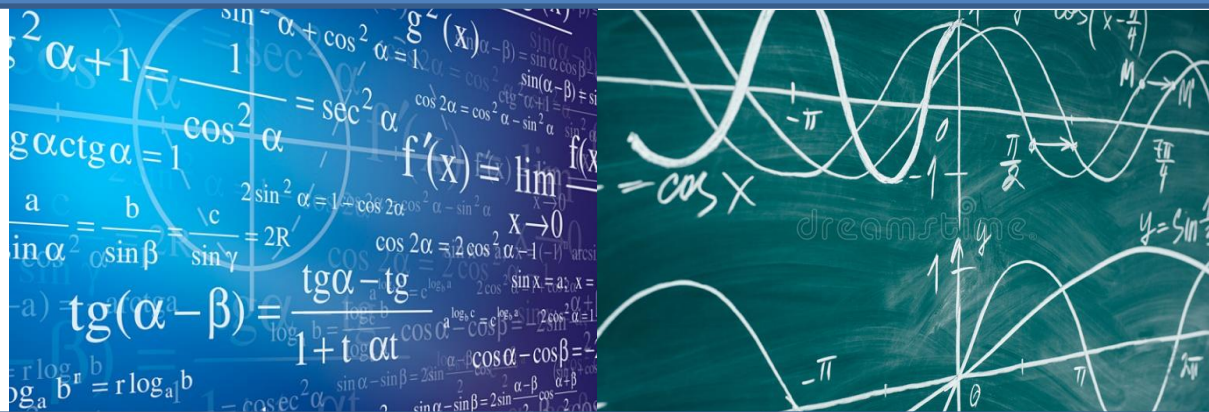




UNIDAD 5:

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

Lenin Orozco
MÉTODOS NUMÉRICOS
ESCUELA DE INGENIERIA AMBIENTAL
UNACH



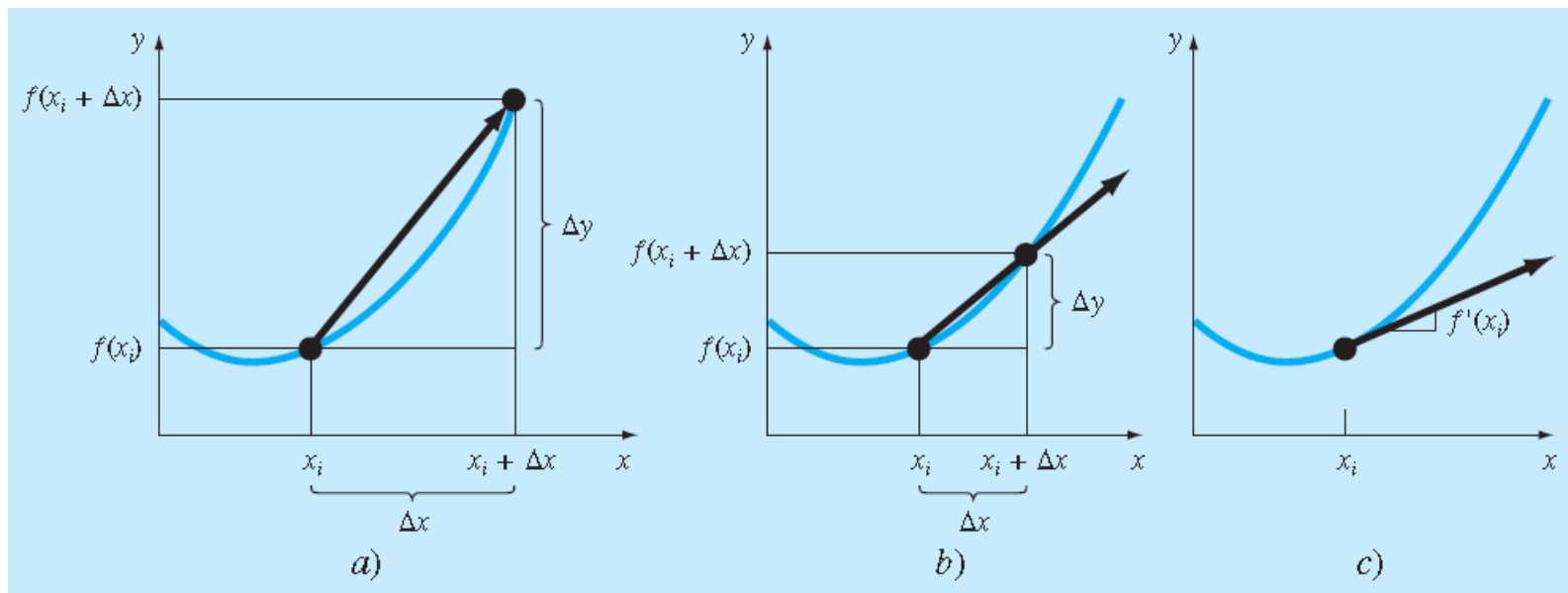
De acuerdo a la definición del diccionario, *diferenciar* significa “marcar por diferencias; distinguir;... percibir la diferencia en o entre”. En el contexto de las matemáticas, la *derivada* sirve como el principal vehículo para la diferenciación, representa la razón de cambio de una variable dependiente con respecto a una variable independiente.

Como se ilustra en la figura, la definición matemática de la derivada empieza con una aproximación por diferencias:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

donde y y $f(x)$ son representaciones alternativas de la variable dependiente y x es la variable independiente

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

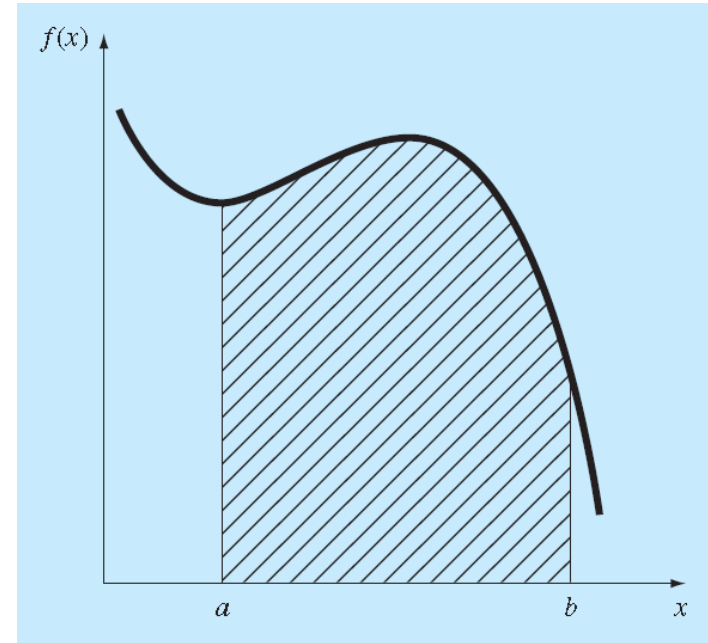


Como se observa en la descripción visual de la figura c), la derivada evaluada es la pendiente de la recta tangente a la curva en x_i .



En cálculo, el proceso inverso de la diferenciación es la integración. De acuerdo con la definición del diccionario, *integrar* significa “juntar partes en un todo; unir; indicar la cantidad total ...”. Matemáticamente, la integración se representa por

$$I = \int_a^b f(x) dx$$





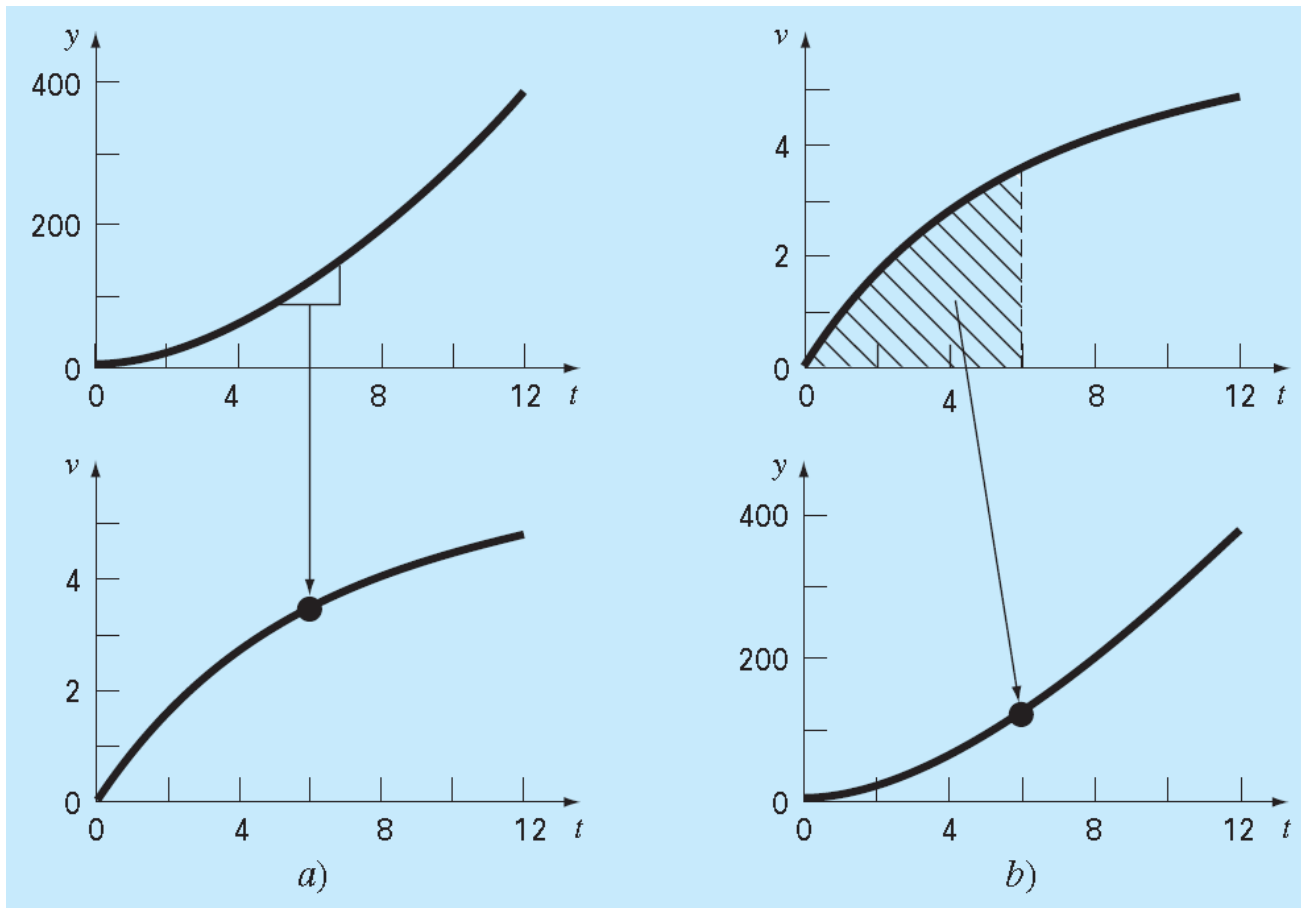
Como se dijo antes, la “distinción” o “discriminación” de la diferenciación y el “juntar” de la integral son procesos estrechamente relacionados, de hecho, inversamente relacionados. Por ejemplo, si se tiene una función dada $y(t)$ que especifica la posición de un objeto en función del tiempo, la diferenciación proporciona un medio para determinar su velocidad.

$$v(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

De manera inversa, si se tiene la velocidad como una función del tiempo, la integración se utilizará para determinar su posición

$$y(t) = \int_0^t v(t) dt$$

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN





MÉTODOS PARA DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

La función que va a diferenciarse o integrarse estará, usualmente, en una de las siguientes tres formas:

1. Una función continua simple como un polinomio, una función exponencial o una función trigonométrica.
2. Una función continua complicada que es difícil o imposible de diferenciar o integrar directamente.
3. Una función tabulada donde los valores de x y $f(x)$ están dados como un conjunto discreto de puntos, lo cual es el caso cuando se tienen datos experimentales o de campo.



MÉTODOS PARA DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

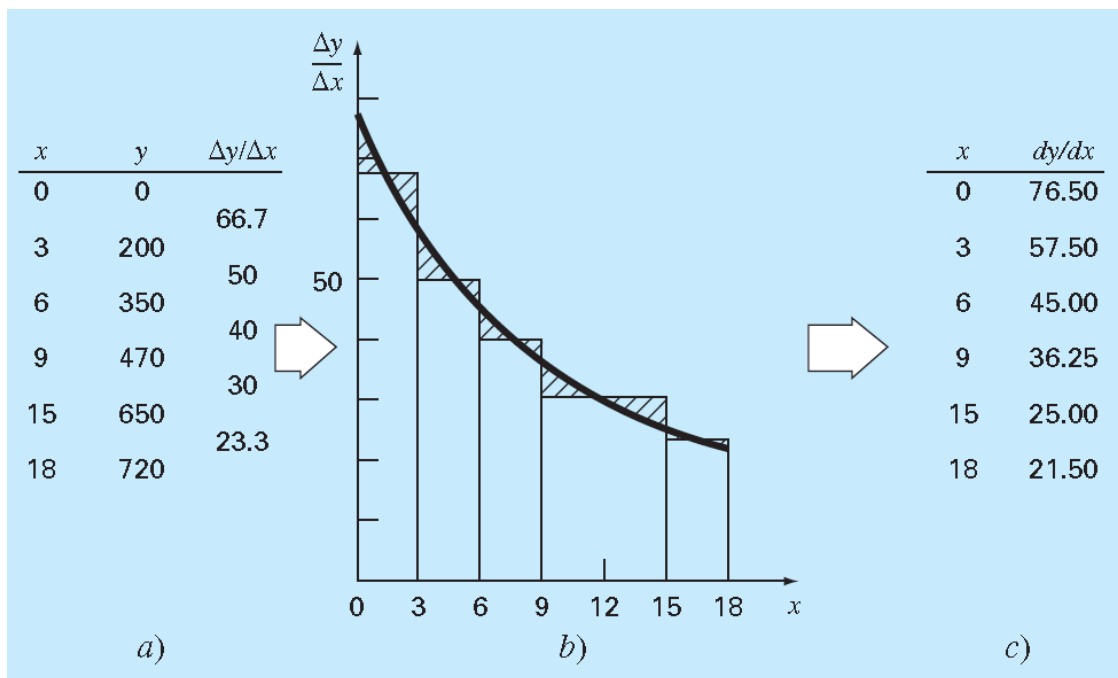
DIFERENCIACIÓN GRÁFICA POR ÁREAS IGUALES

Diferenciación gráfica por áreas iguales. En este método los datos (x, y) se tabulan y, para cada intervalo, se emplea una diferencia dividida simple $\Delta y / \Delta x$ para estimar la pendiente. Después, esos valores se grafican como una curva escalonada contra x . Luego se dibuja una curva suave que trata de aproximar el área bajo la curva escalonada. Es decir, se dibuja de manera que las áreas negativas y positivas se equilibren visualmente. Entonces, las razones para valores dados de x pueden leerse en la curva.



MÉTODOS PARA DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

DIFERENCIACIÓN GRÁFICA POR ÁREAS IGUALES

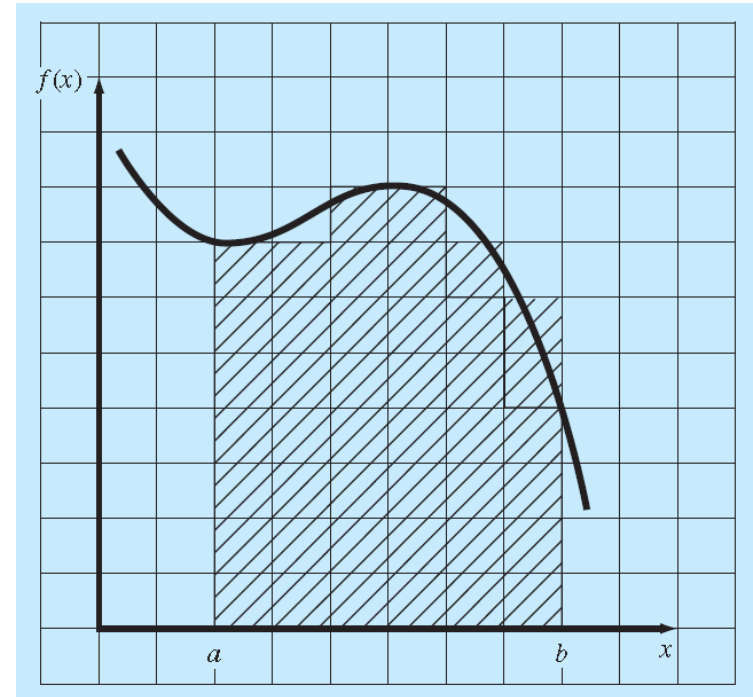




MÉTODOS PARA DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

DIFERENCIACIÓN GRÁFICA POR ÁREAS IGUALES

Un procedimiento intuitivo simple consiste en graficar la función sobre una cuadrícula y contar el número de cuadros que se aproximen al área. Este número multiplicado por el área de cada cuadro proporciona una burda estimación del área total bajo la curva. Dicha estimación se puede mejorar, a expensas de mayor trabajo, usando una cuadrícula más fina.

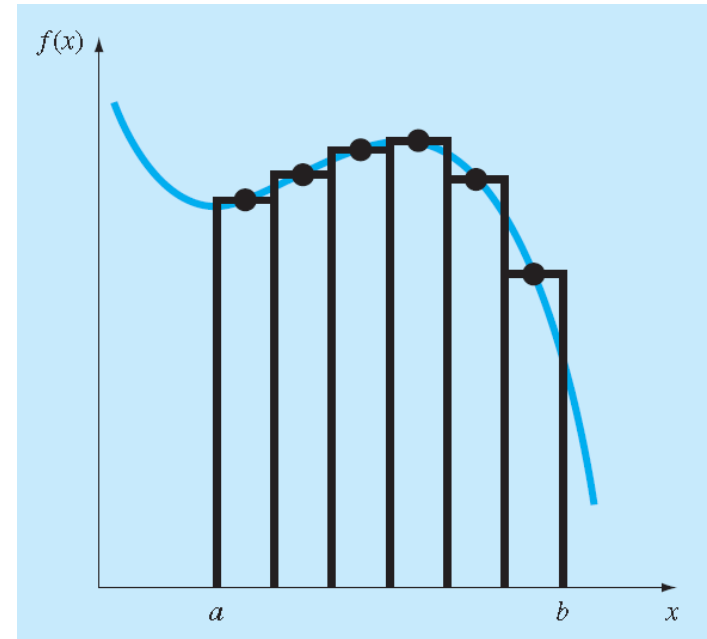




MÉTODOS PARA DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

DIFERENCIACIÓN GRÁFICA POR ÁREAS IGUALES

Un procedimiento intuitivo simple consiste en graficar la función sobre una cuadrícula y contar el número de cuadros que se aproximen al área. Este número multiplicado por el área de cada cuadro proporciona una burda estimación del área total bajo la curva. Dicha estimación se puede mejorar, a expensas de mayor trabajo, usando una cuadrícula más fina.





DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN EN INGENIERÍA

En términos de derivadas, entre las más comunes figuran las leyes que consideran potenciales o gradientes. Por ejemplo, la *ley de Fourier de la conducción de calor* cuantifica la observación de que el calor fluye desde regiones de mayor a menor temperatura. En el caso unidimensional, ésta se expresa en forma matemática como:

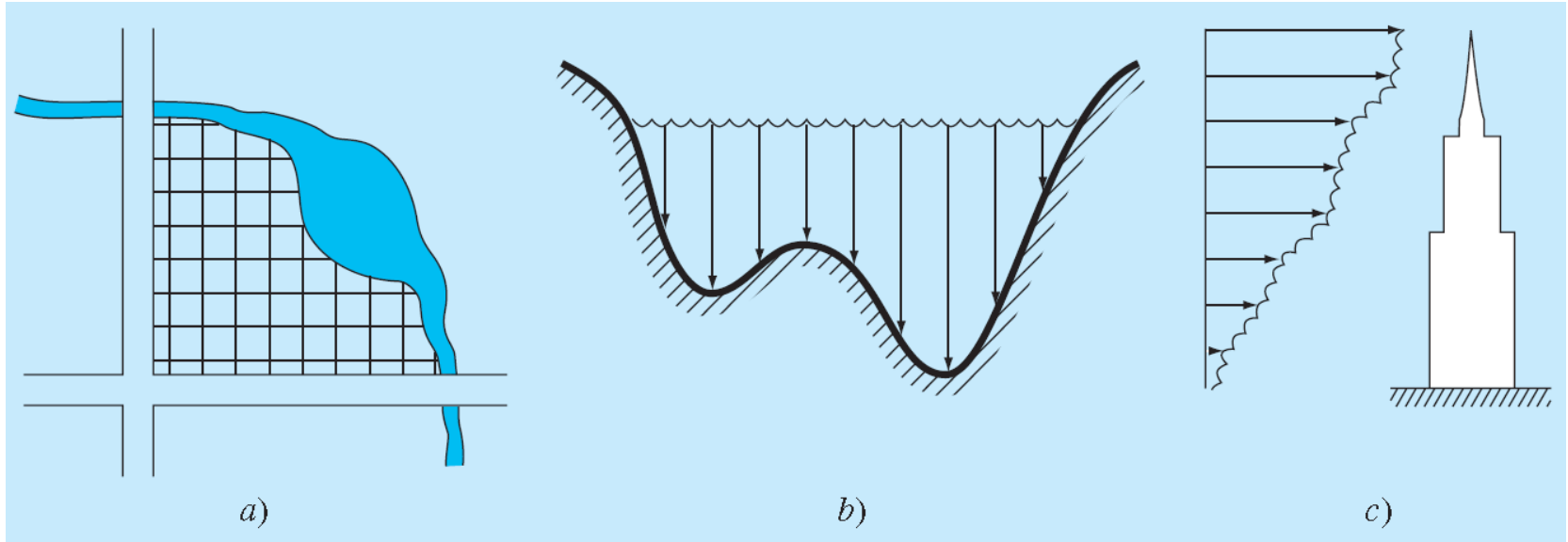
$$\text{Flujo de calor} = -k' \frac{dT}{dx}$$

Así, la derivada proporciona una medida de la intensidad del cambio de temperatura, o *gradiente*, que ocasiona la transferencia de calor.



DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN EN INGENIERÍA

Así como las estimaciones exactas de las derivadas son importantes en ingeniería, también el cálculo de integrales es igualmente valioso. Varios ejemplos relacionados directamente con la idea de la integral como el área bajo la curva.





FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON - COTES

Las *fórmulas* de *Newton-Cotes* son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar:

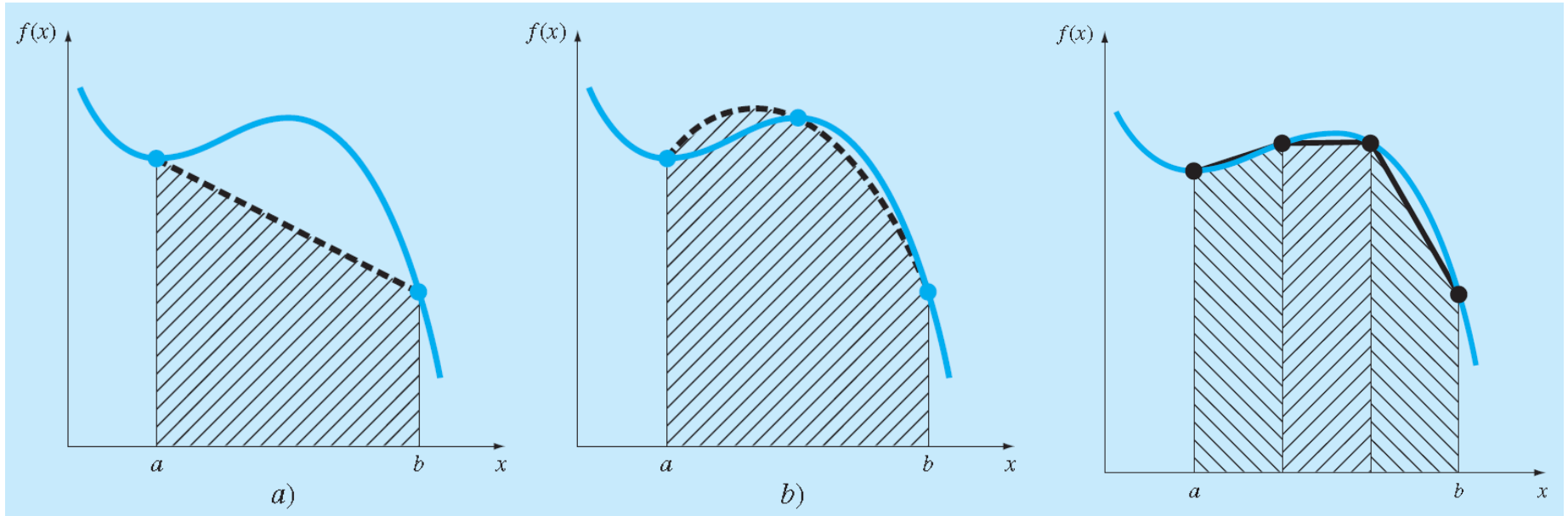
$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_n(x) dx$$

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

La integral también se puede aproximar usando un conjunto de polinomios aplicados por pedazos a la función o datos, sobre segmentos de longitud constante.



FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON - COTES





FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DEL TRAPECIO

La *regla del trapecio* es la primera de las fórmulas cerradas de integración de Newton- Cotes. Corresponde al caso donde el polinomio de la ecuación es de primer grado:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_1(x) dx$$

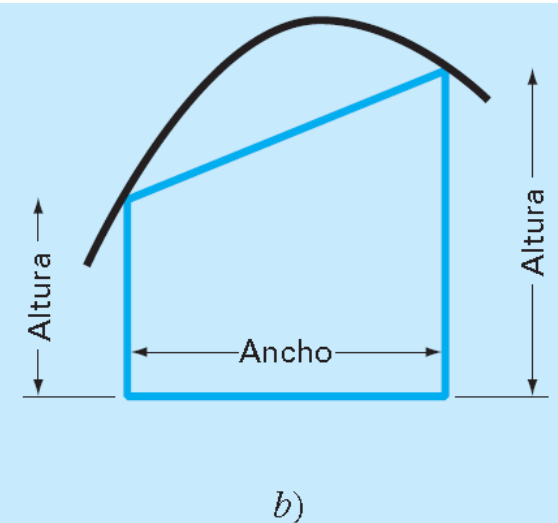
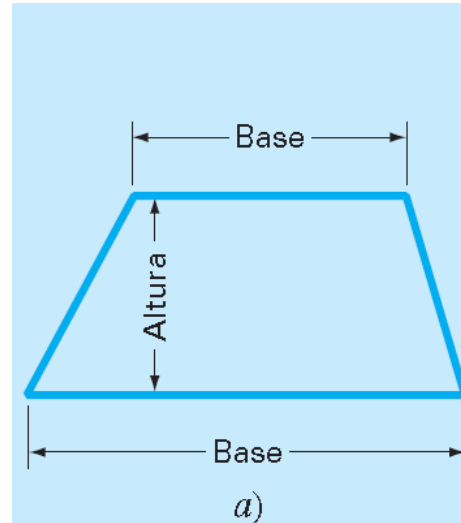
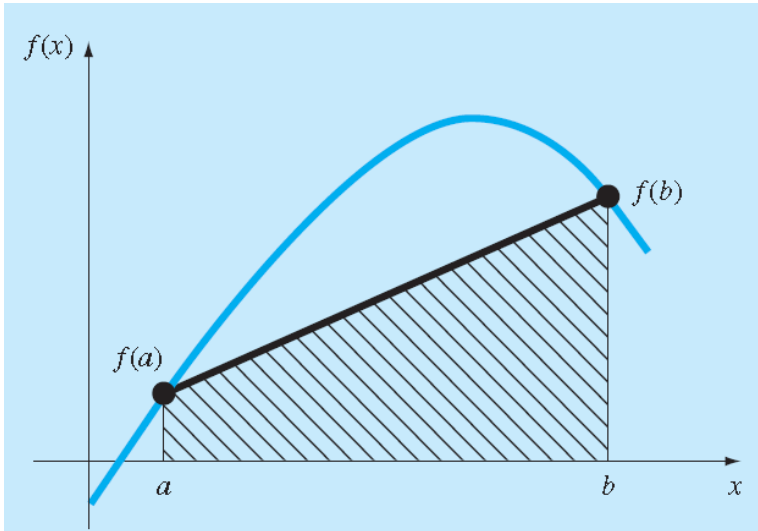
$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$



FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DEL TRAPECIO

$$I \cong \text{ancho} \times \text{altura promedio}$$





FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DEL TRAPECIO

EJEMPLO:

Integre numéricamente y encuentre el valor del error relativo

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$



FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DEL TRAPECIO DE APLICACIÓN MÚLTIPLE

Una forma de mejorar la precisión de la regla del trapecio consiste en dividir el intervalo de integración de a a b en varios segmentos, y aplicar el método a cada uno de ellos.

$$h = \frac{b - a}{n} \quad \text{Ancho de cada segmento}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

$$I = h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$



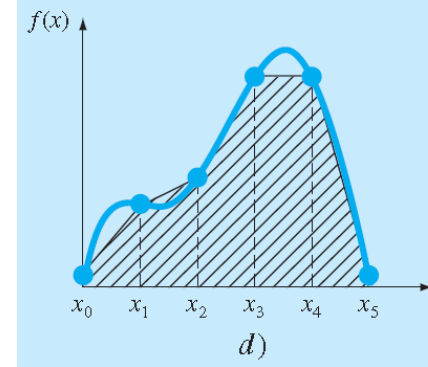
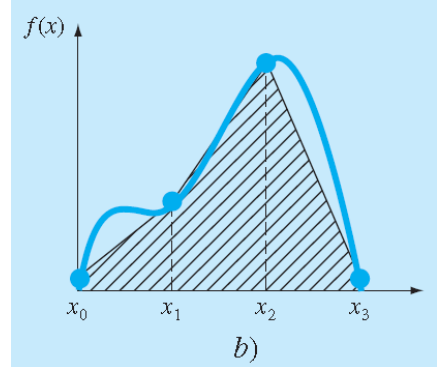
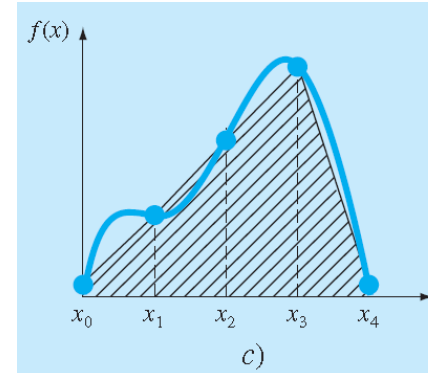
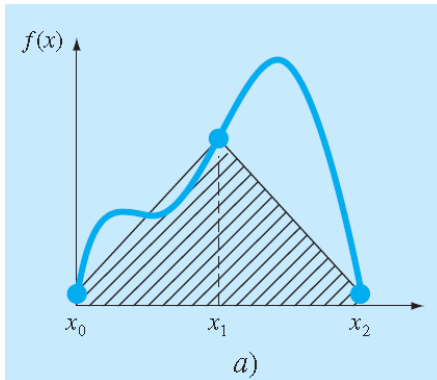
FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DEL TRAPECIO DE APLICACIÓN MÚLTIPLE

$$I = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$I = \underbrace{(b - a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Altura promedio}}$$

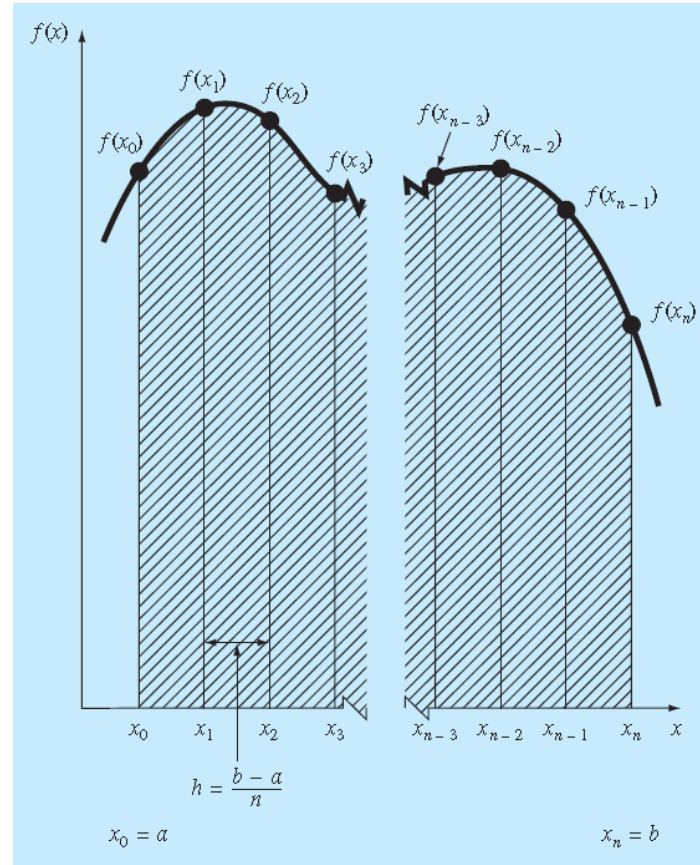


FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DEL TRAPECIO DE APLICACIÓN MÚLTIPLE





FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DEL TRAPECIO DE APLICACIÓN MÚLTIPLE



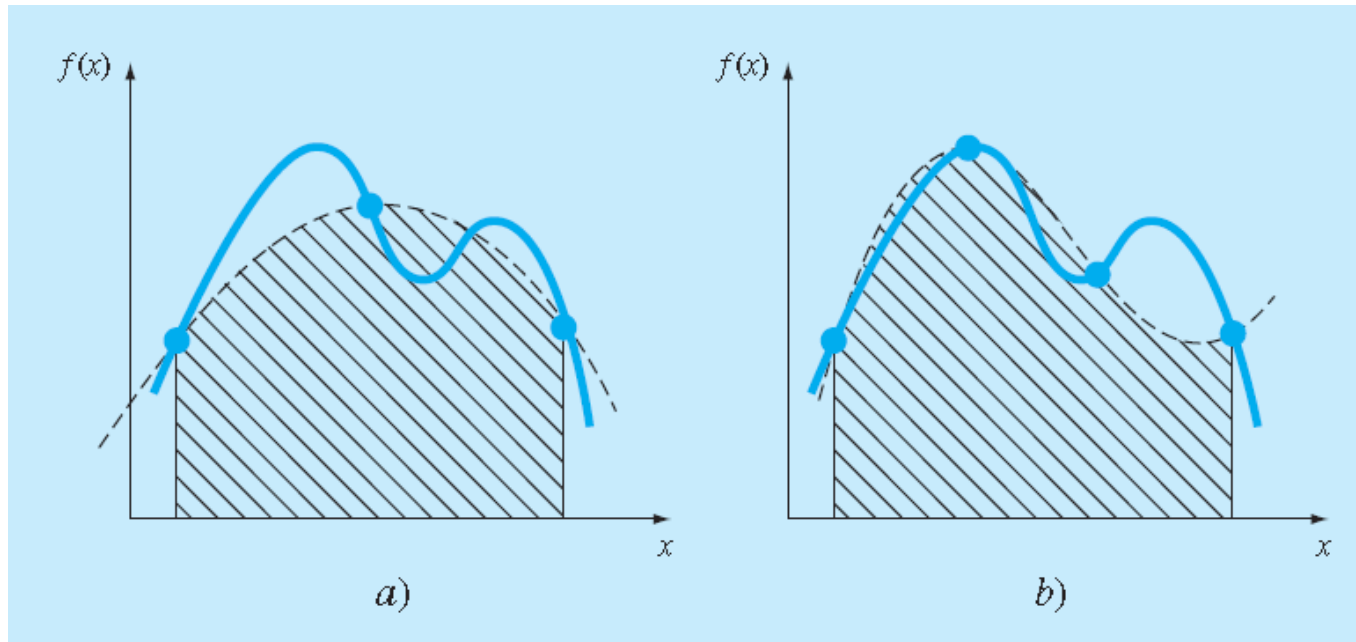


FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DE SIMPSON 1/3

Además de aplicar la regla del trapecio con una segmentación más fina, otra forma de obtener una estimación más exacta de una integral consiste en usar polinomios de grado superior para unir los puntos. Por ejemplo, si hay otro punto a la mitad entre $f(a)$ y $f(b)$, los tres puntos se pueden unir con una parábola. Si hay dos puntos igualmente espaciados entre $f(a)$ y $f(b)$, los cuatro puntos se pueden unir mediante un polinomio de tercer grado (figura 21.10b). Las fórmulas que resultan de tomar las integrales bajo esos polinomios se conocen como *reglas de Simpson*.



FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DE SIMPSON 1/3





FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES

REGLA DE SIMPSON 1/3

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_2(x) dx$$

$f_2(x)$ = polinomio de segundo orden.

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I \approx (b - a) \frac{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}{6}$$

$$h = \frac{b - a}{2}$$

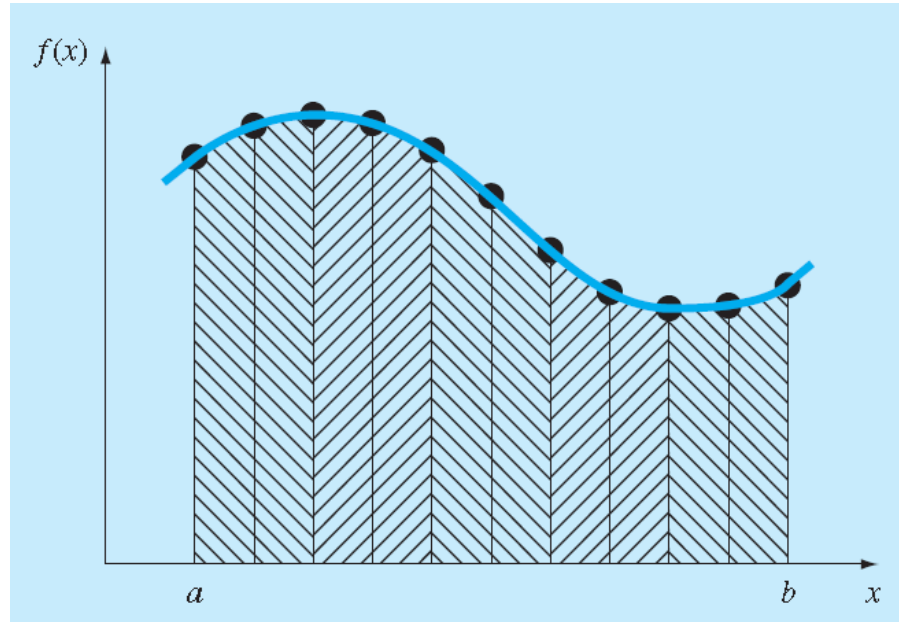
donde $a = x_0$, $b = x_2$ y x_1 = el punto a la mitad entre a y b , que está dado por $(b + a)/2$.



FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DE SIMPSON 1/3 DE APLICACIÓN MÚLTIPLE

Así como en la regla del trapecio, la regla de Simpson se mejora al dividir el intervalo de integración en varios segmentos de un mismo tamaño

$$h = \frac{b - a}{n}$$





FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DE SIMPSON 1/3 DE APLICACIÓN MÚLTIPLE

Así como en la regla del trapecio, la regla de Simpson se mejora al dividir el intervalo de integración en varios segmentos de un mismo tamaño

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$



FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES **REGLA DE SIMPSON 3/8**

Consiste en reemplazar una función complicada o un conjunto de datos tabulados por un polinomio de tercer orden:

$$I \cong \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$



FORMULA DE INTEGRACIÓN DE NEWTON – COTES REGLA DE SIMPSON 3/8 APLICACIÓN MÚLTIPLE

Consiste en reemplazar una función complicada o un conjunto de datos tabulados por un polinomio de tercer orden:

$$I \cong \frac{3(b-a)}{8n} \left(f(x_0) + 3 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 3 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right), \text{condición } n > 3$$



INTEGRACIÓN DE DATOS DESIGUALMENTE ESPACIADOS

En la práctica, existen muchos casos en donde las fórmulas de integración no se basan en puntos igualmente espaciados y se deben tratar con diferentes tamaños de segmentos. En estos casos un método es aplicar las reglas antes vistas a cada uno de los segmentos y luego sumar los resultados.

X	4	8	10	12	13	14	15	16	17	18
F(x)	6	7	8	9	10	11	13	12	10	7

Trapecio

Simp1/3

Trap segmentos múltiples



INTEGRALES MÚLTIPLES

Los métodos numéricos estudiados pueden utilizarse no solo en integrales simples sino también en integrales múltiples.

$$\int_{-1}^2 \int_0^3 \int_1^4 x^3 - 3yz \, dx \, dy \, dz$$

Usar el método de trapecio de aplicación múltiple para cada variable

$$I = \underbrace{(b - a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Altura promedio}}$$



INTEGRALES MÚLTIPLES

$$\int_{-1}^2 \int_0^3 \int_1^4 x^3 - 3yz \, dx \, dy \, dz$$

SOLUCIÓN:

Dividiendo el intervalo de z de $a=-1$ a $b=2$ en tres segmentos se tiene:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$f(x, y, z) = x^3 - 3yz$$

Reemplazar en la función el valor de z empezando en -1 incrementando el valor del paso $h=1$, hasta llegar a 2

$$f(x, y, -1) = x^3 + 3y$$

$$f(x, y, 0) = x^3$$

$$f(x, y, 1) = x^3 - 3y$$

$$f(x, y, 2) = x^3 - 6y$$

Dividiendo el intervalo de integración para y de $a=0$ hasta $b=3$ en tres segmentos se tiene

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3+0}{3} = 1$$

$$f(x, y) = 3x^3 - 4.5y$$

$$I = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$I = \frac{1}{2} [x^3 + 3y + 2(x^3 + x^3 - 3y) + x^3 - 6y]$$

$$I = 3x^3 - 4.5y$$

$$\int_{-1}^2 \int_0^3 \int_1^4 x^3 - 3yz \, dx \, dy \, dz$$

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Altura promedio}}$$



DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

Los problemas de derivadas también pueden ser resueltos mediante métodos numéricos, la alternativa más simple es el uso de las **fórmulas de diferencias finitas divididas**.

Ej. Obtener la primera y segunda derivadas de la función $f(x)$ en el punto 2,

$$f'(x) = 5x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 7x + 2$$

$$f'(2) = 273$$

Método analítico.

$$f''(x) = 60x^2 + 54x + 6$$

$$f''(2) = 354$$

DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA



$$\int_{-1}^2 \int_0^3 \int_1^4 (x^3 - 3yz) dx dy dz$$

Solución

513

Pasos de solución

$$\int_{-1}^2 \int_0^3 \int_1^4 (x^3 - 3yz) dx dy dz$$

$$\int_1^4 (x^3 - 3yz) dx = \frac{255}{4} - 9yz$$

$$= \int_{-1}^2 \int_0^3 \left(\frac{255}{4} - 9yz \right) dy dz$$

$$\int_0^3 \left(\frac{255}{4} - 9yz \right) dy = \frac{765}{4} - \frac{81z}{2}$$

$$= \int_{-1}^2 \left(\frac{765}{4} - \frac{81z}{2} \right) dz$$

$$\int_{-1}^2 \left(\frac{765}{4} - \frac{81z}{2} \right) dz = 513$$

$$= 513$$



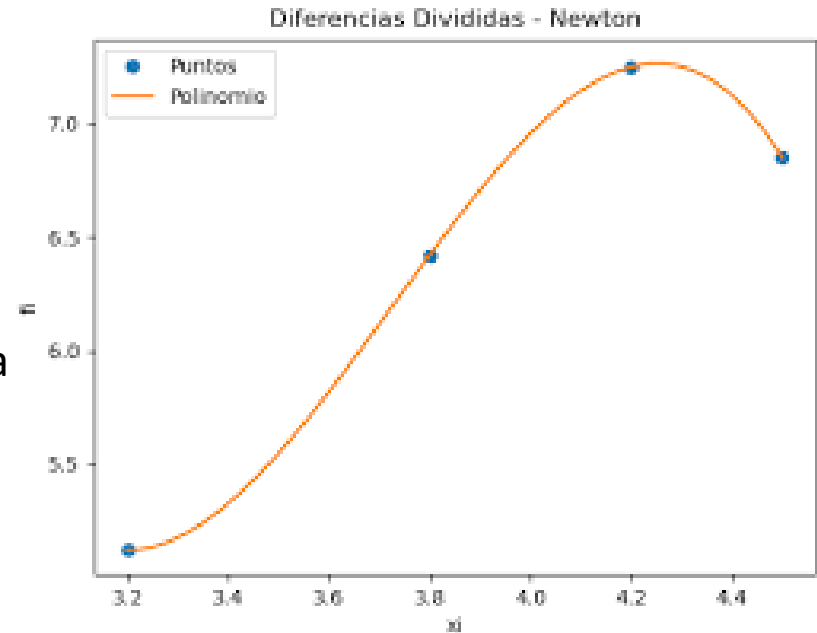
DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

Los problemas de derivadas también pueden ser resueltos mediante métodos numéricos, la alternativa más simple es el uso de las fórmulas de diferencias finitas divididas.

Obtener la primera y segunda derivada de la función $f(x)$ en el punto 2

$$f(x) = 5x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 7x + 2$$

$$f'(2) = 273$$





DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA PRIMERA DERIVADA

Diferencias finitas hacia atrás

$$f'(2) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} =$$

$$f'(2) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$$

Diferencias finitas hacia adelante

$$f'(2) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

$$f'(2) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} =$$



DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA PRIMERA DERIVADA

Diferencias finitas centrales

$$f'(2) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$f'(2) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$



DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA SEGUNDA DERIVADA

Diferencias finitas hacia atrás

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^2}$$

Diferencias finitas hacia adelante

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i))}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i))}{h^2}$$



DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA SEGUNDA DERIVADA

Diferencias finitas centrales

$$f''(2) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$f''(2) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12(h)^2}$$

GRACIAS POR SU ATENCION