INTRODUCCIÓN

En este CAPÍTULO trataremos sobre uno de los problemas más importantes de la aproximación numérica la solución de ecuaciones no lineales analizado de diferentes maneras desde la óptica analítica y su interpretación geométrica.

En el campo de la tecnología y principalmente en la ingeniería nos encontramos con el problema hallar las raíces de la ecuación f(x) = 0.

Como por ejemplo en la teoría de la difracción de la luz se presenta la ecuación $x - tanx = 0$.

Para determinar las orbitas planetarias se precisa la ecuación llamada ecuación de Kepler, definida por $x - asenx = b$, para diversos valores de a y b.

Es decir, f(x) puede ser una función de variable real x, como es un polinomio en x, o como una función trascendente

Para dar solución a estos problemas existen distintos algoritmos o métodos para encontrar las raíces de f(x) = 0, pero debemos tener en cuenta que ninguno es general, pues en otras palabras no existe un método que funcione perfectamente con todas las ecuaciones.

Sólo en un reducido caso será posible obtener las raíces exactas de f(x) = 0, es decir cuando se trata de f(x) factorizable, en tal sentido tenemos:

Método Gráfico y de Bisección

Existe una serie de métodos para encontrar las raíces de *ecuaciones algebraicas* o *trascendentales*, para algunos casos las raíces o ceros de la ecuación se pueden obtener de una forma inmediata.

Ejemplo_ 1

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 5 = 0$$

1	**4**	**10**	**12**	**5**	
	-1	-3	-7	-5	-1
1	3	7	5		

$$(x^3 + 3x^2 + 7x + 5)(\boldsymbol{x} + \mathbf{1}) = 0$$

Resolver…

Pero hay ecuaciones aparentemente simples como $\boldsymbol{f(x) = e^{-x} - x}$ que *no pueden resolverse analíticamente* en estos casos la única alternativa es buscar una técnica ***de solución aproximada***.

Entonces podemos definir formalmente dos tipos de ecuaciones que son:

Definición_1:

Una función dada por $y = \boldsymbol{f(x)}$ $\boldsymbol{es\ algebraica}$ si puede expresarse de la siguiente forma:

$$f_n y^n + f_{n-1} y^{n-1} + f_{n-2} y^{n-2} + \cdots + f_1 y^1 + f_0 = 0$$

Donde las f_i son polinomios en x. *Los polinomios son un caso particular de las funciones algebraicas y se representan*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Definición_2:

Una ***función trascendental*** es una que no es algebraica e incluye funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y otros menos familiares, por ejemplo:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$f(x) = e^x + senx$$

$$f(x) = lnx^2 - 1$$

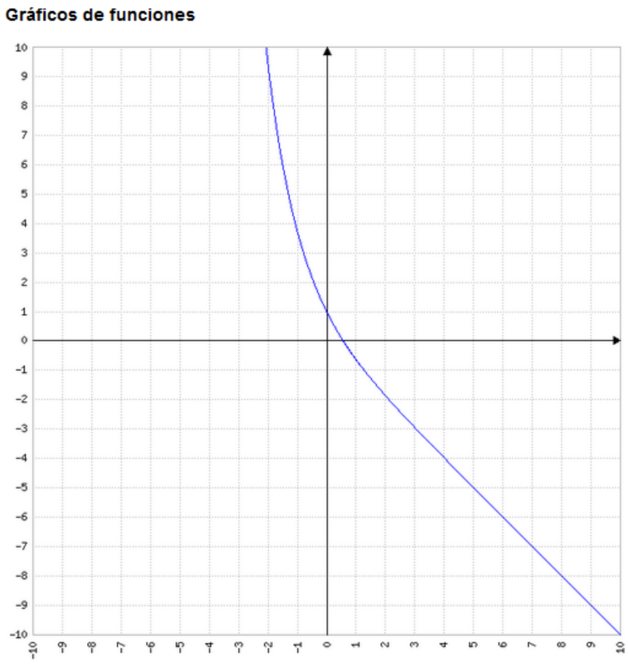
Método gráfico

Un método para obtener una *solución aproximada* consiste en graficar la función y determinar donde se *cruza la función con el eje x*. Este punto representa el valor de x aproximado para el cual $f(x) = 0$ y representa una raíz de la ecuación.

Ejemplo_3

Empleé el método gráfico para obtener una raíz aproximada a la función $\boldsymbol{f(x) = e^{-x} - x}$

x	f(x)	$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f(x)}]$
0	1	(0,1)
0.2	0.619	(0.2;0.619)
0.4	0.270	
0.6	-0.051	
0.8	-0.351	
1	-0.632	



Ejemplo_4

Consideremos la función $f(x) = x - senx$

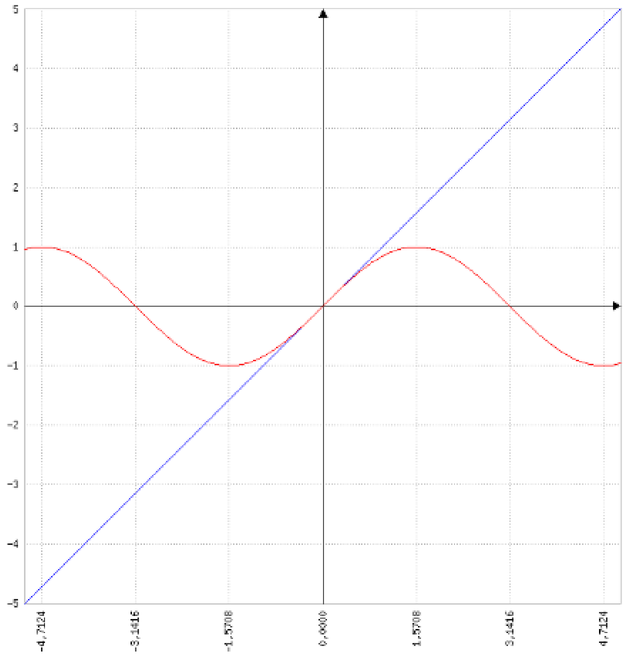
1. Si $\boldsymbol{f(x) = 0}$ entonces las funciones $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ ***deben tener el mismo dominio***
2. Si $f(x)$ es continua también $\varphi_1(x)\ y\ \varphi_2(x)$ también ***son continuas***

Ahora si podemos resolver el ejemplo 4 por el método gráfico

$$0 = x - senx$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = senx \\ \varphi_2(x) = x \end{cases}$$

Al graficar la ecuación nos fijamos los puntos de intersección de las funciones dadas proyectamos al eje x, encontramos así las raíces aproximadas de la función.



Ejemplo_5

Consideremos la función $g(x) = cosx - senx$ y hallar la solución

1. Si $g(x) = 0$ entonces $0 = cosx - senx$ entonces $\varphi_1(x) = cosx$ y $\varphi_1(x) = senx$

2. $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ son funciones continuas

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = cosx \\ \varphi_2(x) = senx \end{cases}$$

Entonces una solución aproximada es $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} = 0.785}$

Comprobación

$$g(x) = cosx - senx$$

$$g(0.785) = cos0.785 - sen0.785$$

$$g(0.785) = 0$$

Ejemplo_6

Consideremos la función $g(x) = xsenx - 1$ hallar las raíces de la ecuación

Resolver….

Método de Bisección

En general si una función $f(x)$ es real y *continua en el intervalo* $x_i\ a\ x_u$ y $f(x_i)\ y\ f(x_u)$ tienen signos opuestos, esto es $\boldsymbol{f(x_i)\ f(x_u) < 0}$ ***entonces hay al menos una raíz real en el intervalo*** $[\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_u}]$

El método de bisección es un método de búsqueda incremental donde el intervalo siempre se divide en dos.

Algoritmo de Bisección

1. Escoja los valores iniciales de $x_i\ y\ x_u$ de tal forma que la función cambie de signo sobre el intervalo ***(Teorema de Bolzano)***. Comprobar que $f(x_i)\ f(x_u) < 0$

2. La primera aproximación a la raíz x, se determina por $\boldsymbol{x_r = \frac{x_i + x_u}{2}}$

3. Realice las siguientes evaluaciones y determine en que subintervalo cae la raíz

   a) Si $\boldsymbol{f(x_i)\ f(x_r) < 0}$ entonces la raíz se encuentra dentro del primer subintervalo, por lo tanto $x_u = x_r$ y continúe al paso 4

   b) Si $\boldsymbol{f(x_i)\ f(x_r) > 0}$ entonces la raíz se encuentra dentro del segundo subintervalo, por lo tanto $x_i = x_r$ y continúe al paso 4

   c) Si $f(x_i)\ f(x_r) = 0$ entonces la raíz es igual a x_r y *se terminan los cálculos*

4. Calcúlese una *nueva aproximación* a la raíz por $x_r = \frac{x_i + x_u}{2}$
5. Decídase si la nueva aproximación es tan exacta como se quiere, si es así los cálculos terminan, de otra manera regresar al paso 3.

Ejemplo_ 7

Utilice el *método de Bisección* para *hallar la raíz de la función* $\boldsymbol{f(x)} = x^3 - x - 1$ en [1,2]

ni		xi	xu	$\boldsymbol{f(x_i)}$	$\boldsymbol{f(x_u)}$	$\boldsymbol{x_r}$	$\boldsymbol{f(x_r)}$	$\boldsymbol{e_a}\%$
1		1	2	-1	5	1.5	0.875	-
3		1.25	1.5	-0.296875	0.875	1.375	0.2246093	9.09
5		1.3125	1.375			1.34375	0.0826110	2.3255

Que la solución aproximada de la función algebraica dada es $\boldsymbol{x = 1.34375}$ con un $e_a = 2.33\%$

Ejemplo 8

Determine la raíz real de $\boldsymbol{f(x) = \frac{1-0.6x}{x}}$

a) Analíticamente
b) Gráficamente
c) Método de bisección

A) Para la solución analítica $f(x) = 0$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1-0.6x}{x}}$$

$$0 = \frac{1-0.6x}{x}$$

$$x = 1.667$$

B) La solución gráfica podemos obtener dando valores

El $Dom_f: R - \{0\}$

x	$y = f(x)$	(x,y)
-2	-1.1	
-1	-1.6	
1	0.4	
2	-0.1	
3	-0.267	

C) La solución por el Método de bisección

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1-0.6x}{x}}$$

ni	xi	xu	$f(x_i)$	$f(x_u)$	x_r	$f(x_r)$	$e_a\%$
1	1	2	**0.4**	-0.1	1.5	**0.06667**	-
2	1.5	**2**	0.06667	-0.1	1.75	-0.02857	14.29
3	1.5	1.75					
4							
5							

Resolver…