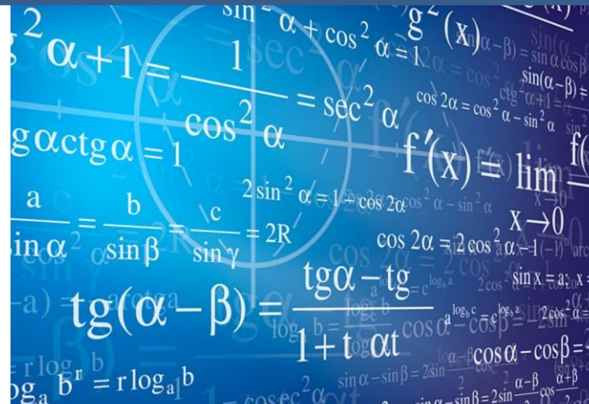


UNIDAD 2:

SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

Lenin Orozco

MÉTODOS NUMÉRICOS

ESCUELA DE INGENIERIA AMBIENTAL

UNACH

ERRORES Y SOFTWARE CÁLCULO

UNIDADES TEMÁTICAS	HORAS			SEMANA
	Docencia	Aprendizaje y Experimentación	Trabajo Autónomo	
2.1. Antecedentes Matemáticos	2	0	2	4
2.2. Método de bisección	2	2	2	4
2.3. Método de la posición falsa	2	1	2	5
2.4. Método del punto fijo	2	1	2	5
2.5. Método de Newton-Raphson	2	1	2	6
2.6. Método de la secante	2	1	2	6

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

Usar la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

para resolver

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

A los valores calculados con la ecuación (1) se les llama las “raíces” de la ecuación, que representan los valores de x que hacen a la ecuación (2) igual a cero.
Por lo tanto, se define la raíz de una ecuación como el valor de x que hace $f(x) = 0$. Debido a esto, algunas veces a las raíces se les conoce como *ceros* de la ecuación.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

Aparecen muchas más en las que no es posible encontrar su solución de forma sencilla. Por ejemplo $f(x) = e^{-x} - x$ no se puede resolver en forma analítica. En tales casos, la única alternativa es una técnica con solución aproximada.

Un método para obtener una solución aproximada consiste en **graficar la función** y determinar dónde cruza el eje de las x. Este punto, que representa el valor de x para el cual $f(x) = 0$, es la raíz. Aunque los métodos gráficos son útiles en la obtención de estimaciones de las raíces, tienen el inconveniente de que son poco precisos.

Un método alternativo es el de **prueba y error,** que consiste en elegir un valor de x y evaluar si $f(x)$ es cero. Si no es así se hace otra elección y se evalúa nuevamente $f(x)$. El proceso se repite hasta que se obtenga un valor que proporcione una $f(x)$ cercana a cero. Estos métodos fortuitos, evidentemente, son ineficientes e inadecuados para las exigencias de la ingeniería.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

Un modelo de un diseño de ingeniería es la ecuación obtenida a partir de la segunda ley de Newton, para la velocidad del paracaidista:

$$v = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right)$$

Donde:
la velocidad v = la variable dependiente
el tiempo t = la variable independiente
la constante de gravitación g = una función de fuerza
el coeficiente de arrastre c y la masa m son los parámetros.

Estos cálculos se pueden llevar a cabo de manera directa, ya que v se expresa *explícitamente*

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

$$v = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right)$$

Ahora suponga que se tiene que determinar el coeficiente de arrastre de un paracaidista con una masa dada, para alcanzar una velocidad determinada en un periodo preestablecido.

No hay forma de reordenar la ecuación para despejar el parámetro *c*. En tales casos, se dice que *c* está en forma *implícita.*

Para resolver el problema con métodos numéricos es conveniente reexpresar la ecuación:

$$f(c) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right) - v$$

MÉTODOS CERRADOS

Se ocupa de métodos que aprovechan el hecho de que una función cambia de signo en la vecindad de una raíz, se necesita de dos valores iniciales para la raíz. Como su nombre lo indica, dichos valores iniciales deben "encerrar", o estar a ambos lados de la raíz.

MÉTODO GRAFICO

Un método simple para obtener una aproximación a la raíz de la ecuación

$$f(x) = 0$$

consiste en graficar la función y observar dónde cruza el eje x. Este punto, que representa el valor de x para el cual $f(x) = 0$, ofrece una aproximación inicial de la raíz.

MÉTODOS CERRADOS

EJEMPLO:

Utilice el método gráfico para determinar el coeficiente de arrastre c necesario para que un paracaidista de masa m = 68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t = 10 s.
Nota: La aceleración de la gravedad es 9.8 m/s²

$$f(c) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right) - v$$

$$f(c) = \frac{9.8(68.1)}{c}\left(1 - e^{-(c/68.1)10}\right) - 40$$

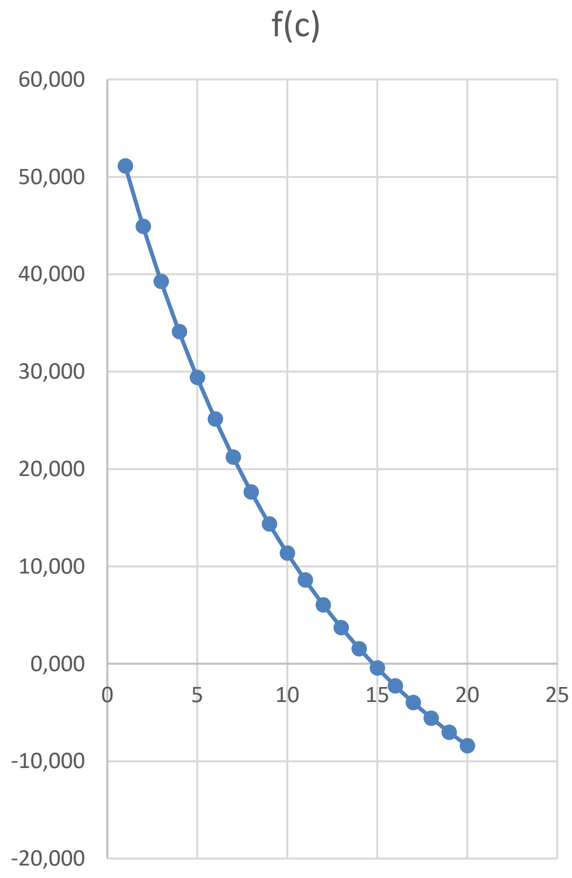
$$f(c) = \frac{667.38}{c}\left(1 - e^{-0.146843c}\right) - 40$$

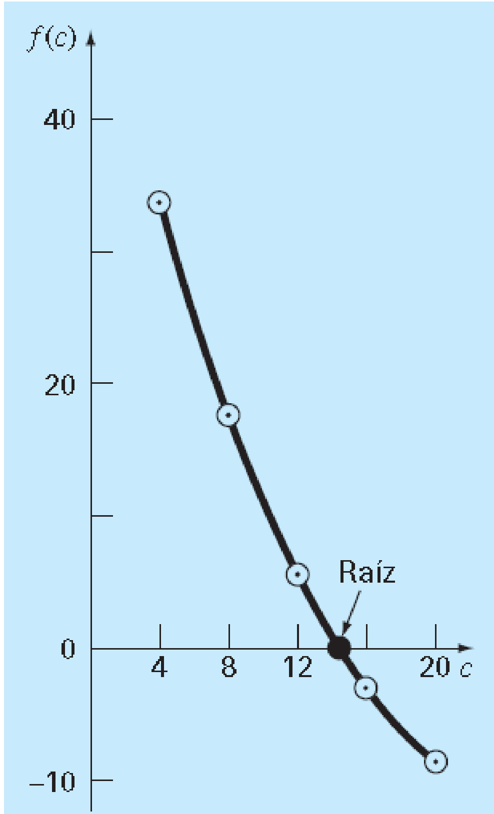
SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

MÉTODOS CERRADOS

$$f(c) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right) - v$$

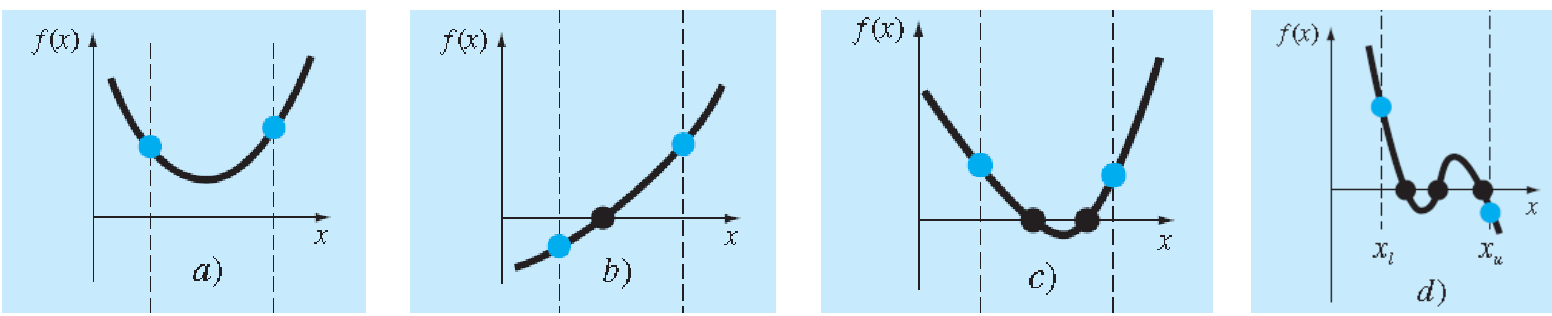
$$f(c) = \frac{667.38}{c}\left(1 - e^{-0.146843c}\right) - 40$$





MÉTODOS CERRADOS

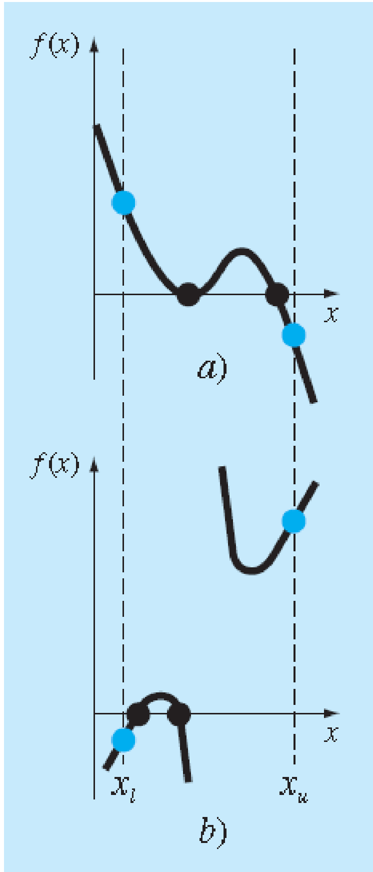
Las técnicas gráficas tienen un valor práctico limitado, ya que no son precisas. Sin embargo, los métodos gráficos se utilizan para obtener aproximaciones de la raíz. Dichas aproximaciones se pueden usar como valores iniciales en los métodos numéricos.



No hay raíces | # impar | # par | # impar

MÉTODOS CERRADOS

Excepciones



impar

MÉTODOS CERRADOS

EJEMPLO:

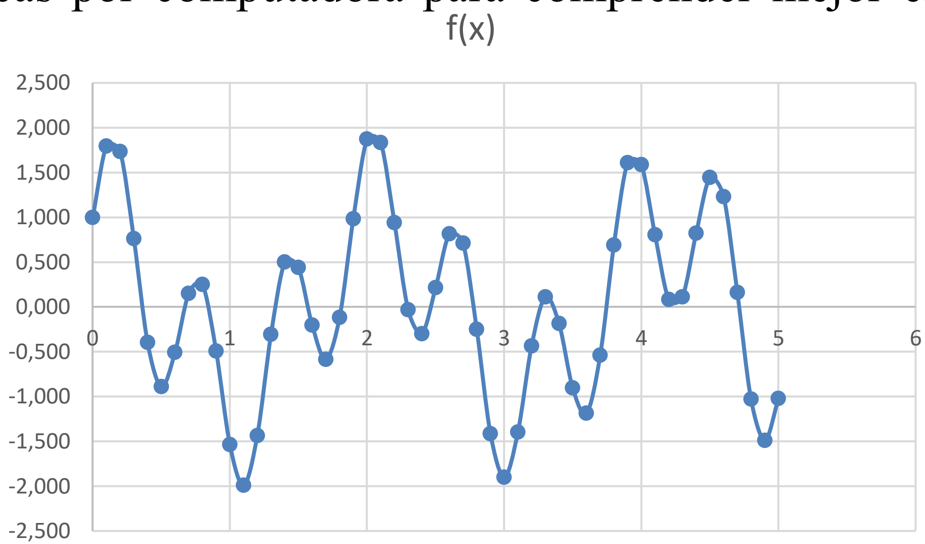
Las gráficas por computadora facilitan y mejoran la localización de las raíces de una ecuación. La función que se muestra, tiene varias raíces en el rango que va de $x = 0$ a $x = 5$. Utilice gráficas por computadora para comprender mejor el comportamiento de esta función.

$$f(x) = \text{sen } 10x + \cos 3x$$

MÉTODOS CERRADOS

EJEMPLO:

Las gráficas por computadora facilitan y mejoran la localización de las raíces de una ecuación. La función que se muestra, tiene varias raíces en el rango que va de $x = 0$ a $x = 5$. Utilice gráficas por computadora para comprender mejor el comportamiento de esta función.



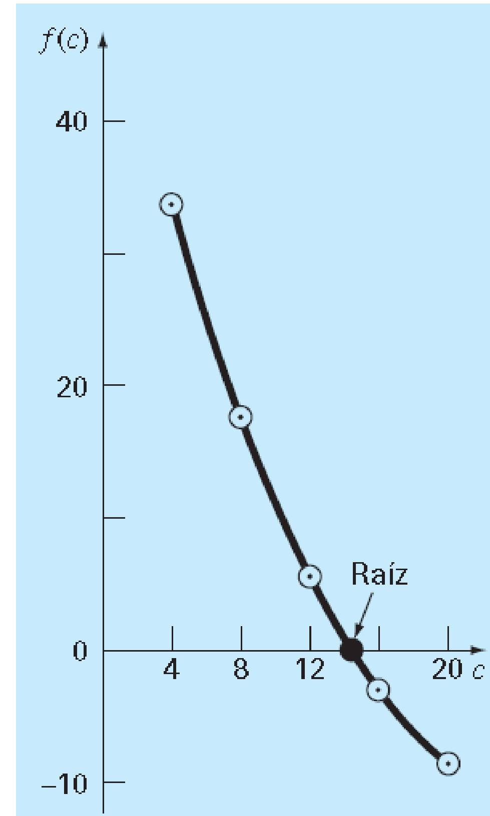
MÉTODOS CERRADOS

EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN

Cuando se aplicaron las técnicas gráficas en el ejemplo del coeficiente de arrastre, se observó que $f(x)$ cambió de signo a ambos lados de la raíz. En general, si $f(x)$ es real y continúa en el intervalo que va desde xl hasta xu y $f(xl)$ y $f(xu)$ tienen signos opuestos, es decir:

$$f(x_l)\,f(x_u) < 0$$

La localización del cambio de signo (y, en consecuencia, de la raíz) se logra con más exactitud al dividir el intervalo en varios subintervalos. Se investiga cada uno de estos subintervalos para encontrar el cambio de signo. El proceso se repite y la aproximación a la raíz mejora cada vez más en la medida que los subintervalos se dividen en intervalos cada vez más pequeños.



MÉTODOS CERRADOS

EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN

Paso 1: Elija valores iniciales inferior, x_l, y superior, x_u, que encierren la raíz, de forma tal que la función cambie de signo en el intervalo. Esto se verifica comprobando que $f(x_l)\ f(x_u) < 0$.

Paso 2: Una aproximación de la raíz x_r se determina mediante:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Paso 3: Realice las siguientes evaluaciones para determinar en qué subintervalo está la raíz:

a) Si $f(x_l)f(x_r) < 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo inferior o izquierdo. Por lo tanto, haga $x_u = x_r$ y vuelva al paso 2.

b) Si $f(x_l)f(x_r) > 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo superior o derecho. Por lo tanto, haga $x_l = x_r$ y vuelva al paso 2.

c) Si $f(x_l)f(x_r) = 0$, la raíz es igual a x_r; termina el cálculo.

MÉTODOS CERRADOS

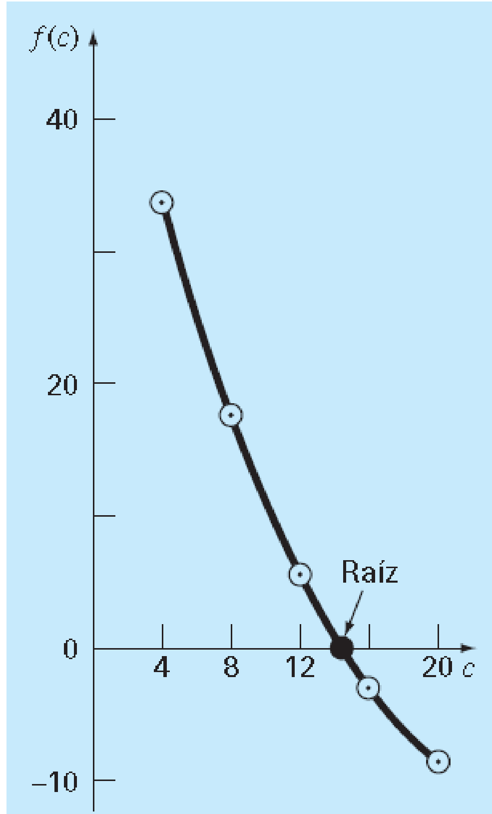
EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN

EJEMPLO:

Emplee el método de bisección para resolver el ejercicio de coeficiente de arrastre. Y encuentre los errores relativos.

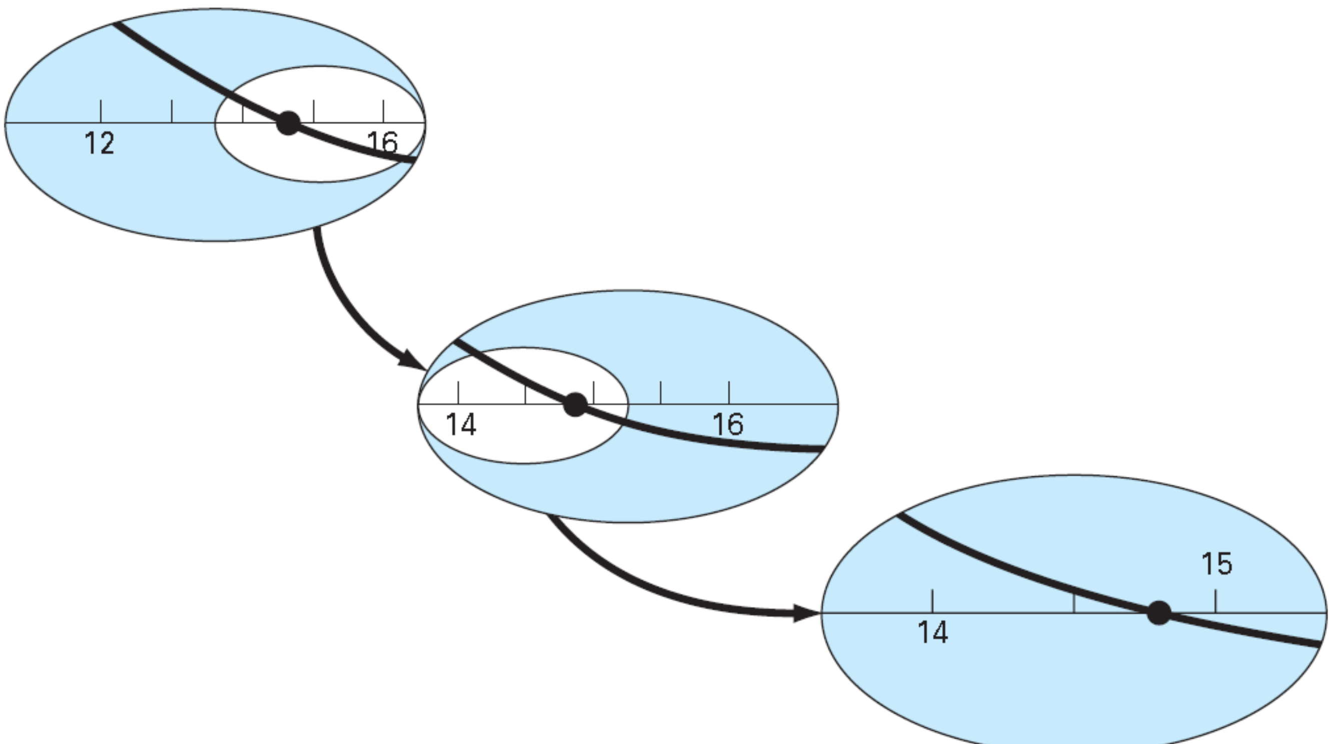
El primer paso del método de bisección consiste en asignar dos valores iniciales a la incógnita (en este problema, c) que den valores de $f(c)$ con diferentes signos.

En la figura se observa que la función cambia de signo entre los valores 12 y 16.



MÉTODOS CERRADOS

EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN



MÉTODOS CERRADOS

EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN
CRITERIOS DE PARO Y ESTIMACIONES DE ERRORES

El método de la bisección se repite para obtener una aproximación más exacta de la raíz. Ahora se debe desarrollar un criterio objetivo para decidir cuándo debe terminar el método.

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{\text{nuevo}} - x_r^{\text{anterior}}}{x_r^{\text{nuevo}}} \right| 100\%$$

Cuando εa es menor que un valor previamente fijado εs, termina el cálculo.

MÉTODOS CERRADOS

EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN
CRITERIOS DE PARO Y ESTIMACIONES DE ERRORES

El método de la bisección se repite para obtener una aproximación más exacta de la raíz. Ahora se debe desarrollar un criterio objetivo para decidir cuándo debe terminar el método.

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{\text{nuevo}} - x_r^{\text{anterior}}}{x_r^{\text{nuevo}}} \right| 100\%$$

Cuando εa es menor que un valor previamente fijado εs, termina el cálculo.

MÉTODOS CERRADOS

EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN
CRITERIOS DE PARO Y ESTIMACIONES DE ERRORES

EJEMPLO

Continúe con el ejemplo del coeficiente de arrastre hasta que el error aproximado sea menor que el criterio de terminación de $\varepsilon s = 0.5\%$. Use la ecuación de εa para calcular los errores.
Grafique el valor de εs y εa respecto del numero de iteraciones.
Construya una tabla que muestre los siguientes datos:

Iteración	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)

MÉTODOS CERRADOS

EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN
CRITERIOS DE PARO Y ESTIMACIONES DE ERRORES

EJEMPLO

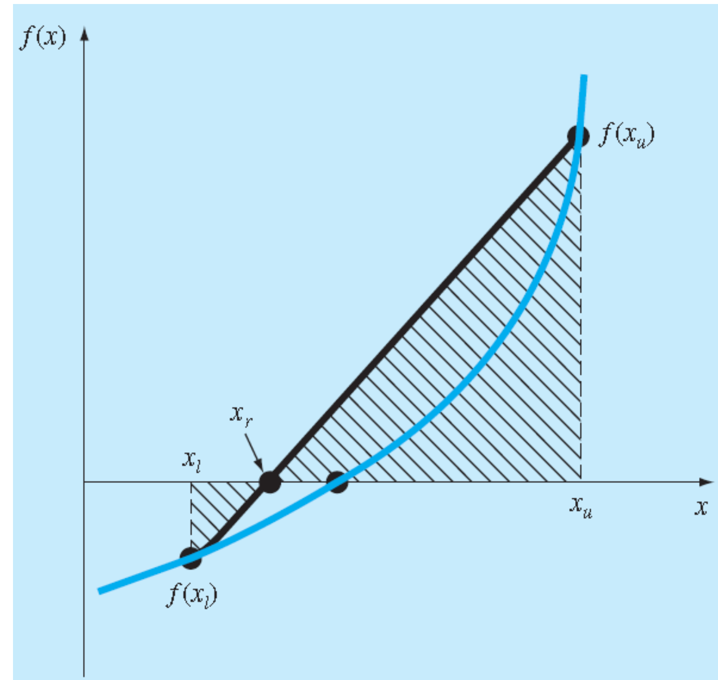
$$f(X) = X^4 - 2X^3 - 4X^2 + 4X + 4 \qquad \varepsilon = 0.00001$$

MÉTODOS CERRADOS

EL MÉTODO DE LA POSICIÓN FALSA

La falsa posición es una alternativa basada en una visualización gráfica.

Si $f(xl)$ está mucho más cercana a cero que $f(xu)$, es lógico que la raíz se encuentre más cerca de xl que de xu. *La posición falsa* consiste en unir $f(xl)$ y $f(xu)$ con una línea recta, La intersección de esta línea con el eje de las x representa una mejor aproximación de la raíz. El hecho de que se reemplace la curva por una línea recta da una "falsa posición" de la raíz

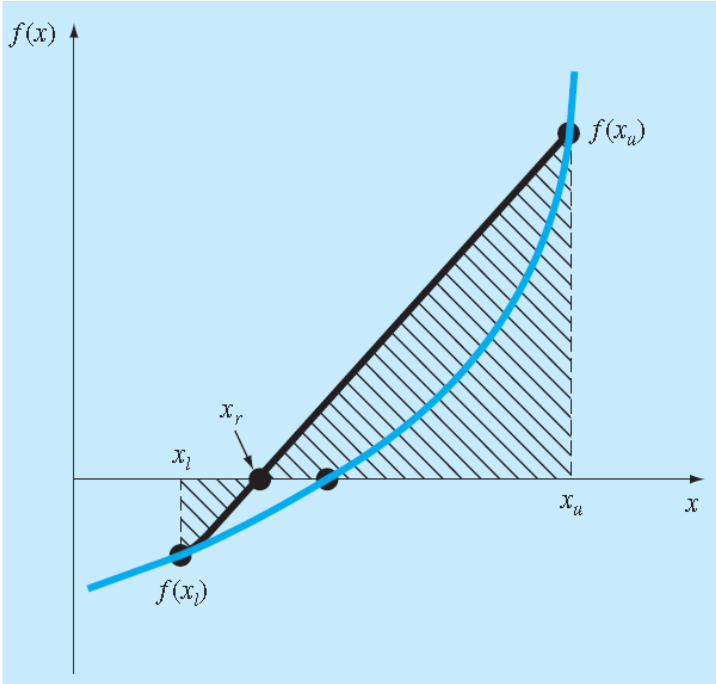


MÉTODOS CERRADOS

EL MÉTODO DE LA POSICIÓN FALSA

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$



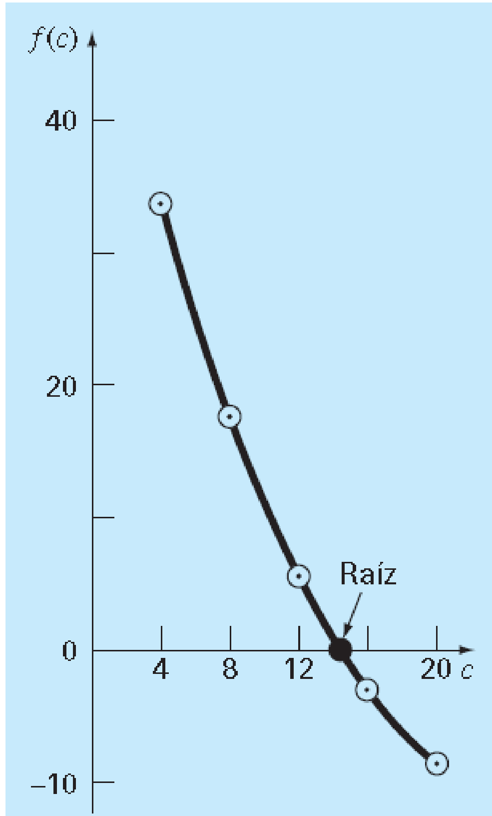
MÉTODOS CERRADOS

EL MÉTODO DE LA POSICIÓN FALSA

EJEMPLO:

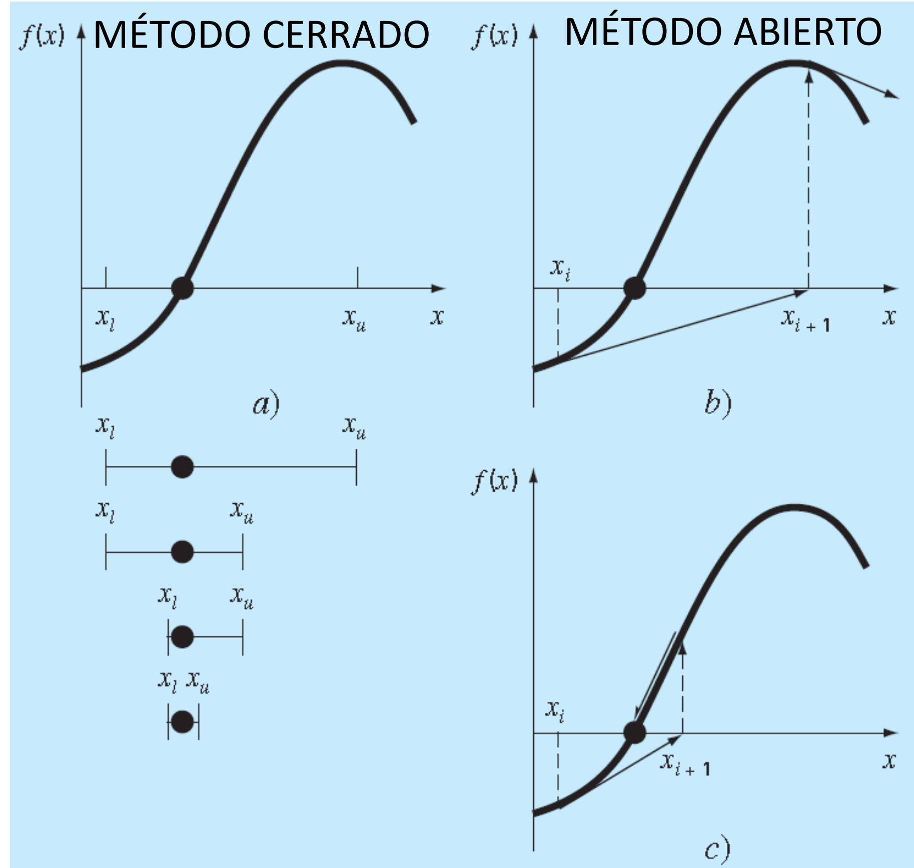
Con el método de la falsa posición determine la raíz de la misma ecuación analizada en el ejemplo del coeficiente de arrastre.

$$f(c) = \frac{667.38}{c}\left(1 - e^{-0.146843c}\right) - 40$$



MÉTODOS ABIERTOS

Los *métodos abiertos* se basan en fórmulas que requieren únicamente de un solo valor de inicio x o un par de ellos, pero que no necesariamente encierran la raíz. Éstos, algunas veces *divergen* o se alejan de la raíz verdadera a medida que se avanza en el cálculo. Sin embargo, cuando los métodos abiertos convergen, en general lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados.



MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE PUNTO FIJO

Los métodos abiertos emplean una fórmula para predecir la raíz. Esta fórmula puede desarrollarse como una *iteración simple de punto fijo* (también llamada iteración de un punto o sustitución sucesiva o método de punto fijo), al arreglar la ecuación $f(x) = 0$ de tal modo que x esté del lado izquierdo de la ecuación:

$$x = g(x)$$

Esta transformación se realiza mediante operaciones algebraicas o simplemente sumando x a cada lado de la ecuación original. Por ejemplo,

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = 0$$

$$x = \operatorname{sen} x + x$$

MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE PUNTO FIJO

La utilidad de la ecuación anterior es que proporciona una fórmula para predecir un nuevo valor de x en función del valor anterior de x. De esta manera, dado un valor inicial para la raíz x_i, la ecuación se utiliza para obtener una nueva aproximación x_{i+1}, expresada por la fórmula iterativa.

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Como en otras fórmulas iterativas, el error aproximado de esta ecuación se calcula usando el error normalizado

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$

MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE PUNTO FIJO

EJEMPLO

Use una iteración simple de punto fijo para localizar la raíz de

$$f(x) = e^{-x} - x.$$

SOLUCIÓN:

La función se puede separar directamente y expresarse en la forma:

$$x_{i+1} = e^{-x_i}$$

MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE PUNTO FIJO

EJEMPLO

Use una iteración simple de punto fijo para localizar la raíz de

$$f(x) = e^{-x} - x.$$

valor verdadero de la raíz: 0.56714329.

SOLUCIÓN:

La función se puede separar directamente y expresarse en la forma:

$$x_{i+1} = e^{-x_i}$$

MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE PUNTO FIJO

EJEMPLO

Use una iteración simple de punto fijo para localizar la raíz de

Ej: $F(x)=X^4-2X^3-4X^2+4X+4$

$$X=\frac{-X^4+2X^3+4X^2-4}{4}$$

$$X=\sqrt[2]{\frac{X^4-2X^3+4x+4}{4}}$$

$$X=\sqrt[3]{\frac{X^4-4X^2+4x+4}{2}}$$

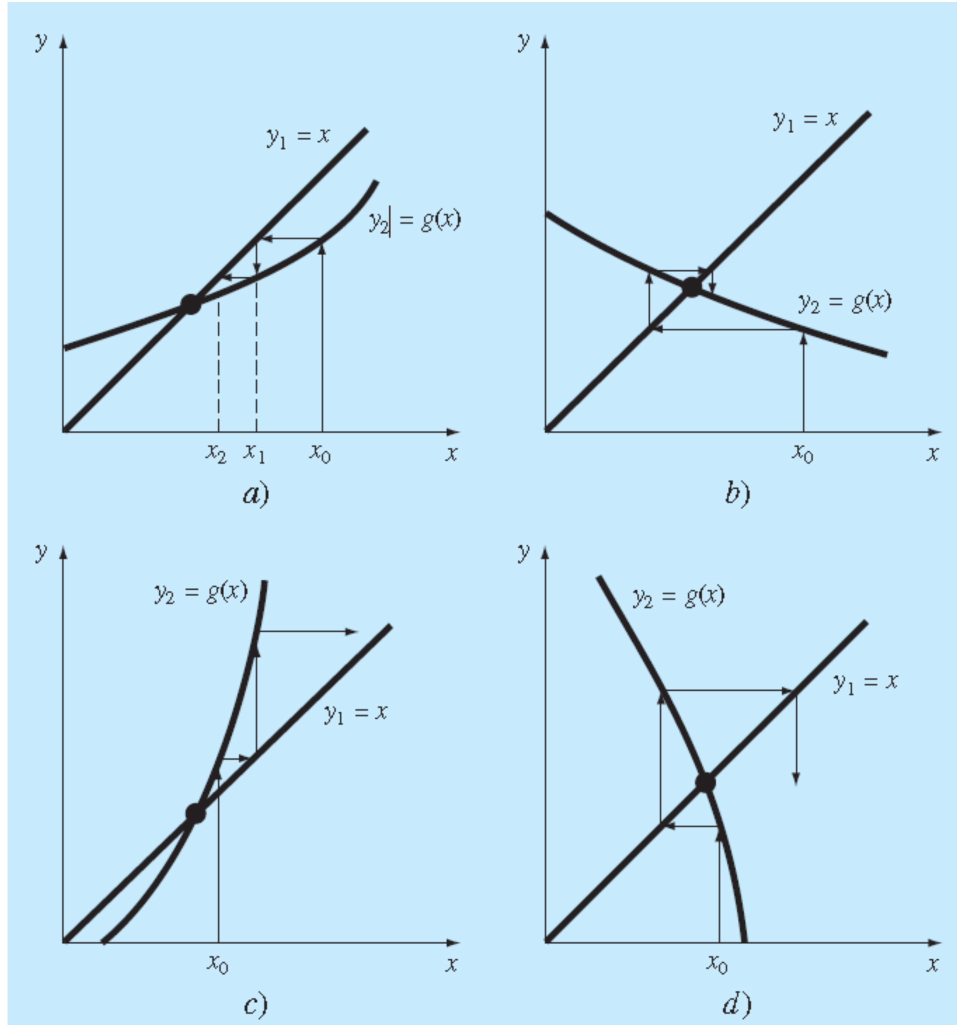
$$X=\sqrt[4]{\frac{2X^3+4X^2-4x-4}{1}}$$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE PUNTO FIJO

CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA



MÉTODOS ABIERTOS

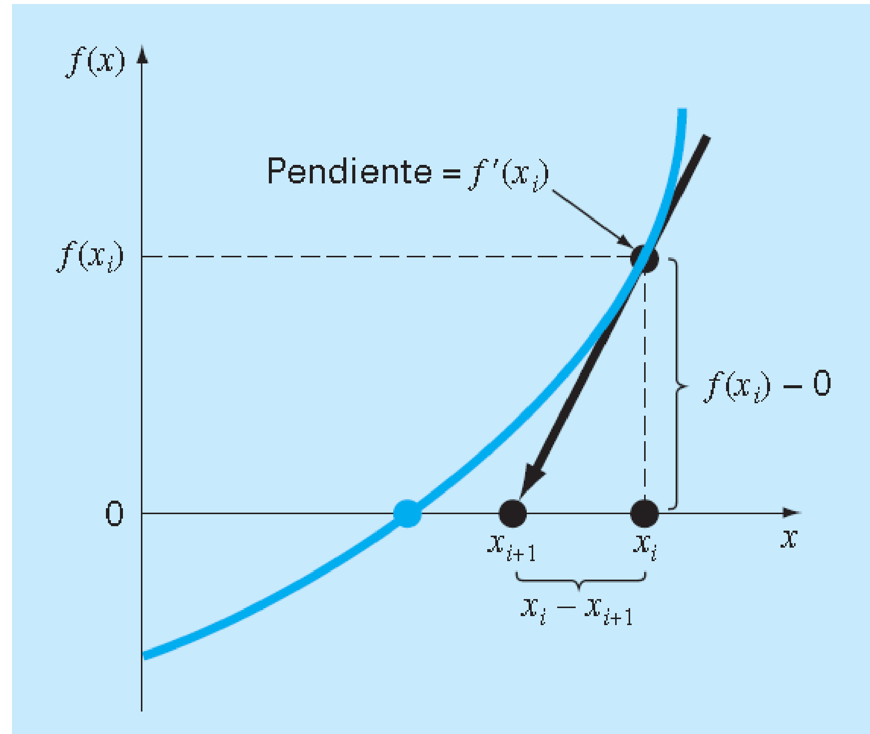
MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

Si el valor inicial para la raíz es *xi*, entonces se puede trazar una tangente desde el punto [*xi*, *f*(*xi*)] de la curva. Por lo común, el punto donde esta tangente cruza al eje *x* representa una aproximación mejorada de la raíz.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

que se arregla para obtener

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$



MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

EJEMPLO

Utilice el método de Newton-Raphson para calcular la raíz de $f(x)$ empleando como valor inicial $x0 = 0$.

$$f(x) = e^{-x} - x.$$

valor verdadero de la raíz: 0.56714329.

Solución. La primera derivada de la función es

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

EJEMPLO

Utilice el método de Newton-Raphson para calcular la raíz de *f*(*x*) empleando como valor inicial *x*0 = 0,5

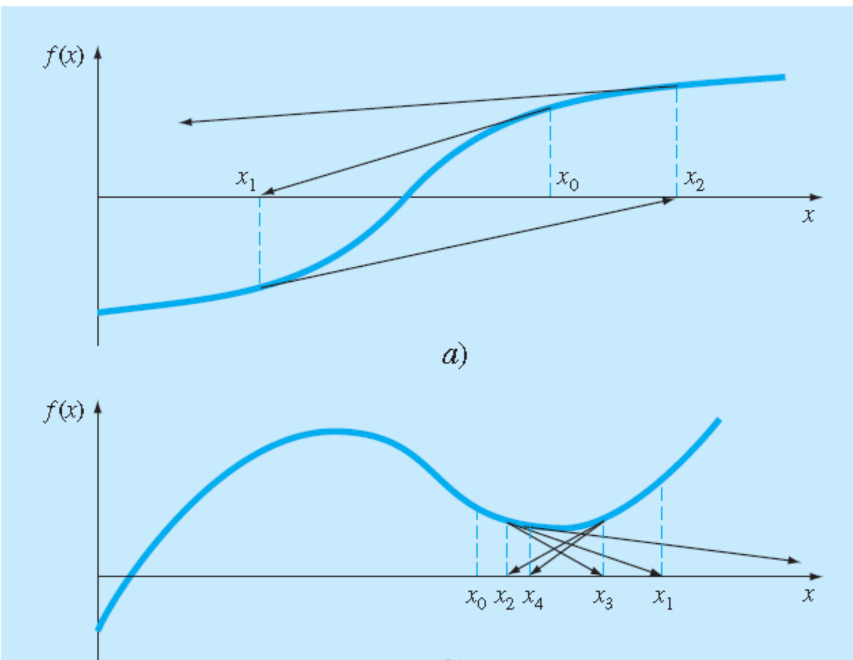
$$f(x) = x^{10} - 1$$

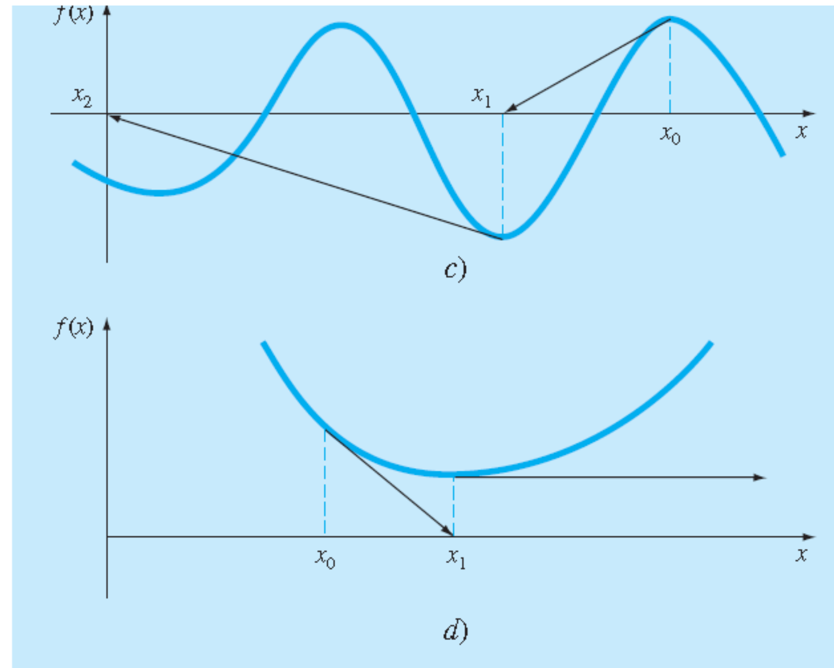
$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{10} - 1}{10x_i^9}$$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON





MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

De manera que no hay un criterio general de convergencia para el método de Newton-Raphson. Su convergencia depende de la naturaleza de la función y de la exactitud del valor inicial. La única solución en estos casos es tener un valor inicial que sea "suficientemente" cercano a la raíz. ¡Y para algunas funciones ningún valor inicial funcionará!

Los buenos valores iniciales por lo común se predicen con un conocimiento del problema físico o mediante el uso de recursos alternativos, tales como las gráficas, que proporcionan mayor claridad en el comportamiento de la solución.

MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE LA SECANTE

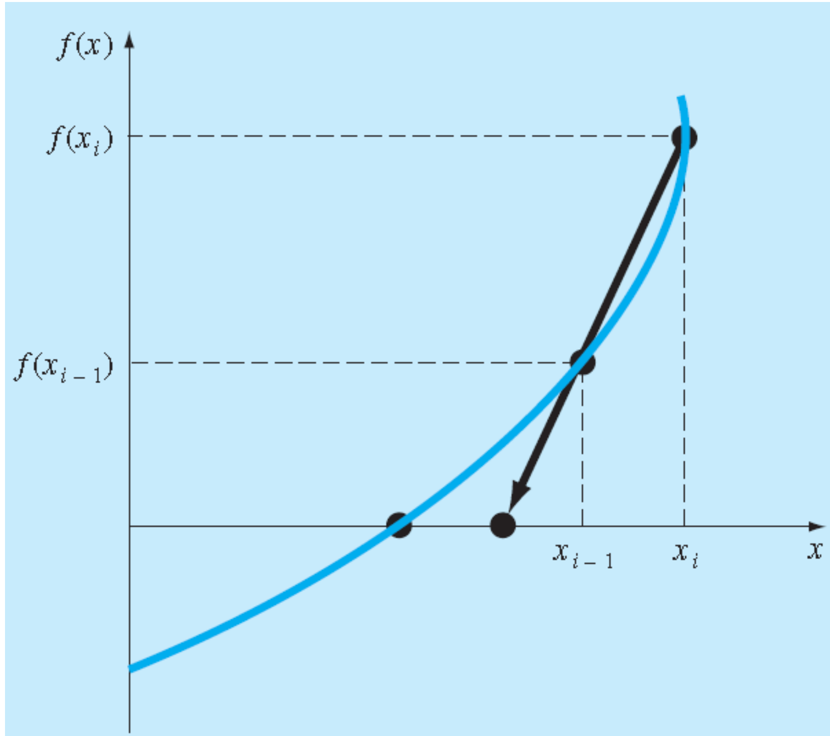
Un problema potencial en la implementación del método de Newton-Raphson es la evaluación de la derivada. Aunque esto no es un inconveniente para los polinomios ni para muchas otras funciones, existen algunas funciones cuyas derivadas en ocasiones resultan muy difíciles de calcular. En dichos casos, la derivada se puede aproximar mediante una diferencia finita dividida hacia atrás

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE LA SECANTE

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$



MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE LA SECANTE

En el método de Newton Raphson se tenia:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Ahora se sustituye el valor aproximado de la pendiente:

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Nos queda:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - (f(x_i)}}$$

Fórmula para el *método de la secante*. Observe que el método requiere de dos valores iniciales de *x*.

MÉTODOS ABIERTOS

MÉTODO DE LA SECANTE

EJEMPLO:

Con el método de la secante calcule la raíz de $f(x)$. Comience con los valores iniciales $x_{-1} = 0$ y $x_0 = 1$.

$$f(x) = e^{-x} - x.$$

valor verdadero de la raíz: 0.56714329.

MÉTODOS ABIERTOS

DIFERENCIA ENTRE EL MÉTODO DE LA POSICIÓN FALSA Y MÉTODO DE LA SECANTE

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - (f(x_i)}$$

La diferencia estriba en la forma en que uno de los valores iniciales se reemplaza por la nueva aproximación. Recuerde que en el método de la falsa posición. En consecuencia, las dos aproximaciones siempre encierran a la raíz. Por lo tanto, para todos los casos, el método siempre converge, pues la raíz se encuentra dentro del intervalo.

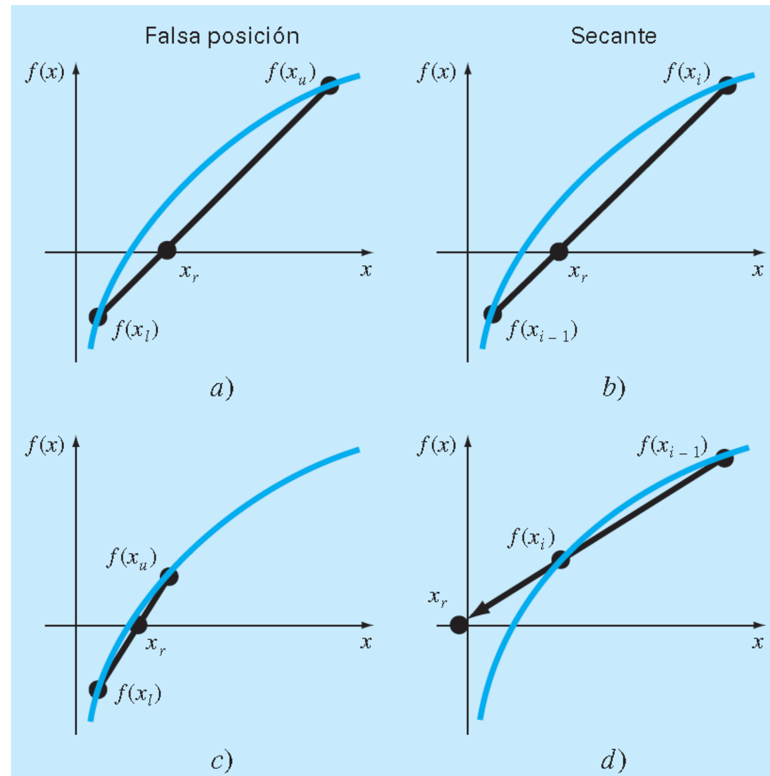
En contraste, el método de la secante reemplaza los valores en secuencia estricta: con el nuevo valor $xi + 1$ se reemplaza a xi y xi reemplaza a $xi - 1$. En consecuencia, algunas veces los dos valores están en el mismo lado de la raíz. En ciertos casos esto puede llevar a divergencias.

MÉTODOS ABIERTOS

DIFERENCIA ENTRE EL MÉTODO DE LA POSICIÓN FALSA Y MÉTODO DE LA SECANTE

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - (f(x_i)}$$



MÉTODOS ABIERTOS

DIFERENCIA ENTRE EL MÉTODO DE LA POSICIÓN FALSA Y MÉTODO DE LA SECANTE

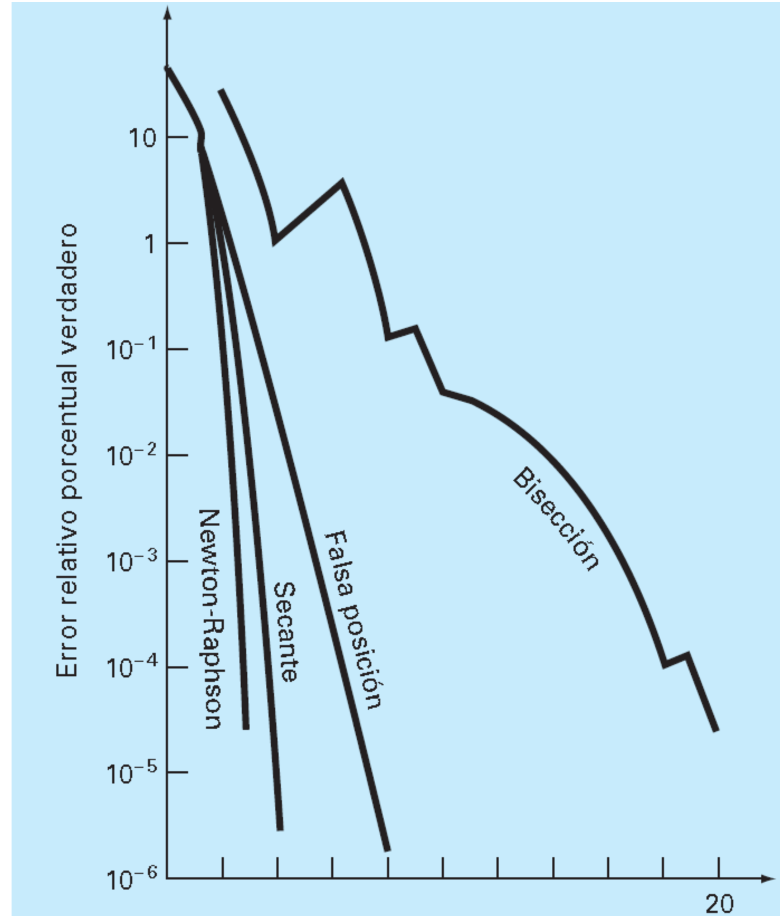
EJEMPLO:

Utilice los métodos de la secante y de la falsa posición para calcular la raíz de:
$f(x) = \ln x$

Empiece los cálculos con los valores iniciales $x_l = x_{i-1} = 0.5$ y $x_u = x_i = 5.0$.

MÉTODOS ABIERTOS

DIFERENCIA ENTRE VARIOS MÉTODOS



Comparación de los errores relativos porcentuales verdaderos ε_t, para los métodos que determinan las raíces de $f(x) = e^{-x} - x$.

GRACIAS POR SU ATENCION