UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CARRERA DE ING. AMBIENTAL

METODOS NUMÉRICOS

- Gauss Seidel
- Jacobi
- Choleski
- Raíz Cuadrada

Métodos iterativos.

Gauss-Seidel

Condición.- La matriz debe tener una diagonal dominante

Aplicación.- Problemas de armaduras y circuitos eléctricos.

Matriz diagonal dominante?

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -9$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -11$$
$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 17$$

$$|4| > |-2 + 2 + 3| = |3| \rightarrow si$$
$$|5| > |2 + 2 + 2| = |6| \rightarrow no$$
$$|4| > |3 + 2 + 1| = |6| \rightarrow no$$
$$|5| > |2 - 3 - 4| = |-5| \rightarrow no$$

NO EXISTE CONVERGENCIA

CRITERIO DE PARO

$$\in_{a,i} = \left| \frac{x_i^{j-1} - x_i^j}{x_i^j} \right| x100\% \quad < \quad \in_s$$

Para toda i en donde j y j-1 denotan la iteración actual y anterior.

EJEMPLO.

$$10x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 24.5$$
$$x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -9$$
$$-2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -50$$
$$|10| > |-3 + 6| = |3| \rightarrow si$$
$$|8| > |1 - 2| = |-1| \rightarrow si$$
$$|-9| > |-2 + 4| = |2| \rightarrow si$$

$$x_1 = \frac{24.5 + 3x_2 - 6x_3}{10}$$
$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8}$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9}$$

Primera iteración

Si x2 y x3 = 0

$$x_1 = \frac{24.5 + 3(0) - 6(0)}{10} = 2.45$$

Si x3 = 0

$$x_2 = \frac{2(0) - 2.45 - 9}{8} = -1.43125$$

Reemplazo de valores

$$x_3 = \frac{50 - 2(2.45) + 4(-1.43125)}{9} = 4.375$$

Segunda iteración

$$x_1 = \frac{24.5 + 3(-1.43) - 6(4.38)}{10} = -0.604375$$

$$x_2 = \frac{2(4.38) - (-0.61) - 9}{8} = 0.04625$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(-0.61) + 4(0.046)}{9} = 5.709549$$

Tercera iteración

$$x_1 = \frac{24.5 + 3(0.046) - 6(5.71)}{10} = -0.962440$$

$$x_2 = \frac{2(5.71) - (-0.96) - 9}{8} = 0.422692$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(-0.96) + 4(0.42)}{9} = 5.957294$$

Cuarta iteración

$$x_1 = \frac{24.5 + 3(0.42) - 6(5.95)}{10} = -0.9997569$$

$$x_2 = \frac{2(5.95) - (-0.99) - 9}{8} = 0.48902$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(-0.99) + 4(0.49)}{9} = 5.994579$$

$$\epsilon_{a,i} = \left|\frac{x_i^{j-1} - x_i^j}{x_i^j}\right| x100\% \quad < \quad \epsilon_s$$

$$\epsilon_{a,1} = \left|\frac{0.96 - 0.99}{0.99}\right| x100\% = 3.03 \quad < \quad \epsilon_s = 10$$

$$\epsilon_{a,2} = \left|\frac{0.42 - 0.49}{0.49}\right| x100\% = 14.28 \quad > \quad \epsilon_s = 10$$

$$\epsilon_{a,3} = \left|\frac{5.95 - 5.99}{5.99}\right| x100\% = 0.67 \quad < \quad \epsilon_s = 10$$

Como el error de x2 es mayor que el 10 % se debe continuar con las iteraciones

Método de Jacobi

Similar a Gauss Seidel, pero los valores obtenidos en una determinada iteración se utilizan para el cálculo de una próxima iteración.

EJEMPLO.

$$10x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 24.5$$

$$x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -9$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -50$$

$$x_1 = \frac{24.5 + 3x_2 - 6x_3}{10}$$

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8}$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9}$$

Primera iteración

Si x2 y x3 = 0, por tanto x1 es:

$$x_1 = \frac{24.5 + 3(0) - 6(0)}{10} = 2.45$$

Si x3 y x1 = 0

$$x_2 = \frac{2(0) - (0) - 9}{8} = -1.125$$

Si x2 y x1 = 0

$$x_3 = \frac{50 - 2(0) + 4(0)}{9} = 5.555556$$

En la segunda iteración se repite el mismo proceso trabajando con los valores obtenidos en la iteración anterior, es decir.

$$x_1 = \frac{24.5 + 3(-1.125) - 6(5.555556)}{10} = -1.220833$$

$$x_2 = \frac{2(5.555556) - (2.45) - 9}{8} = -0.042361$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(2.45) + 4(-1.125)}{9} = 4.511111$$

En la tercera iteración se obtiene:

$$x_1 = \frac{24.5 + 3(-0.042361) - 6(4.511111)}{10} = -0.269375$$

$$x_2 = \frac{2(4.511111) - (-1.220833) - 9}{8} = 0.155382$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(-1.220833) + 4(-0.042361)}{9} = 5.808024$$

En la cuarta iteración de igual forma:

$$x_1 = \frac{24.5 + 3(0.155382) - 6(5.808024)}{10} = -0.9882$$

$$x_2 = \frac{2(5.808024) - (-0.269375) - 9}{8} = 0.360678$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(-0.269375) + 4(0.155382)}{9} = 5.684475$$

En la iteración número 29, se tendrá que

X1=-1

X2=0.5

X3=6

Métodos de factorización de matrices

Cholesky

Se tiene un sistema de ecuaciones que tiene la forma Ax=b

Se factora la matriz A, es decir se descompone en dos matrices B y C:

A=B*C

Donde: B matriz triangular inferior

C matriz triangular superior con diagonal 1

Primera columna de la matriz B

$$b_{ij} = a_{ij}$$

i=1,2,3,……,n

Primera fila de la matriz C

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}$$

j=2,3,…….,n

Segunda columna de la matriz B:

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj}$$

Segunda fila de la matriz C:

$$c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right)$$

Y así sucesivamente:

Ejemplo:

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 7$$

$$7x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 6$$

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -5$$

Primera columna de B

$$b_{11} = a_{11} = 4$$

$$b_{21} = a_{21} = 7$$

$$b_{31} = a_{31} = 3$$

$$b_{41} = a_{41} = 2$$

Primera fila de C

$$c_{12} = \frac{a_{12}}{b_{11}} = \frac{-3}{4} = -0.75$$

$$c_{13} = \frac{a_{13}}{b_{11}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$c_{14} = \frac{a_{14}}{b_{11}} = \frac{-5}{4} = -1.25$$

Segunda columna de B

$$b_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12} = -2 - (7)(-0.75) = 3.25$$

$$b_{32} = a_{32} - b_{31}c_{12} = -2 - (3)(-0.75) = 0.25$$

$$b_{42} = a_{42} - b_{41}c_{12} = 3 - (2)(-0.75) = 4.5$$

Segunda fila de C

$$c_{23} = \frac{1}{b_{22}}(a_{23} - b_{21}c_{13}) = \frac{1}{3.25}\big(-3 - (7)(0.25)\big) = -1.461538$$

$$c_{24} = \frac{1}{b_{22}}(a_{24} - b_{21}c_{14}) = \frac{1}{3.25}\big(-2 - (7)(-1.25)\big) = 2.076923$$

Tercera columna de B

$$b_{33} = a_{33} - (b_{31}c_{13} + b_{32}c_{23}) = 5 - [(3)(0.25) + (0.25)(-1.461538)] = 4.615385$$

$$b_{43} = a_{43} - (b_{41}c_{13} + b_{42}c_{23}) = 5 - [(2)(0.25) + (4.5)(-1.461538)] = 11.076921$$

Tercera fila de C

$$\begin{aligned} c_{34} &= \frac{1}{b_{33}}\big(a_{34} - (b_{31}c_{14} + b_{32}c_{24})\big) \\ &= \frac{1}{4.615385}\big(-2 - ((3)(-1.25) + (0.25)(2.076923))\big) \\ &= 0.266667 \end{aligned}$$

Cuarta columna de B

$$\begin{aligned} b_{44} = a_{44} - (b_{41}c_{14} + b_{42}c_{24} + b_{43}c_{34}) \\ = 4 - [(2)(-1.25) + (4.5)(2.076923) + (11.076921)(0.266667)] \\ = -5.800002 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3.25 & 0 & 0 \\ 3 & 0.25 & 4.615365 & 0 \\ 2 & 4.5 & 11.076921 & -5.800002 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -0.75 & 0.25 & -1.25 \\ 0 & 1 & -1.461538 & 2.076923 \\ 0 & 0 & 1 & 0.266667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se plantea el primer sistema By=b

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3.25 & 0 & 0 \\ 3 & 0.25 & 4.615365 & 0 \\ 2 & 4.5 & 11.076921 & -5.800002 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \\ -5 \end{vmatrix}$$

Se resuelve:

$$4y_1 = 7 \rightarrow y_1 = 1.75$$

$$7y_1 + 3.25y_2 = 6 \rightarrow y_2 = -1.923077$$

$$3y_1 + 0.25y_2 + 4.615385y_3 = 0 \rightarrow y_3 = -1.033333$$

$$2y_1 + 4.5y_2 + 11.076921y_3 - 5.800002y_4 = -5 \rightarrow y_4 = -2$$

Se plantea el segundo sistema Cx=y

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.75 & 0.25 & -1.25 \\ 0 & 1 & -1.461538 & 2.076923 \\ 0 & 0 & 1 & 0.266667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.75 \\ -1.923077 \\ -1.033333 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$1x_4 = -2 \rightarrow x_4 = -2$$

$$x_3 + 0.266667x_4 = -1.033333 \rightarrow x_3 = -0.5$$

$$x_2 - 1.461538x_3 + 2.076923x_4 = -1.923077 \rightarrow x_2 = 1.5$$

$$x_1 - 0.75x_2 + 0.25x_3 - 1.25x_4 = 1.75 \rightarrow x_1 = 0.5$$

Ejercicio en clase.

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -9$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -11$$

$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 17$$

Método de la raíz cuadrada.-

Se tiene un sistema de ecuaciones que tiene la forma: Ax=c

Hay que descomponer en dos matrices L y L^T.

L matriz triangular superior

L^T es la transpuesta de L

Primer elemento de L

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

Elementos de la primera fila:

$$L_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{1i}}$$

i=1 j=2,3,……,n

Elementos diagonales:

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ki}^2}$$

Demás elementos:

$$L_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ki}\, L_{kj}}{L_{ii}}$$

Ejemplo:

$$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 29$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 12x_4 = -20$$

Primer elemento:

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$L_{11} = \sqrt{5} = 2.236068$$

Demás elementos de la primera fila

$$L_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{1i}}$$

$$L_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}} = \frac{-3}{2.236068} = -1.341641$$

$$L_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}} = \frac{2}{2.236068} = 0.894427$$

$$L_{14} = \frac{a_{14}}{L_{11}} = \frac{1}{2.236068} = 0.447214$$

Segundo elemento de la diagonal, y resto de elementos de la próxima fila

$$L_{22} = \sqrt{a_{22} - L_{12}^2} = \sqrt{4 - (-1.341641)^2} = 1.483239$$

$$L_{23} = \frac{a_{23} - L_{12}L_{13}}{L_{22}} = \frac{1 - (-1.341641)(0.894427)}{1.483239} = 1.48324$$

$$L_{24} = \frac{a_{24} - L_{12}L_{14}}{L_{22}} = \frac{2 - (-1.341641)(0.447214)}{1.483239} = 1.752920$$

Tercer elemento de la diagonal y próxima fila

$$L_{33} = \sqrt{a_{33} - (L_{13}^2 + L_{23}^2)} = \sqrt{5 - ((0.894427)^2 + (1.483240)^2} = 1.414214$$

$$L_{34} = \frac{a_{34} - (L_{13}L_{14} + L_{23}L_{24})}{L_{33}}$$
$$= \frac{-1 - ((0.894427)(0.447214) + (1.483240)(1.752920) =}{1.414214}$$
$$= -2.828427$$

Ultima diagonal

$$L_{44} = \sqrt{a_{44} - (L_{14}^2 + L_{24}^2 + L_{34}^2)}$$
$$= \sqrt{12 - ((0.447214)^2 + (1.752920)^2 + (-2.828427)^2}$$
$$= 0.852803$$

Se obtienen las matrices L y L^T

$$L = \begin{bmatrix} 2.236068 & -1.341641 & 0.894427 & 0.447214 \\ 0 & 1.483239 & 1.483240 & 1.752920 \\ 0 & 0 & 1.414214 & -2.828427 \\ 0 & 0 & 0 & 0.852803 \end{bmatrix}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 2.236068 & 0 & 0 & 0 \\ -1.341641 & 1.483239 & 0 & 0 \\ 0.894427 & 1.483240 & 1.414214 & 0 \\ 0.447214 & 1.414214 & -2.828427 & 0.852803 \end{bmatrix}$$

Se plantea el primer sistema $L^Ty=c$

$$\begin{bmatrix} 2.236068 & 0 & 0 & 0 \\ -1.341641 & 1.483239 & 0 & 0 \\ 0.894427 & 1.483240 & 1.414214 & 0 \\ 0.447214 & 1.752920 & -2.828427 & 0.852803 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ 6 \\ 29 \\ -20 \end{vmatrix}$$

Y1=3.1330495

Y2=6.876842

Y3=11.313701

Y4=-1.705643

Segundo sistema Lx=y

$$\begin{bmatrix} 2.236068 & -1.341641 & 0.894427 & 0.447214 \\ 0 & 1.483239 & 1.483240 & 1.752920 \\ 0 & 0 & 1.414214 & -2.828427 \\ 0 & 0 & 0 & 0.852803 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.130495 \\ 6.876842 \\ 11.313701 \\ -1.705643 \end{vmatrix}$$

X4=-2

X3=4

X2=3

X1=2

Ejercicio.

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 15$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = -6$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 17$$
$$x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -7$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -6$$
$$-2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 17$$
$$5x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -14$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 12$$