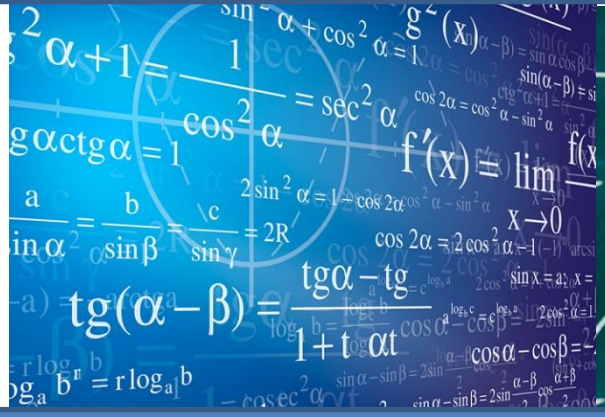
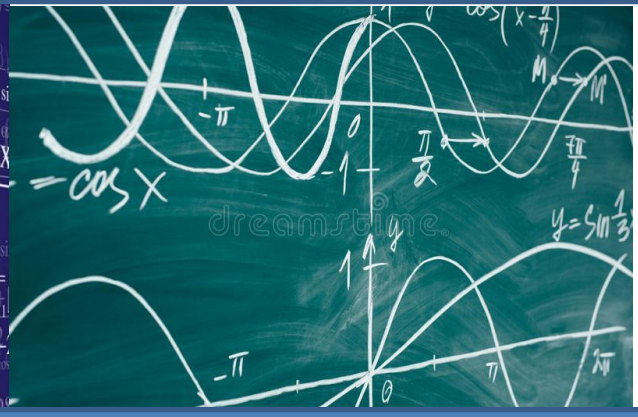




UNIDAD 3:

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Lenin Orozco

MÉTODOS NUMÉRICOS

ESCUELA DE INGENIERIA AMBIENTAL

UNACH

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

CONTENIDOS ¿Qué debe saber, hacer y ser?	TEMPORALIZACIÓN			
	HORAS			
UNIDADES TEMÁTICAS	Docencia	Aprendizaje y Experimentación	Trabajo Autónomo	SEMANA
3.1. Métodos directos	4	2	4	7
3.1. Métodos directos	4	2	4	8
3.2. Métodos iterativos	4	2	4	9

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

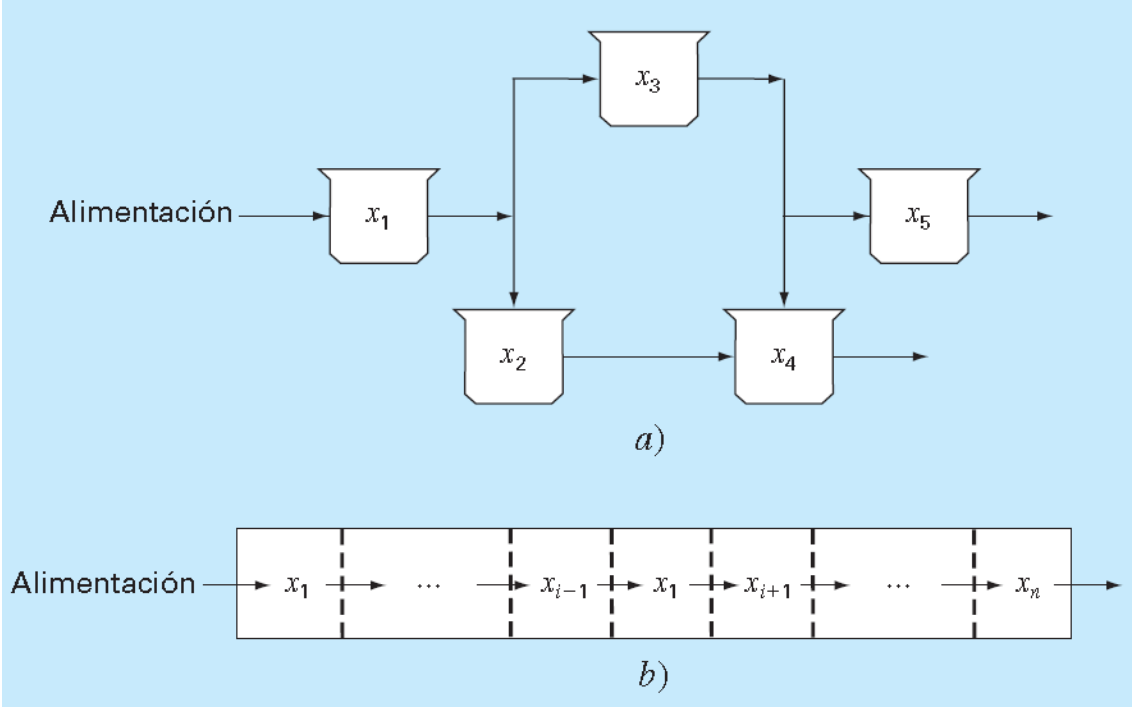
Ahora, nos ocuparemos de determinar los valores $x1, x2, \ldots, xn$ que en forma simultánea satisfacen un sistema de ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \qquad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \qquad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \qquad & &\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \qquad & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

donde las a son los coeficientes constantes, las b son los términos independientes constantes y n es el número de ecuaciones.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

Ecuaciones algebraicas lineales y la práctica en ingeniería



ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

NOTACIÓN MATRICIAL

Una *matriz* consiste en un arreglo rectangular de elementos representado por un solo símbolo, [*A*] es la notación breve para la matriz y *aij* designa un *elemento* individual de la matriz. Un conjunto horizontal de elementos se llama un *renglón* (o fila); y uno vertical, *columna.* El primer subíndice *i* siempre designa el número del renglón en el cual está el elemento. El segundo subíndice *j* designa la columna. Por ejemplo, el elemento *a*23 está
en el renglón 2 y la columna 3.

Columna 3

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ a_{n} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Renglón 2

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

NOTACIÓN MATRICIAL

columnas $\overset{1}{\downarrow}$ $\overset{2}{\downarrow}$ $\overset{3}{\downarrow}$ $\overset{n}{\downarrow}$

Filas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \\ \leftarrow m \end{matrix}$$

dimensión m×n

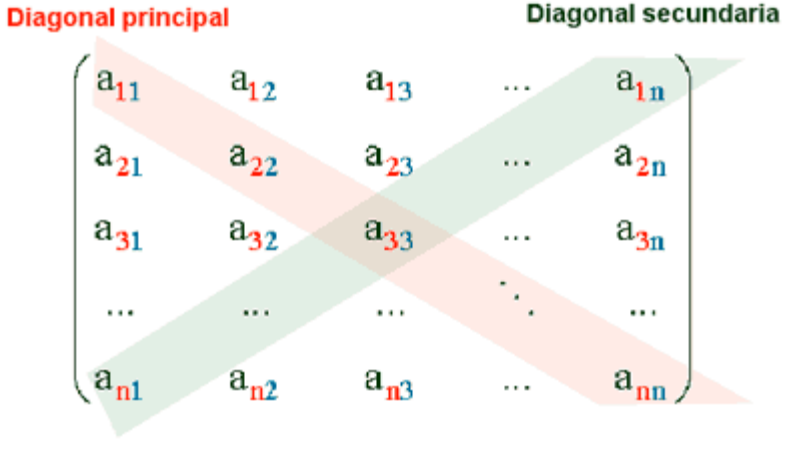
Un elemento de una matriz se expresa de forma general:

a_{ij} i indica la fila, j indica la columna

www.ZONADEMATRONES.com

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

NOTACIÓN MATRICIAL



ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

Hay diferentes formas especiales de matrices cuadradas que son importantes y que deben mencionarse:

Una ***matriz simétrica*** es aquella donde $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i y j. Por ejemplo,

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

es una matriz simétrica de 3 por 3.

Una *matriz diagonal* es una matriz cuadrada donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & a_{44} \end{bmatrix}$$

Observe que donde hay grandes bloques de elementos que son cero, se dejan en blanco.

Una *matriz identidad* es una matriz diagonal donde todos los elementos sobre la diagonal principal son iguales a 1,

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

El símbolo $[I]$ se utiliza para denotar la matriz identidad. La matriz identidad tiene propiedades similares a la unidad.

Una *matriz triangular superior* es aquella donde todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix}$$

Una *matriz triangular inferior* es aquella donde todos los elementos por arriba de la diagonal principal son cero,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Una *matriz bandeada* tiene todos los elementos iguales a cero, con la excepción de una banda centrada sobre la diagonal principal:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

La matriz anterior tiene un ancho de banda de 3 y se le da un nombre especial: *matriz tridiagonal.*

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

REGLAS DE OPERACIONES CON MATRICES

La *suma* de dos matrices, por ejemplo, $[A]$ y $[B]$, se obtiene al sumar los términos correspondientes de cada matriz. Los elementos de la matriz resultante $[C]$ son:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La suma y la resta sólo pueden realizarse entre matrices que tengan las mismas dimensiones.

La *multiplicación* de una matriz $[A]$ por un escalar g se obtiene al multiplicar cada elemento de $[A]$ por g,

$$[D] = g[A] = \begin{bmatrix} ga_{11} & ga_{12} & \cdots & ga_{1m} \\ ga_{21} & ga_{22} & \cdots & ga_{2m} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ ga_{n1} & ga_{n2} & \cdots & ga_{nm} \end{bmatrix}$$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

REGLAS DE OPERACIONES CON MATRICES

***El producto* de dos matrices** se representa como $[Z] = [X][Y]$, donde los elementos de $[Z]$ están definidos como

Suponga que queremos multiplicar $[X]$ por $[Y]$ para obtener $[Z]$, donde

$$[Z] = [X][Y] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & 9 \\ \mathbf{7} & 2 \end{bmatrix} \downarrow$$

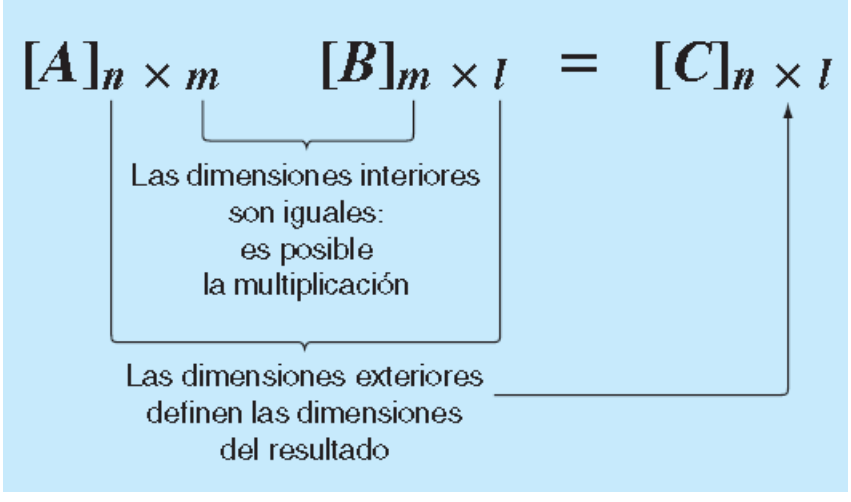
$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ 8 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{3 \times 5 + 1 \times 7 = 22} & \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} 22 & 29 \\ 82 & 84 \\ 28 & 8 \end{bmatrix}$$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

REGLAS DE OPERACIONES CON MATRICES

***El producto* de dos matrices**



ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

REGLAS DE OPERACIONES CON MATRICES

Aunque la multiplicación es posible, la división de matrices no está definida. No obstante, si una matriz [*A*] es cuadrada y no singular, existe otra matriz [*A*]–1, llamada la *inversa* de [*A*], para la cual:

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \Big(\mathrm{Adj}(A)\Big)^{t}$$

Donde:

- $|A|$ es el determinante de la matriz A
- $\mathrm{Adj}(A)$ es la matriz adjunta de A
- El exponente t indica la transposición de la matriz, es decir, se tiene que transponer la matriz adjunta.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

REGLAS DE OPERACIONES CON MATRICES

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj (A)} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj (A)} = \begin{pmatrix} |4| & -|3| \\ -|2| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

REGLAS DE OPERACIONES CON MATRICES

$$Z_{3X3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow Trasposición \rightarrow Z^{T}{}_{3X3} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

NOTACIÓN MATRICIAL

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_n \end{bmatrix}
$$

Matriz de coeficientes vector incógnitas Vector términos independientes

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

$$\{X\} = [A]^{-1}\{B\}$$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

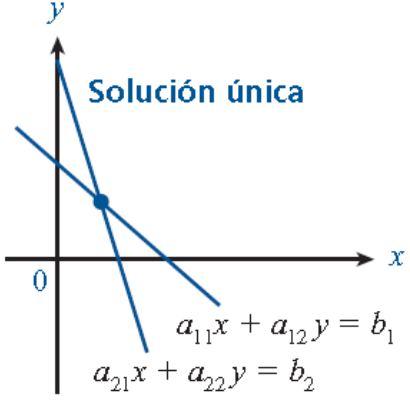
$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

$$x - y = 7$$
$$x + y = 5$$

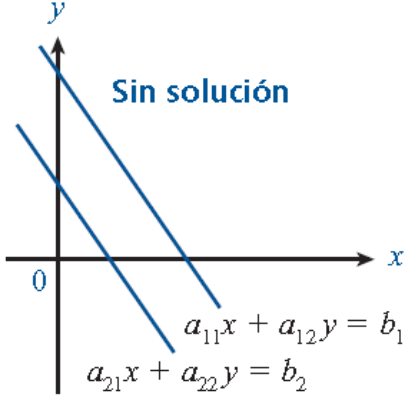
$$x - y = 7$$
$$2x - 2y = 13$$

$$x - y = 7$$
$$2x - 2y = 14$$

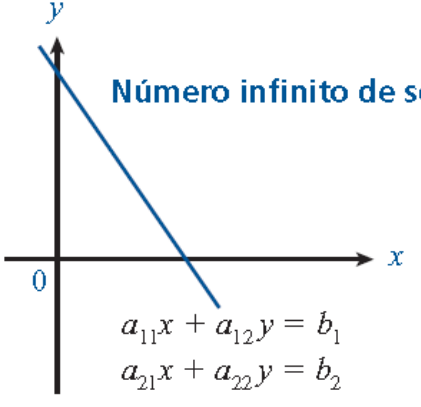
Si se considera las ecuaciones como si fueran rectas en el plano, se puede tener tres casos, geométricamente y analizando también los coeficientes numéricos:



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección



b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección



c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Teorema de resumen. Punto de vista 1

El sistema

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. Esto es:

i. Tiene una solución única si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

ii. No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si y sólo si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

EJEMPLO:

De las siguientes ecuaciones que se presentan, ¿cuál de ellas es una segunda ecuación para el sistema cuya primera ecuación es $x - 2y = -5$ si debe tener un número infinito de soluciones?

a) $6y = 3x + 15$

b) $6x - 3y = -15$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

d) $\frac{3}{2}x = 3y + \frac{15}{2}$

En los problemas 22 al 29 encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas.

22. $x - y = 7; \quad 2x + 3y = 1$

23. $2x - 2y = 3; \quad 3x + 7y = -1$

24. $y - 2x = 4; \quad 4x - 2y = 6$

25. $4x - 6y = 7; \quad 6x - 9y = 12$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

UNICA SOLUCIÓN

ELIMINACIÓN DE GAUSS JORDAN

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

Matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Operaciones elementales con renglones

i. Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.
ii. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
iii. Intercambiar dos renglones.

OBJETIVO:
Llegar a tener en el lado izquierdo de la matriz aumentada, la matriz identidad

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

INFINITAS SOLUCIONES

ELIMINACIÓN DE GAUSS JORDAN

Resuelva el sistema

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$
$$2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 30$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$x_1 - x_3 = 1$$
$$x_2 + 2x_3 = 4$$

$x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = 1 + x_3$. Ésta será una solución para cualquier número x_3. Se escribe esta solución en la forma $(1 + x_3, 4 - 2x_3, x_3)$. Por ejemplo, si $x_3 = 0$, se obtiene la solución (1, 4, 0). Para $x_3 = 10$ se obtiene la solución $(11, -16, 10)$, y por ello para cada valor de x_3 habrá una solución distinta.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

SISTEMA INCONSISTENTE

ELIMINACIÓN DE GAUSS JORDAN

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ahora la última ecuación es $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, lo cual también es imposible ya que $0 \neq -1$. Así, el sistema (6) no tiene solución. En este caso se dice que el sistema es **inconsistente**.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

ELIMINACIÓN DE GAUSS JORDAN

Resuelva el sistema

$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4$$
$$2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz de coeficiente se encuentra en forma escalonada y reducida por renglones. Es evidente que existe un número infinito de soluciones. Los valores de las variables x_3 y x_4 se pueden escoger de manera arbitraria. Entonces $x_2 = 2 + 8x_3 + 2x_4$ y $x_1 = -2 - 19x_3 - 7x_4$. Por lo tanto, todas las soluciones se representan por $(-2 - 19x_3 - 7x_4, 2 + 8x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$. Por ejemplo, si $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$ se obtiene la solución $(-35, 14, 1, 2)$.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

ELIMINACIÓN DE GAUSS JORDAN

EJEMPLO:

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del 3. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento 1, 20 000 unidades del alimento 2 y 55 000 del 3. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento ¿cuantos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA SISTEMA DE TRES ECUACIONES

$$ax - by - cz = d$$
$$ex - fy - gz = h$$
$$jx - ky - lz = m$$

1. Los tres planos se intersecan en un solo punto. Por lo que existe una solución única para el sistema (vea la figura 1.2).
2. Los tres planos se intersecan en la misma recta, por lo que cada punto sobre la recta es una solución y el sistema tiene un número infinito de soluciones (vea la figura 1.3).
3. Los tres planos coinciden. Entonces cada punto sobre el plano es una solución y se tiene un número infinito de soluciones.
4. Dos de los planos coinciden e intersecan a un tercer plano en la recta. Entonces cada punto sobre la recta es una solución y existe un número infinito de soluciones (vea la figura 1.4).
5. Al menos dos de los planos son paralelos y distintos. Por lo que ningún punto puede estar en ambos y no hay solución. El sistema es inconsistente (vea la figura 1.5).

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA SISTEMA DE TRES ECUACIONES

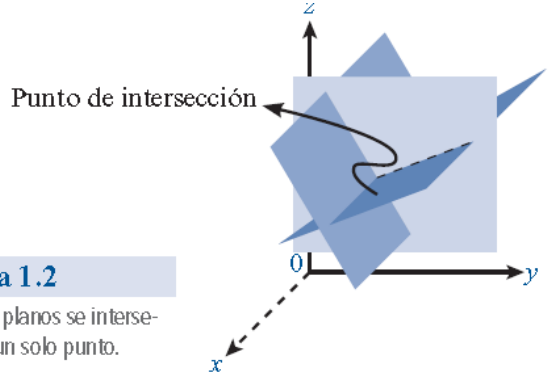


Figura 1.2
Los tres planos se intersecan en un solo punto.

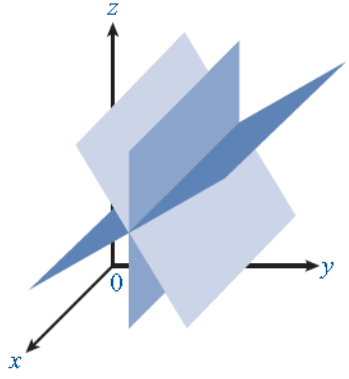


Figura 1.3
Los tres planos se intersecan en la misma recta.

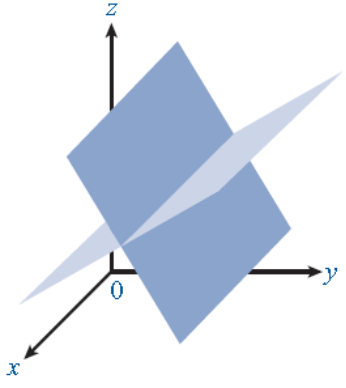


Figura 1.4
Dos planos se intersecan en una recta.

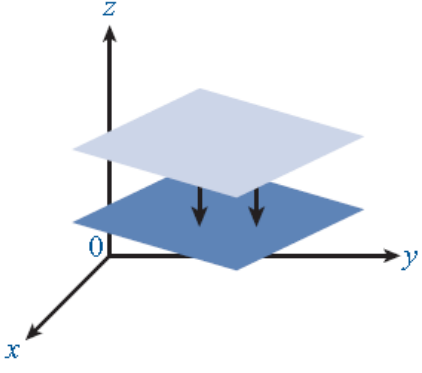


Figura 1.5
Los planos paralelos no tienen puntos en común.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

ELIMINACIÓN DE GAUSS JORDAN

EJEMPLO:

Un programa de computadora para resolver ecuaciones algebraicas lineales, sirve para resolver un problema relacionado con el ejemplo de la caída del paracaidista. Suponga que un equipo de tres paracaidistas está unido por una cuerda ligera mientras va en caída libre a una velocidad de 5 m/s. Calcule la tensión en cada sección de la cuerda y la aceleración del equipo, dados los siguientes datos:

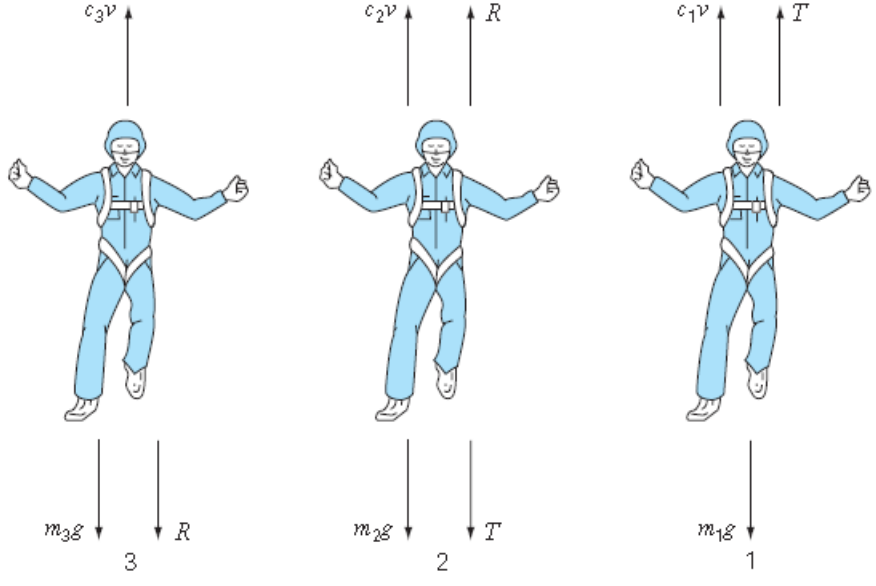
Paracaidista	Masa, kg	Coeficiente de arrastre, kg/s
1	70	10
2	60	14
3	40	17

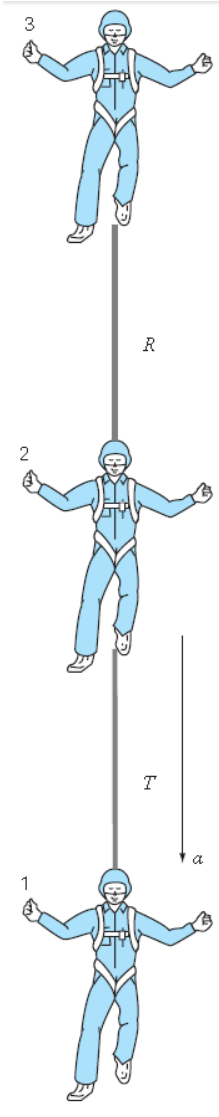
$$
\begin{aligned}
m_1 g - T - c_1 v &= m_1 a \\
m_2 g + T - c_2 v - R &= m_2 a \\
m_3 g - c_3 v + R &= m_3 a
\end{aligned}
$$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

ELIMINACIÓN DE GAUSS JORDAN

EJEMPLO:





ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

REGLA DE CRAMER

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Si $\det A \neq 0$, el sistema (2) tiene una solución única dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Se definen *n* nuevas matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

REGLA DE CRAMER

Regla de Cramer

Sea A una matriz de $n \times n$ y suponga que $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_i = \frac{D_i}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D} \qquad (3)$$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

REGLA DE CRAMER

Resolver los siguientes sistemas por el método de Cramer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -1 \end{aligned}$$

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

EJEMPLO:

Con la técnica de Gauss-Jordan resuelva el sistema del ejemplo:

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

Los métodos iterativos constituyen una alternativa a los métodos de eliminación descritos hasta ahora, para aproximar la solución. Tales métodos son similares a las técnicas que se desarrollaron en el capítulo 2 para obtener las raíces de una sola ecuación. Aquellos métodos consistían en suponer un valor y luego usar un método sistemático para obtener una aproximación mejorada de la raíz.

MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

El *método de Gauss-Seidel* es el método iterativo más comúnmente usado. Suponga que se da un sistema de *n* ecuaciones:

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdot \qquad\qquad \cdot & \\ \cdot \qquad\qquad \cdot & \\ \cdot \qquad\qquad \cdot & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Suponga que se limita a un conjunto de ecuaciones de 3 x 3. Si los elementos de la diagonal no son todos cero, nos queda:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \quad \text{a)}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \quad \text{b)}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \quad \text{c)}$$

MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

Ahora, se puede empezar el proceso de solución al escoger valores iniciales para las x. Una forma simple para obtener los valores iniciales es suponer que todos son cero.

Estos ceros se sustituyen en la ecuación *a*), la cual se utiliza para calcular un nuevo valor $x1 = b1/a11$. Después, se sustituye este nuevo valor de $x1$ junto con el valor previo cero de $x3$ en la ecuación *b*) y se calcula el nuevo valor de $x2$. Este proceso se repite con la ecuación *c*) para calcular un nuevo valor de $x3$.

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \qquad a)$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \qquad b)$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \qquad c)$$

MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

Después se regresa a la primera ecuación y se repite todo el procedimiento hasta que la solución converja suficientemente cerca a los valores verdaderos. La convergencia se verifica usando el criterio:

$$\left|\varepsilon_{a,i}\right| = \left|\frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j}\right| 100\% < \varepsilon_s$$

Para todas las i, donde j y $j - 1$ son las iteraciones actuales y previas, respectivamente.

MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

Use el método de Gauss-Seidel para obtener la solución del sistema usado en el ejemplo:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\
0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\
0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4
\end{aligned}
$$

MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

Use el método de Gauss-Seidel para obtener la solución del sistema usado en el ejemplo:

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

Primero, despeje la incógnita sobre la diagonal para cada una de las ecuaciones.

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$

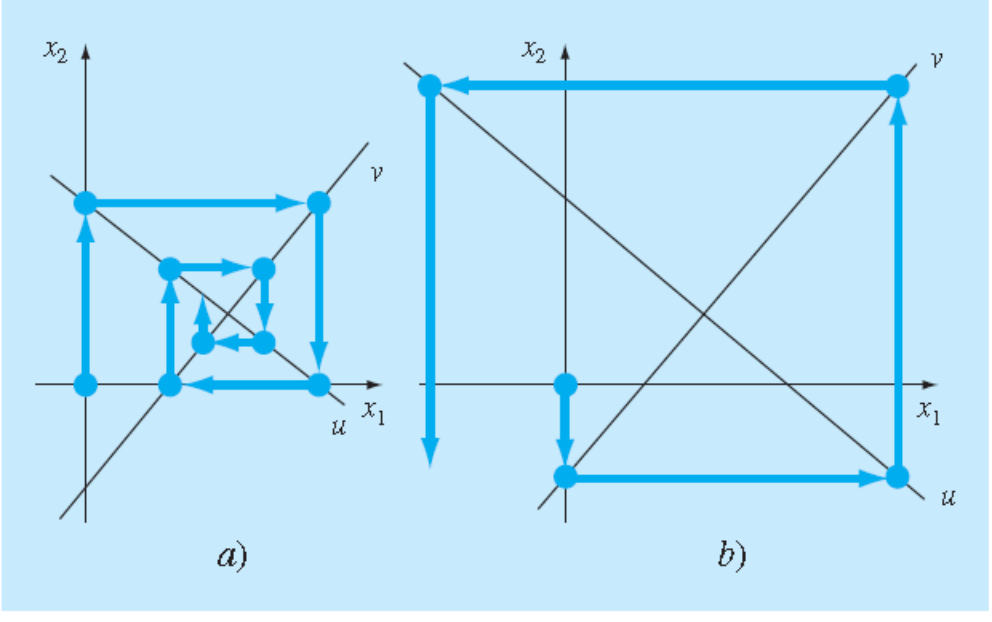
$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

Observe que el método de Gauss-Seidel es similar en esencia a la técnica de iteración de punto fijo. Recuerde que la iteración de punto fijo presenta dos problemas fundamentales:

1. en algunas ocasiones no es convergente
2. cuando converge, con frecuencia lo hace en forma muy lenta.



MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

CRITERIO DE CONVERGENCIA:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Ejemplo:

$$|4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -9$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -11$$
$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 17$$

$$|4| > |-2 + 2 + 3| = |3| \rightarrow si$$
$$|5| > |2 + 2 + 2| = |6| \rightarrow no$$
$$|4| > |3 + 2 + 1| = |6| \rightarrow no$$
$$|5| > |2 - 3 - 4| = |-5| \rightarrow no$$

MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

CRITERIO DE CONVERGENCIA:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Ejemplo:

$$10x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 24.5$$
$$x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -9$$
$$-2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -50$$

$$|10| > |-3 + 6| = |3| \rightarrow si$$
$$|8| > |1 - 2| = |-1| \rightarrow si$$
$$|-9| > |-2 + 4| = |2| \rightarrow si$$

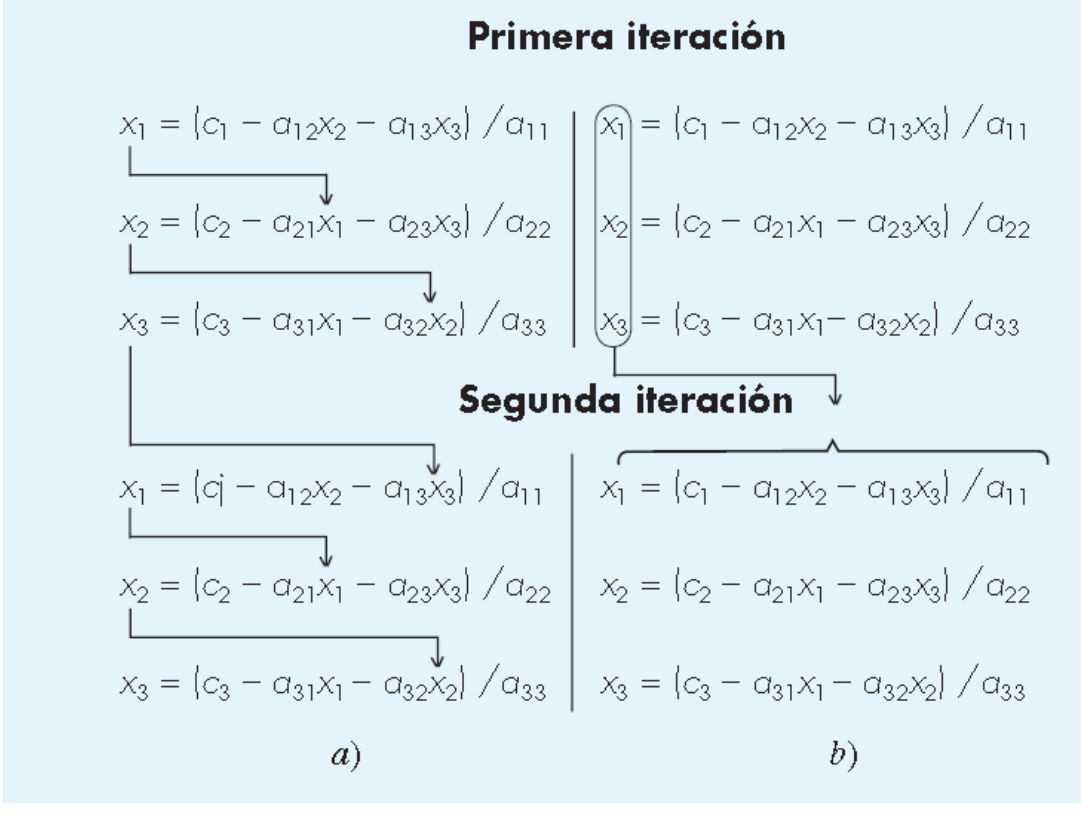
MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO DE JACOBI

Ilustración gráfica de la diferencia entre los métodos de:

a) Gauss-Seidel
b) iterativo de Jacobi

Para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.



GRACIAS POR SU ATENCION