Ella supone que cada auto mide 17 pies de largo, viaja a una rapidez s, y sigue al auto de adelante a una "distancia segura de seguimiento" para esa rapidez. Ella encuentra que el número N de autos que pueden pasar por cierto punto por minuto está modelado por la función

$$N(s) = \frac{88s}{17 + 17\left(\dfrac{s}{20}\right)^2}$$

¿A qué rapidez puede viajar con seguridad en esa carretera el máximo número de autos?

54. Volumen de agua Entre 0ºC y 30ºC, el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T está dado por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el volumen de 1 kg de agua es mínimo.

55. Toser Cuando un cuerpo extraño alojado en la tráquea (garganta) obliga a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba, causando un aumento en presión en los pulmones. Al mismo tiempo, la tráquea se contrae, causando que el aire expulsado se mueva más rápido y aumente la presión sobre el cuerpo extraño. De acuerdo con un modelo matemático de toser, la velocidad v de la corriente de aire que pasa por la tráquea de una persona de tamaño promedio está relacionada con el radio r de la tráquea (en centímetros) por la función

$$v(r) = 3.2(1 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2} \le r \le 1$$

Determine el valor de r para el cual v es máxima.