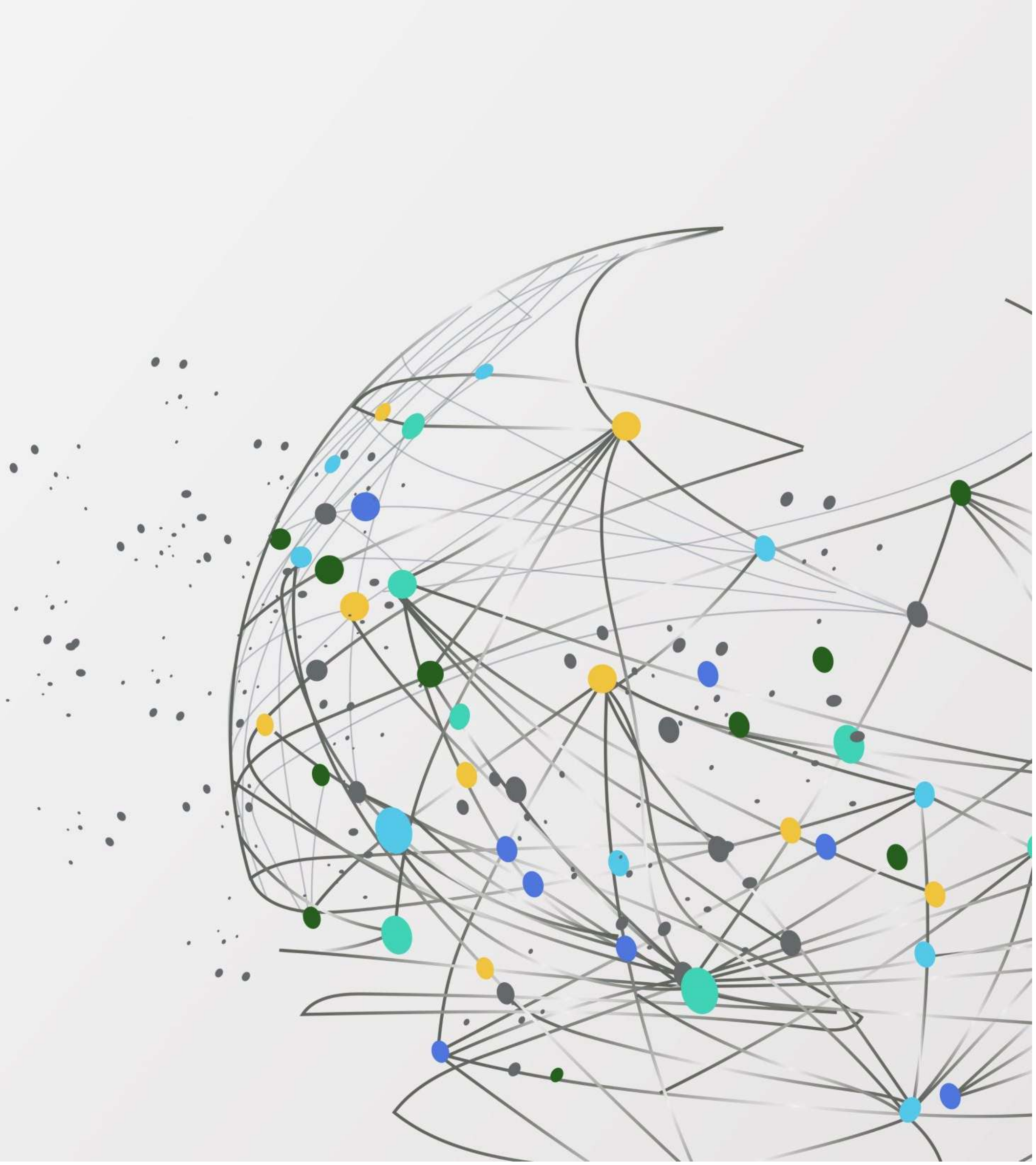
ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

Ing. Marcelo David Guerra Valladares, MSc.
Magíster en Ingeniería Civil – Mención Estructuras Sismorresistentes
Especialista Estructural



UNIDAD 2

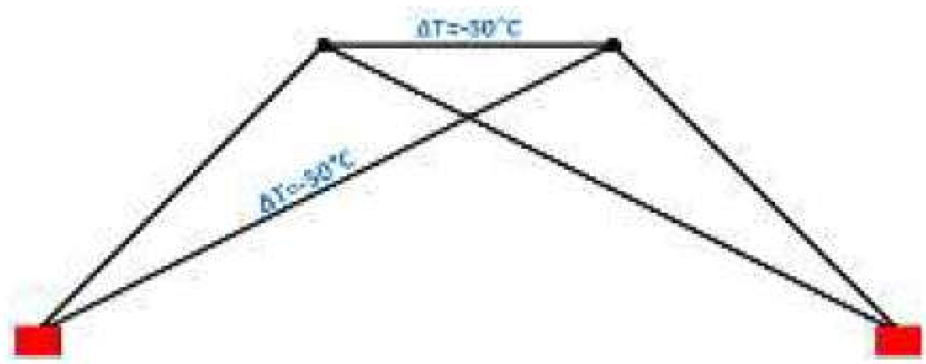
SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS PLANAS ORIENTADAS AL USO DEL COMPUTADOR

Introducción al Análisis Matricial de Estructuras

El análisis matricial de estructuras es una de las materias más importantes en el campo del análisis de estructuras.

Consiste principalmente en concebir estructuras reales utilizando matrices.

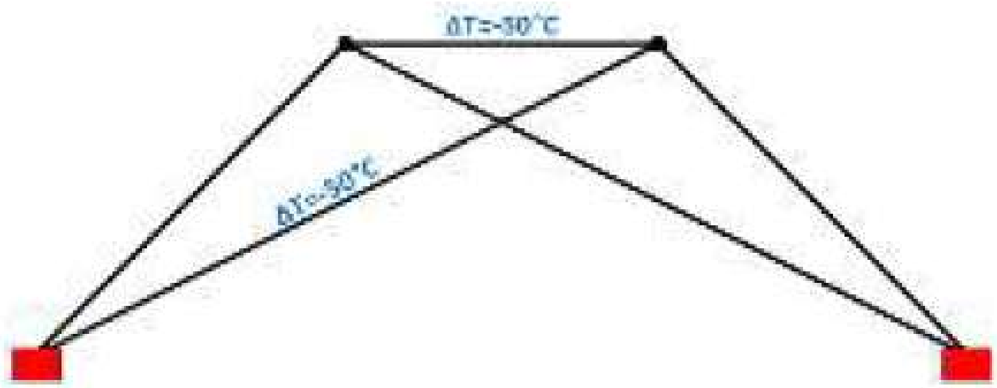
La armadura mostrada se la puede representar con las siguientes matrices.



Introducción al Análisis Matricial de Estructuras

$$F = K * U$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ -24.628 \\ -5.814 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 171.132 & 17.467 & -100 & 0 \\ 17.467 & 44.30 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 171.132 & -17.467 \\ 0 & 0 & -17.467 & 44.30 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{bmatrix}$$



Historia

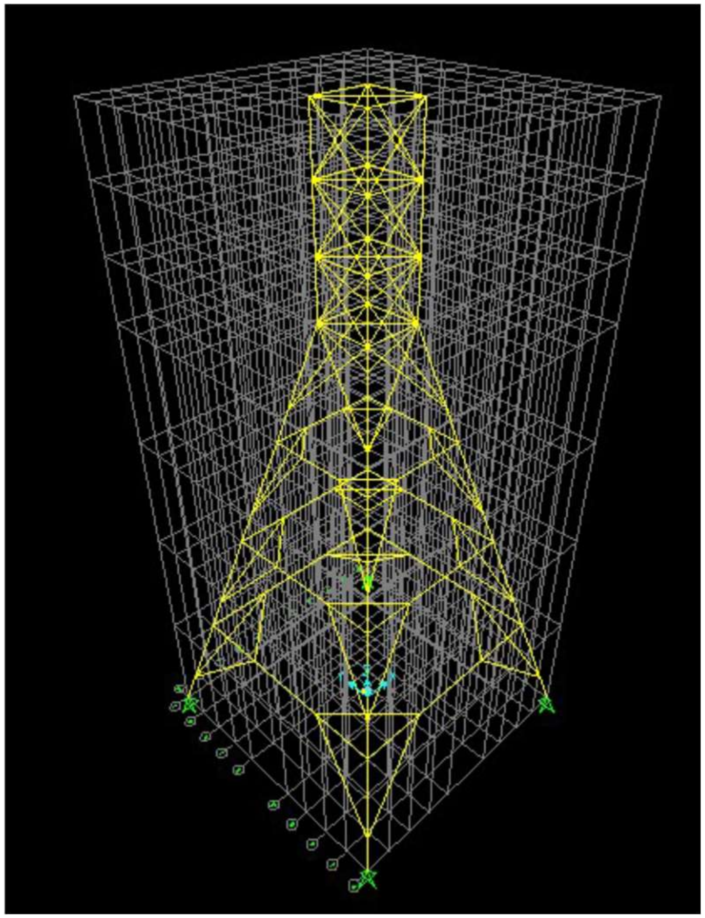
En 1920 los esfuerzos de Maney en EEUU y Ostenfield en Dinamarca dan como resultado las primeras ideas básicas de análisis de armaduras y pórticos.

Conocimiento estaba adelantado a la tecnología.

En 1932 se da a conocer o se propone el método de distribución de momentos (Método de Hardy Cross).

Este nuevo método se estableció como el método para realizar análisis estructural y se lo utilizó casi exclusivamente por los siguientes 25 años.

Computadoras digitales aparecen en 1950.



Introducción al Análisis Matricial de Estructuras

Programas comerciales tales como Sap2000, ETABS, RISA, PERFORM 3D, Cypecad, Ram Adanvance entre otros.

Ingeniero estructural debe conocer lo que está ocurriendo dentro del programa.

Realizar programas de análisis propios.

Método Fuerzas vs Método Desplazamientos

Método de fuerzas: son los aprendidos hasta el momento: doble integral, área momento, viga continua entre otros.

Problemas pequeños

Indeterminación estática: Número de incógnitas menos ecuaciones de equilibrio.

Método de Desplazamientos: Las incógnitas son los desplazamientos y la indeterminación es cinemática.

Indeterminación cinemática: Grados de libertad que deben ser restringidos para que la estructura no tenga ningún desplazamiento. En otras palabras, el grado de indeterminación viene dado por las incógnitas.

Conceptos Básicos Análisis Matricial

NODOS: Son los puntos en los cuales se hace cumplir equilibrio y los desplazamientos son calculados. Los nodos se encuentran los extremos de los elementos.

GDL: Son los desplazamientos posibles que tiene un nodo para definir su posición en el espacio cuando una carga es aplicada a la estructura. El número de GDL depende del tipo de estructura

EJES LOCALES: Es conveniente derivar las ecuaciones de relación fuerza deformación en términos de fuerza desplazamientos a los largo y perpendicular del elemento.

EJES GLOBALES: La relación fuerza deformación de la estructura debe estar referenciada con respecto a estos ejes.

Análisis Matricial de Estructuras - Barras 1D

Introducción

El análisis de barras en una dimensión se lo puede considerar no útil desde el punto de vista práctico, pero es de suma importancia desde el punto de vista académico.

Sirve para entender los conceptos claves de análisis matricial que se utilizarán para analizar cualquier estructura.

Se hace análisis de estructuras tipo barra con un comportamiento lineal sometido a cargas nodales y no nodales.

No existe diferencia entre ejes locales y ejes globales.

Relación Fuerza Deformación

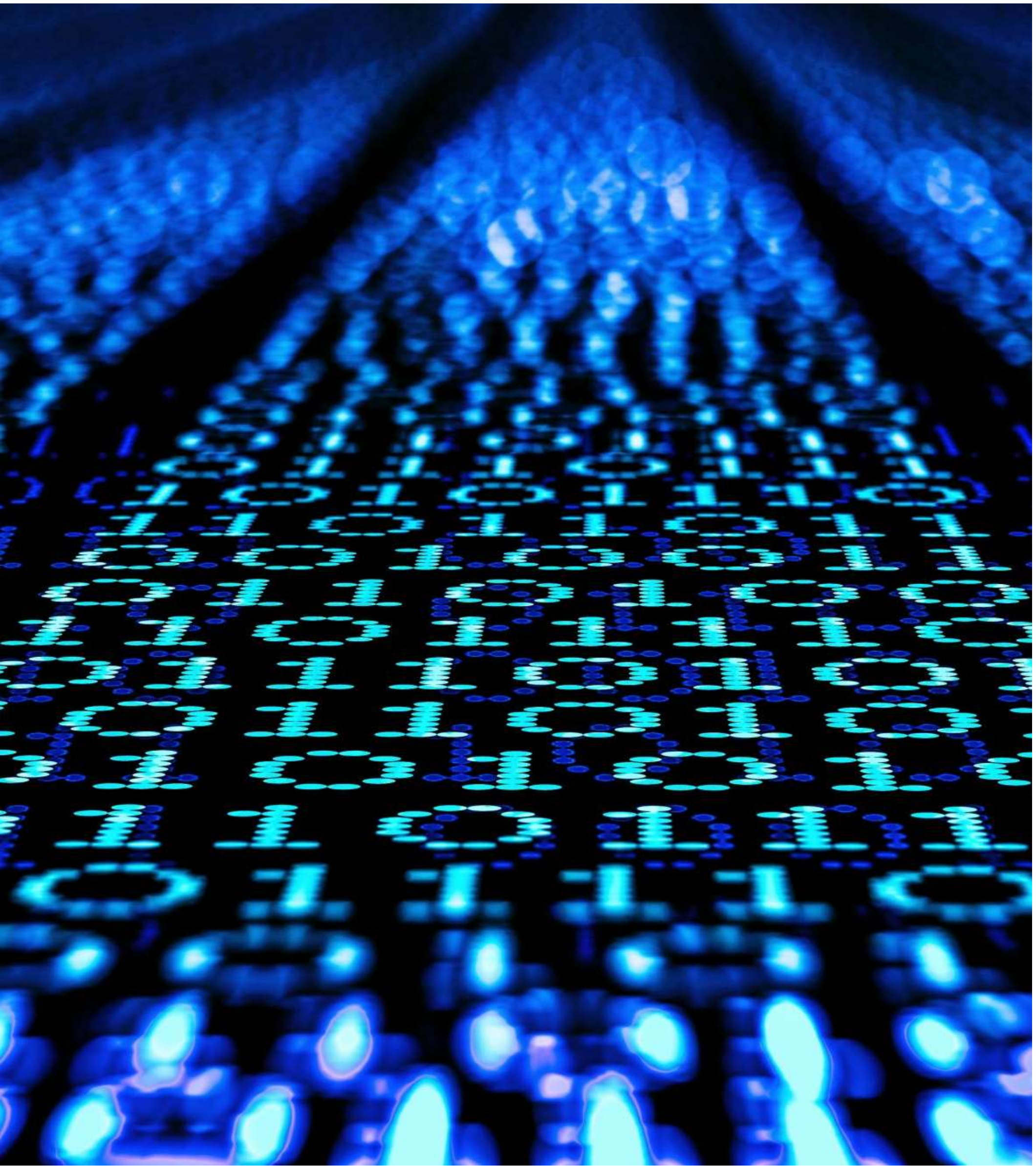
La relación fuerza deformación para un elemento tipo barra viene dado por la ecuación:

$$\{F\} = [K] * \{U\}$$

Para obtener esta relación es necesario aplicar dos importantes conceptos: 1) el concepto de rigidez y 2) mecánica de materiales

Rigidez: Fuerza necesaria para producir un desplazamiento unitario.

Una barra puede tener desplazamientos en los dos nodos de sus extremos.



Matriz “A”

Definición

Se considera un sistema de coordenadas P - p para la estructura presentada a la izquierda de la figura, es el que aparece en la parte central.

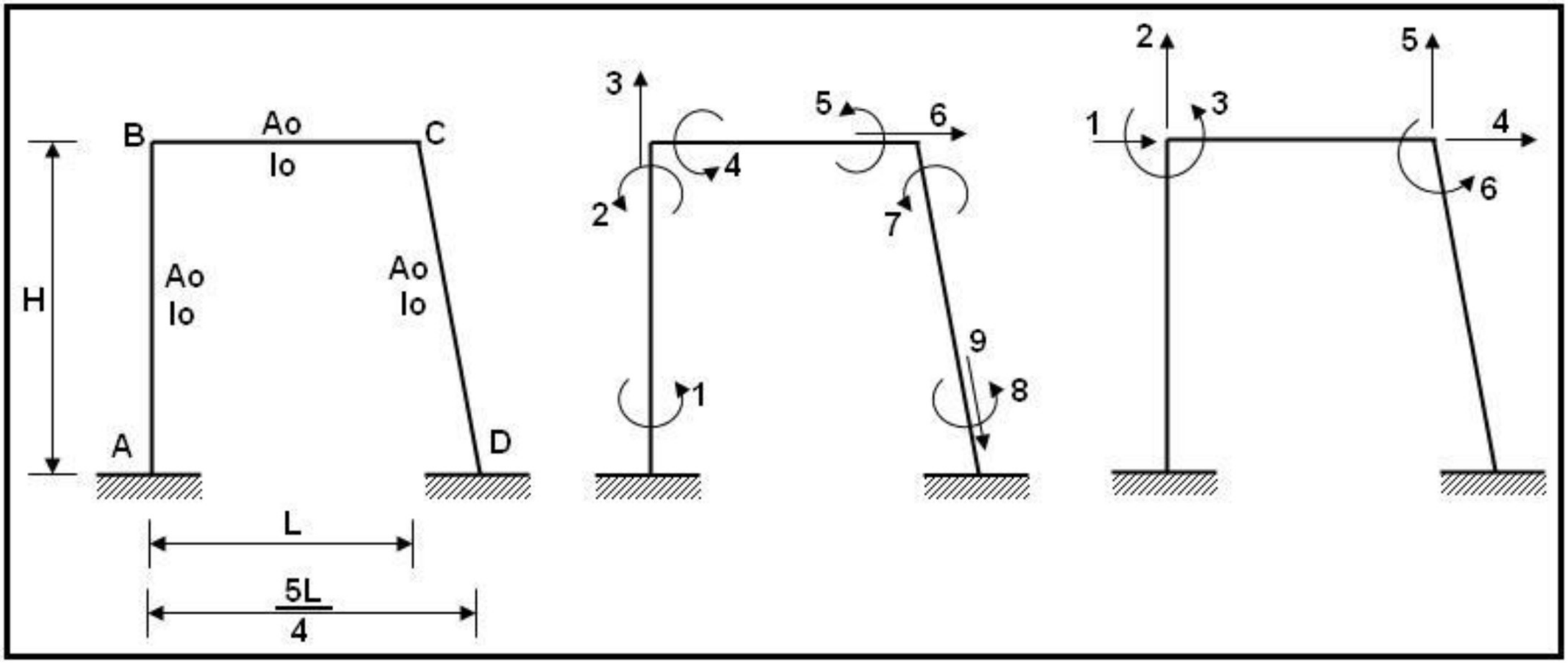
Es decir que la numeración del sistema P - p se lo hará de corrido, se entiende que las tres primeras deformaciones corresponden al elemento AB, las tres subsiguientes (4, 5 y 6) al elemento BC y las tres últimas (7, 8 y 9) al elemento CD.

A la derecha de la figura, se indica el sistema de coordenadas Q - q para el pórtico analizado. Se quiere establecer una relación entre los desplazamientos q y las deformaciones p. Esto se lo consigue por medio de la matriz A, definida de la siguiente manera:

$$p = A * q$$

Definición

Donde A es la matriz de compatibilidad que transforma los desplazamientos de una estructura en deformaciones, en general será de orden $m\ x\ n$. Siendo m el número de filas que es igual a las coordenadas p y n el número de columnas que es igual a las coordenadas q .

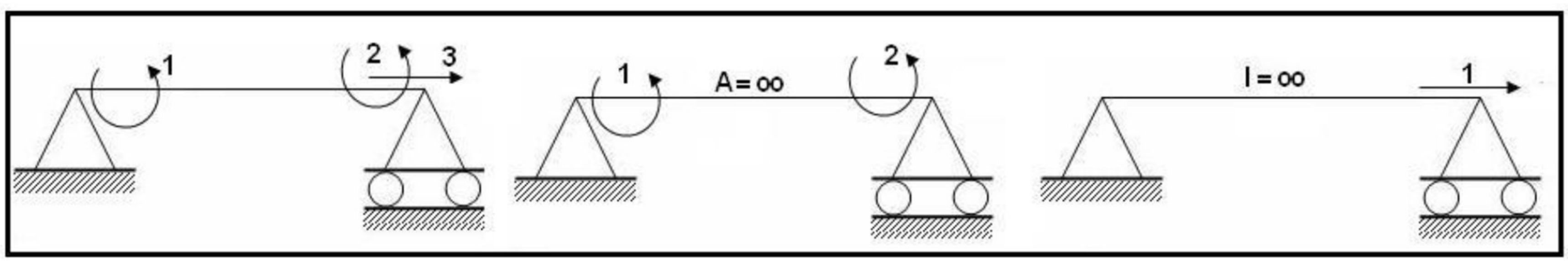

B
Ao
Io
C
H
Ao
Io
Ao
Io
A
D
L
5L/4
3
4
5
6
2
7
9
1
8
2
5
1
3
4
6

Cálculo de la Matriz “A”

Pórtico Plano

La matriz A sirve para encontrar la matriz de rigidez de una estructura, con este objetivo el sistema de coordenadas de elemento que más se emplea es el presentado a la izquierda de la figura para un elemento totalmente flexible.

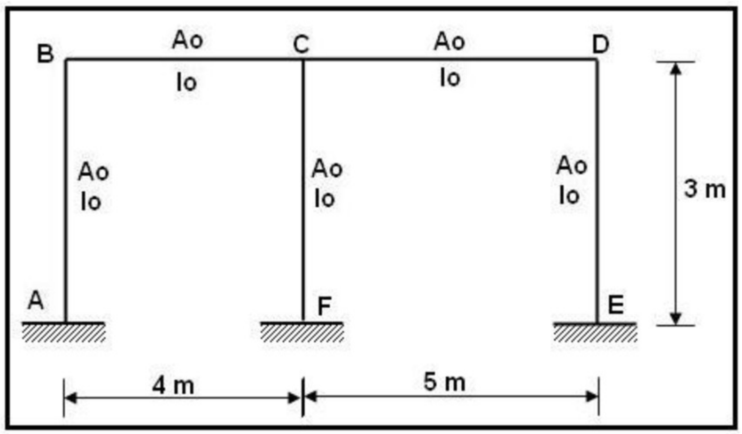
Si el elemento es axialmente rígido se tiene las coordenadas, indicadas en la gráfica central de la figura y si el elemento es transversalmente rígido las coordenadas indicadas a la derecha de la figura.

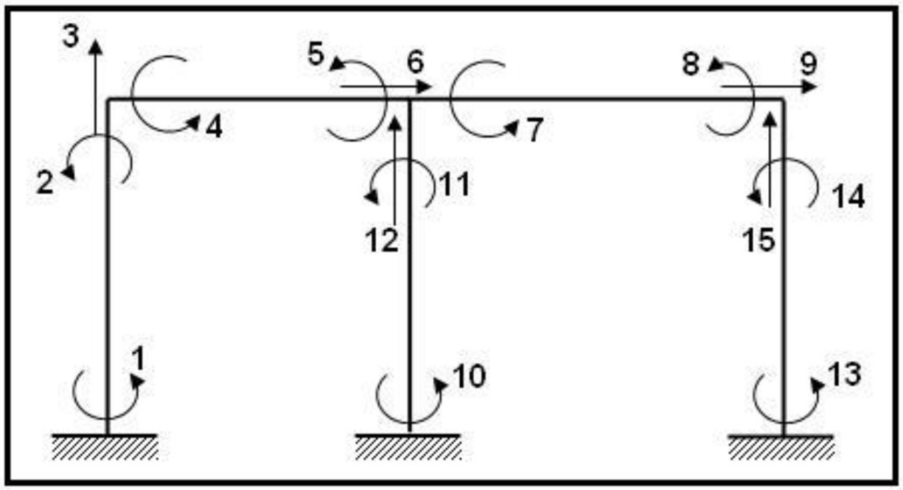


Ejercicio 1

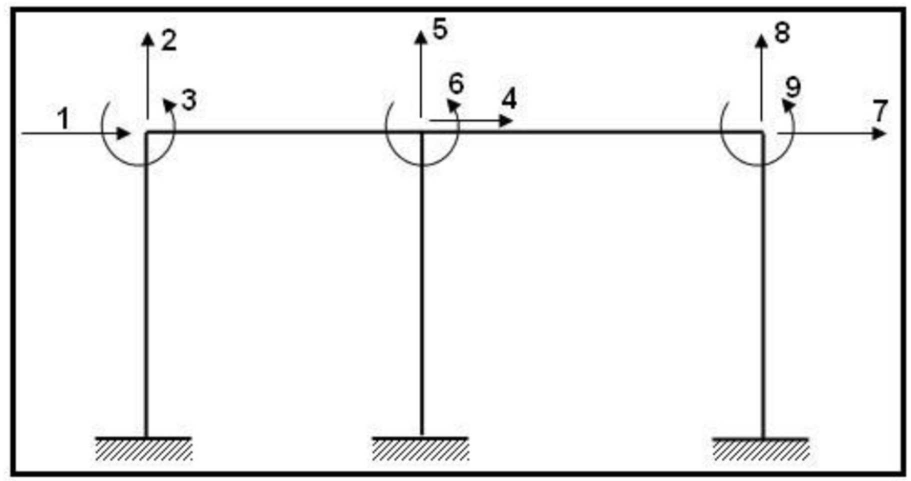
Ejercicio 1

Hallar la matriz de compatibilidad de deformaciones A de la estructura de la figura compuesta por elementos totalmente flexibles.





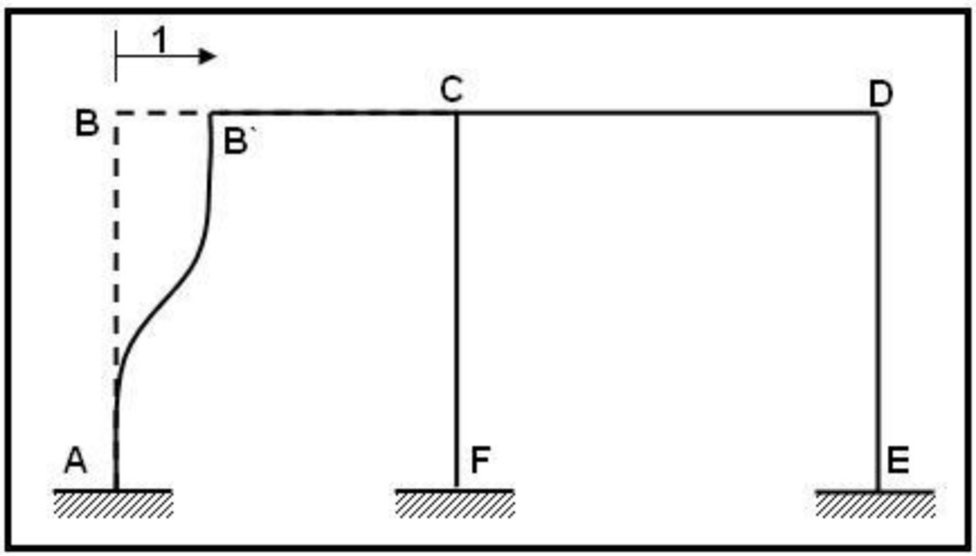
Sistema P-p



Sistema Q-q

Primera columna matriz A

$q1 = 1\ ;\ qi = 0\ ;\ i \neq 1$



$p1 = \frac{1}{3}$

$p2 = \frac{1}{3}$

$p3 = 0$

$p4 = 0$

$p5 = 0$

$p6 = -1$

$p7 = 0$

$p8 = 0$

$p9 = 0$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

$p12 = 0$

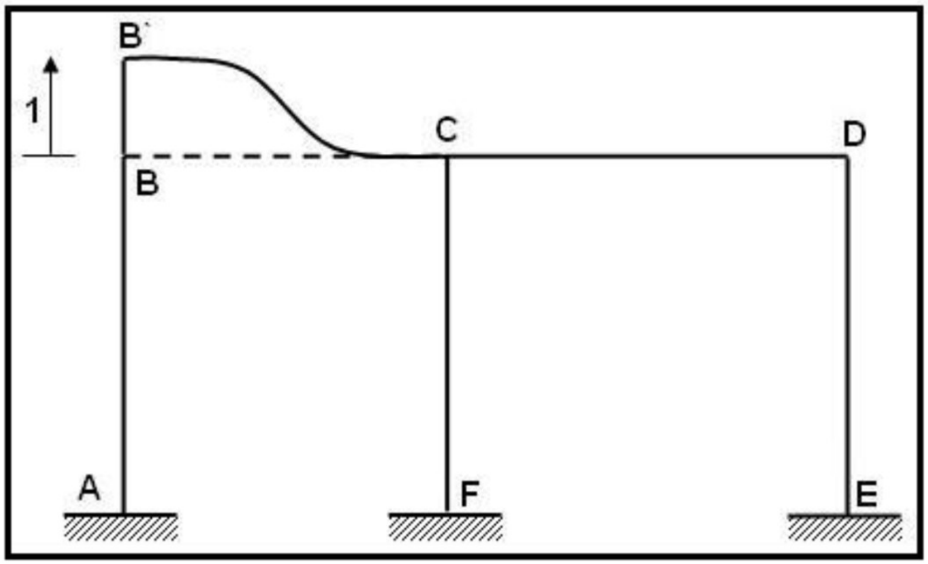
$p13 = 0$

$p14 = 0$

$p15 = 0$

Segunda columna matriz A

$q2 = 1\ ;\ qi = 0\ ; i \neq 2$



$p1 = 0$

$p2 = 0$

$p3 = 1$

$p4 = \frac{1}{4}$

$p5 = \frac{1}{4}$

$p6 = 0$

$p7 = 0$

$p8 = 0$

$p9 = 0$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

$p12 = 0$

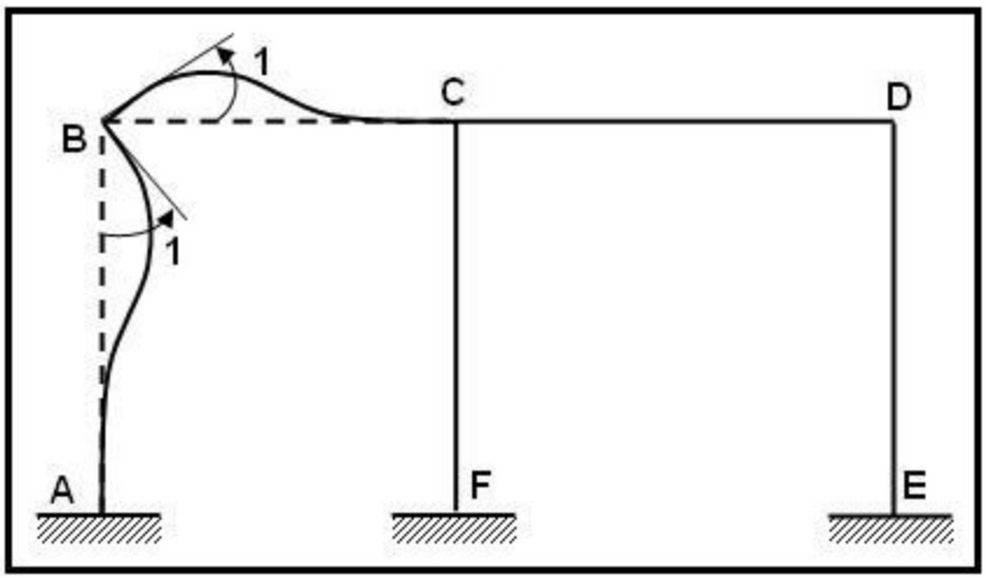
$p13 = 0$

$p14 = 0$

$p15 = 0$

Tercera columna matriz A

$q3 = 1\ ;\ qi = 0\ ; i \neq 3$



$p1 = 0$

$p2 = 1$

$p3 = 0$

$p4 = 1$

$p5 = 0$

$p6 = 0$

$p7 = 0$

$p8 = 0$

$p9 = 0$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

$p12 = 0$

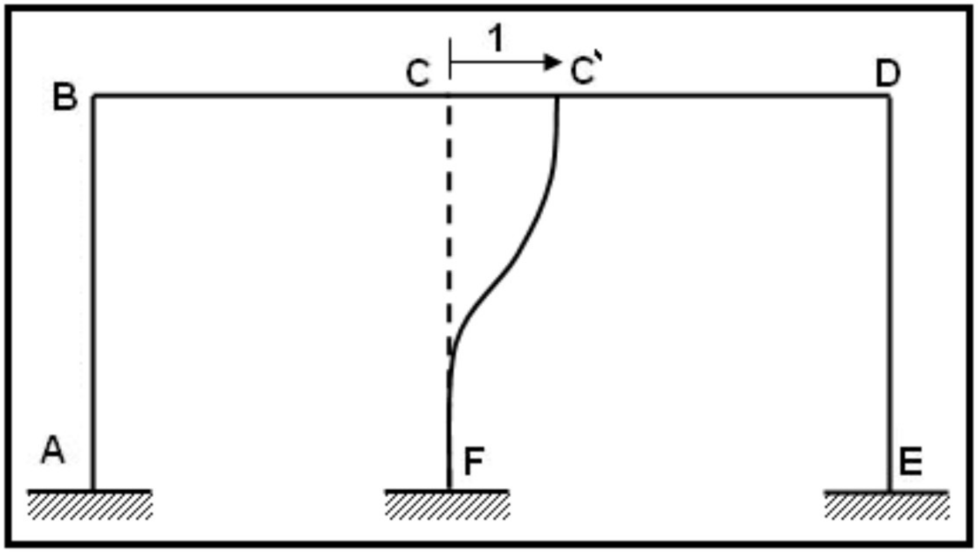
$p13 = 0$

$p14 = 0$

$p15 = 0$

Cuarta columna matriz A

$q4 = 1\ ;\ qi = 0\ ;\ i \neq 4$



$p1 = 0$

$p2 = 0$

$p3 = 0$

$p4 = 0$

$p5 = 0$

$p6 = 1$

$p7 = 0$

$p8 = 0$

$p9 = -1$

$p10 = \frac{1}{3}$

$p11 = \frac{1}{3}$

$p12 = 0$

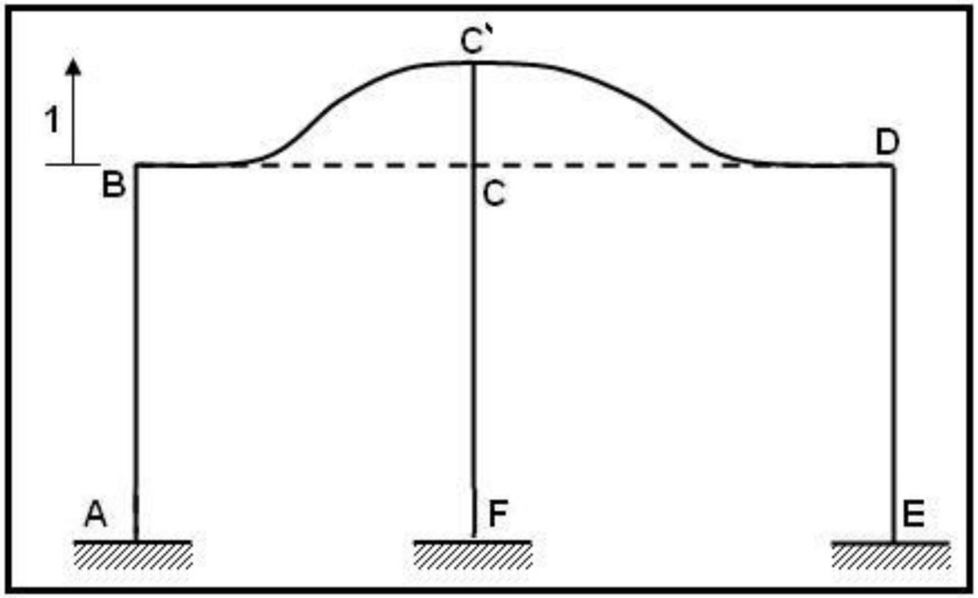
$p13 = 0$

$p14 = 0$

$p15 = 0$

Quinta columna matriz A

$q5 = 1\,;\ qi = 0\,; i \neq 5$



$p1 = 0$

$p2 = 0$

$p3 = 0$

$p4 = -\frac{1}{4}$

$p5 = -\frac{1}{4}$

$p6 = 0$

$p7 = \frac{1}{5}$

$p8 = \frac{1}{5}$

$p9 = 0$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

$p12 = 1$

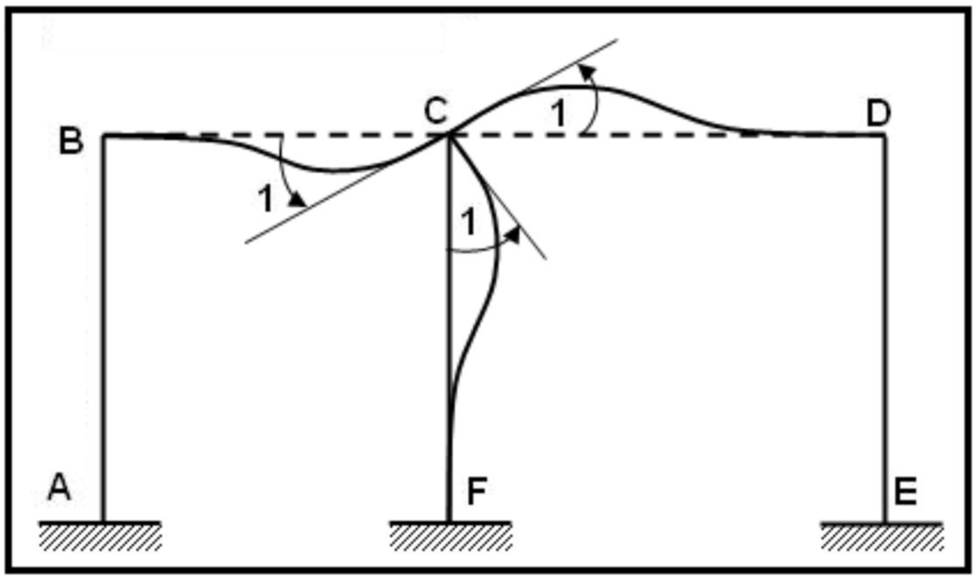
$p13 = 0$

$p14 = 0$

$p15 = 0$

Sexta columna matriz A

$q6 = 1\ ;\ qi = 0\ ; i \neq 6$



$p1 = 0$

$p2 = 0$

$p3 = 0$

$p4 = 0$

$p5 = 1$

$p6 = 0$

$p7 = 1$

$p8 = 0$

$p9 = 0$

$p10 = 0$

$p11 = 1$

$p12 = 0$

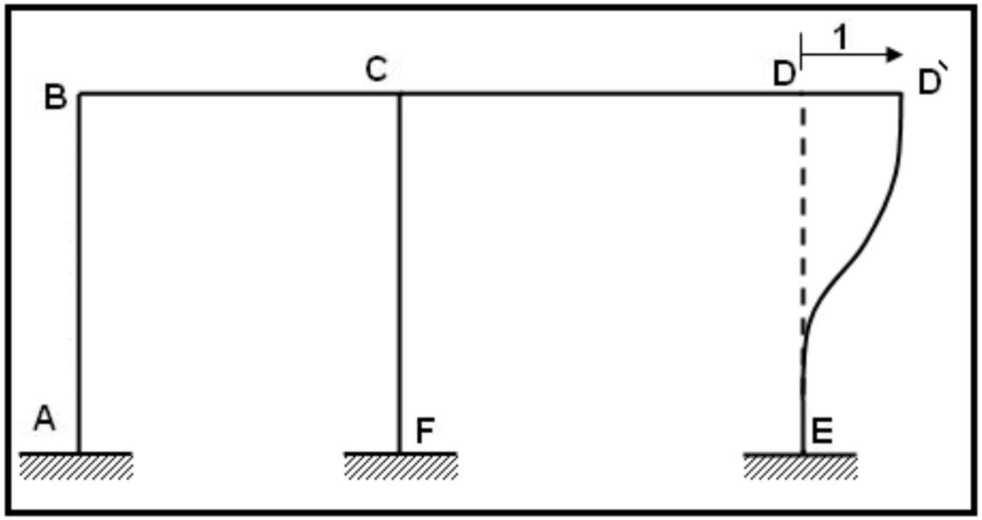
$p13 = 0$

$p14 = 0$

$p15 = 0$

Séptima columna matriz A

$q7 = 1\ ;\ qi = 0\ ; i \neq 7$



$p1 = 0$

$p2 = 0$

$p3 = 0$

$p4 = 0$

$p5 = 0$

$p6 = 0$

$p7 = 0$

$p8 = 0$

$p9 = 1$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

$p12 = 0$

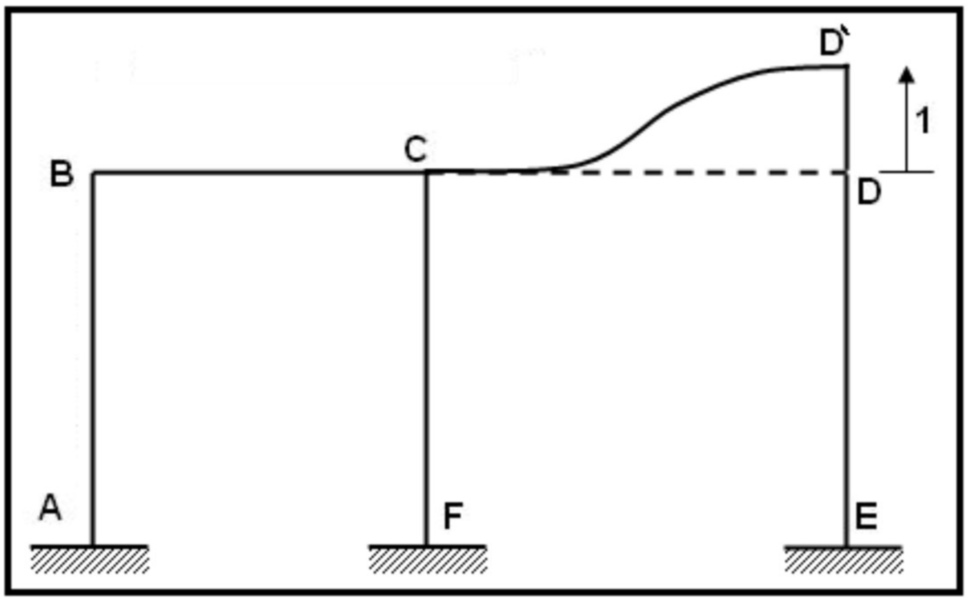
$p13 = \frac{1}{3}$

$p14 = \frac{1}{3}$

$p15 = 0$

Octava columna matriz A

$q8 = 1\,;\; qi = 0\,; i \neq 8$



$p1 = 0$

$p2 = 0$

$p3 = 0$

$p4 = 0$

$p5 = 0$

$p6 = 0$

$p7 = -\frac{1}{5}$

$p8 = -\frac{1}{5}$

$p9 = 0$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

$p12 = 0$

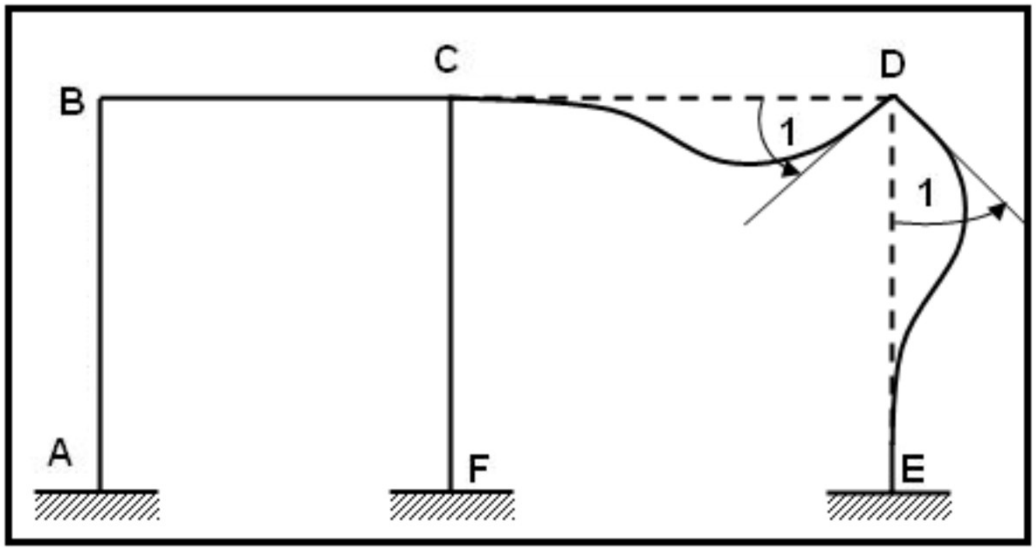
$p13 = 0$

$p14 = 0$

$p15 = 1$

Novena columna matriz A

$q9 = 1\,;\ qi = 0\,; i \neq 9$



$p1 = 0$

$p2 = 0$

$p3 = 0$

$p4 = 0$

$p5 = 0$

$p6 = 0$

$p7 = 0$

$p8 = 1$

$p9 = 0$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

$p12 = 0$

$p13 = 0$

$p14 = 1$

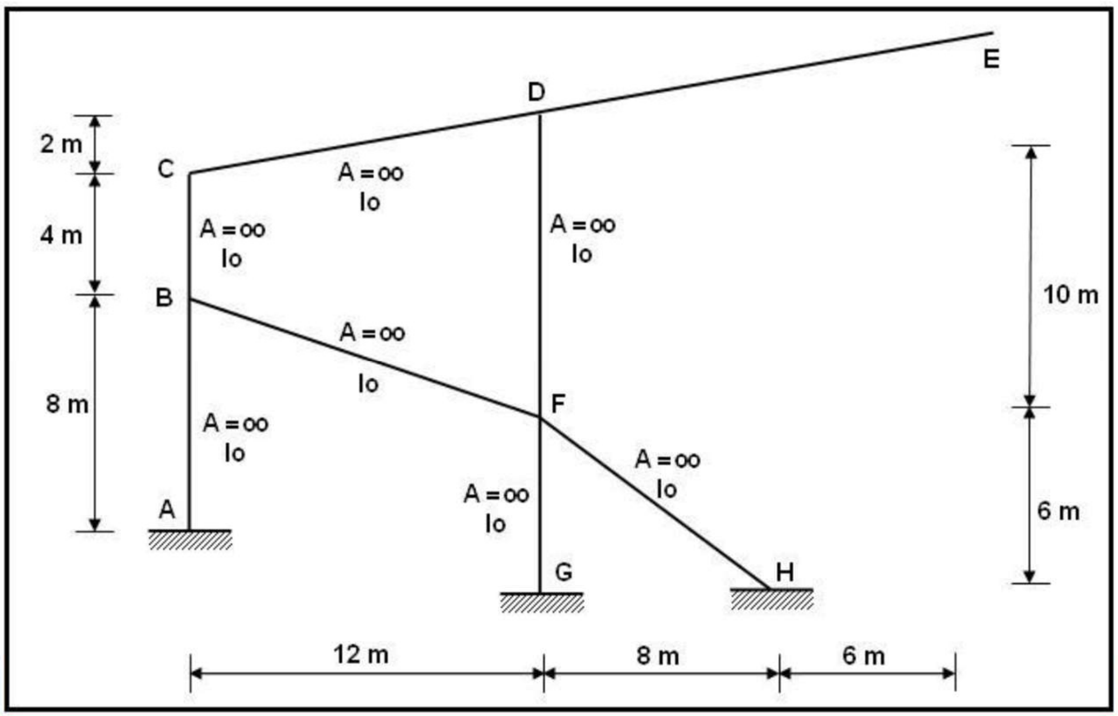
$p15 = 0$

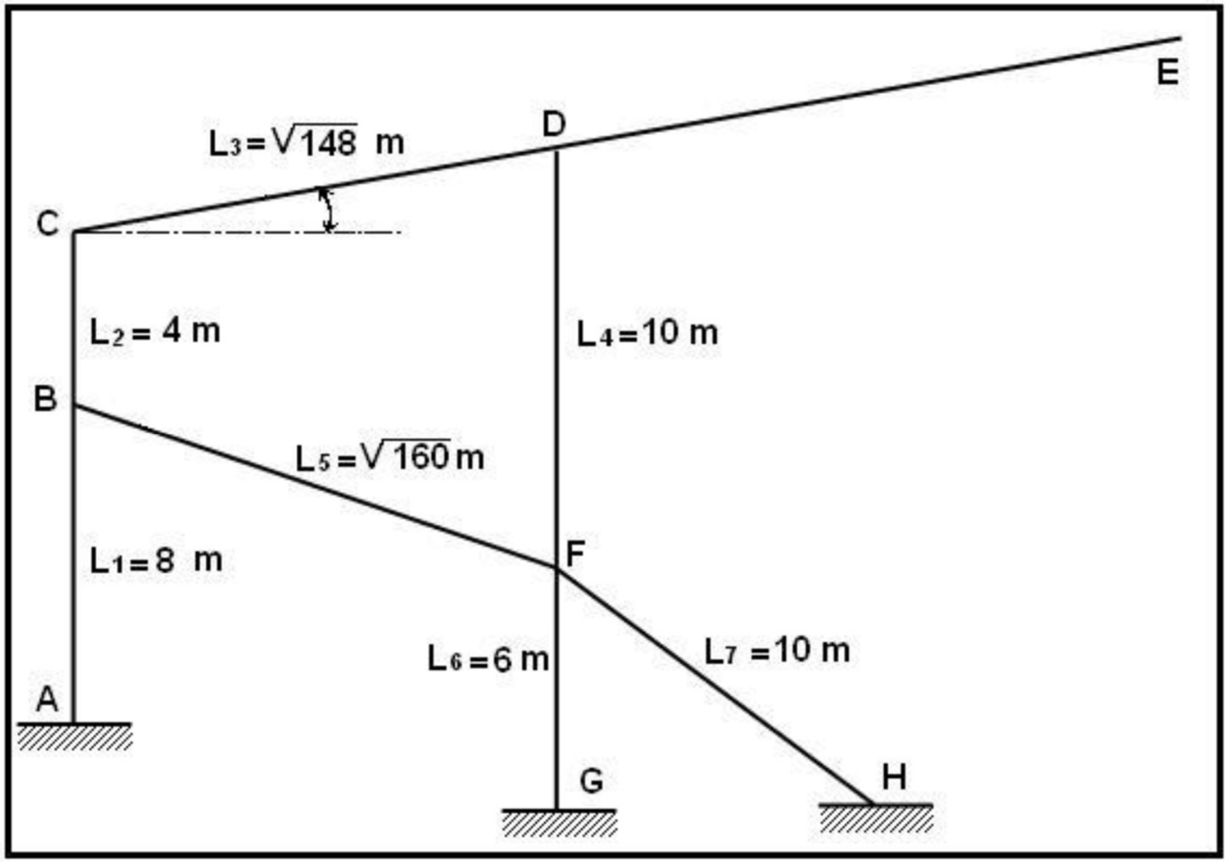
Matriz “A”

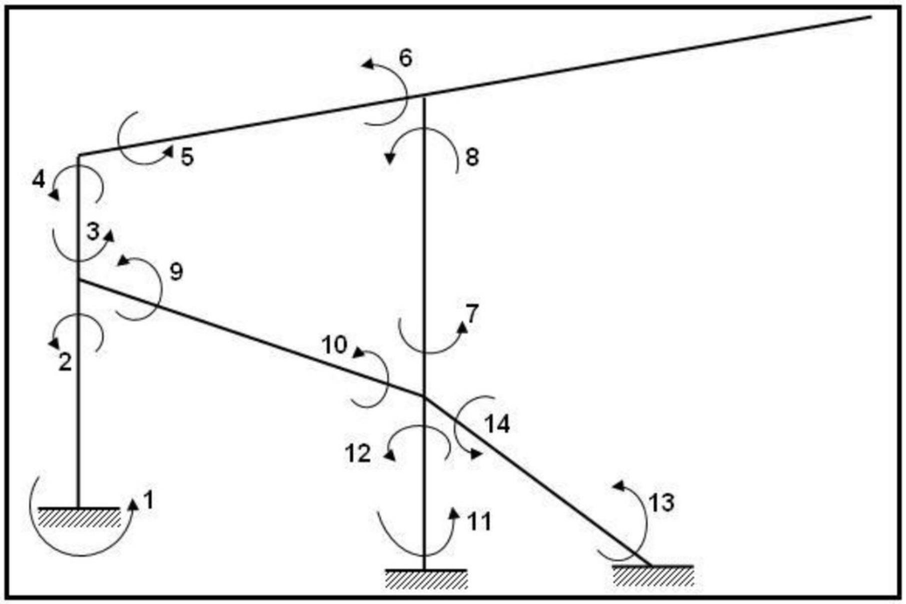
$$A=\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

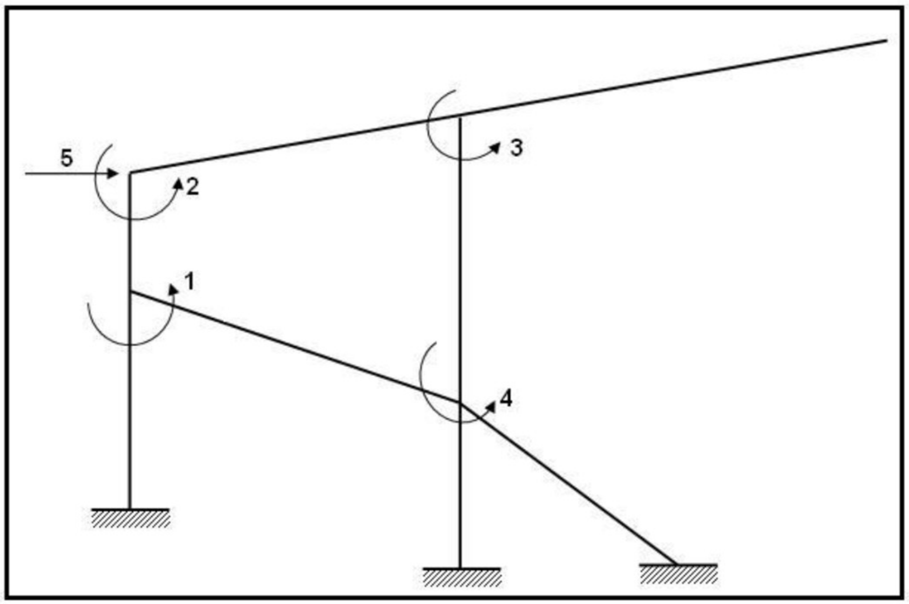
Hallar la matriz de compatibilidad de deformaciones A de la estructura de la figura compuesta por axialmente rígidos




E
D
$L_3 = \sqrt{148}$ m
C
$L_2 = 4$ m
$L_4 = 10$ m
B
$L_5 = \sqrt{160}$ m
F
$L_1 = 8$ m
$L_6 = 6$ m
$L_7 = 10$ m
A
G
H



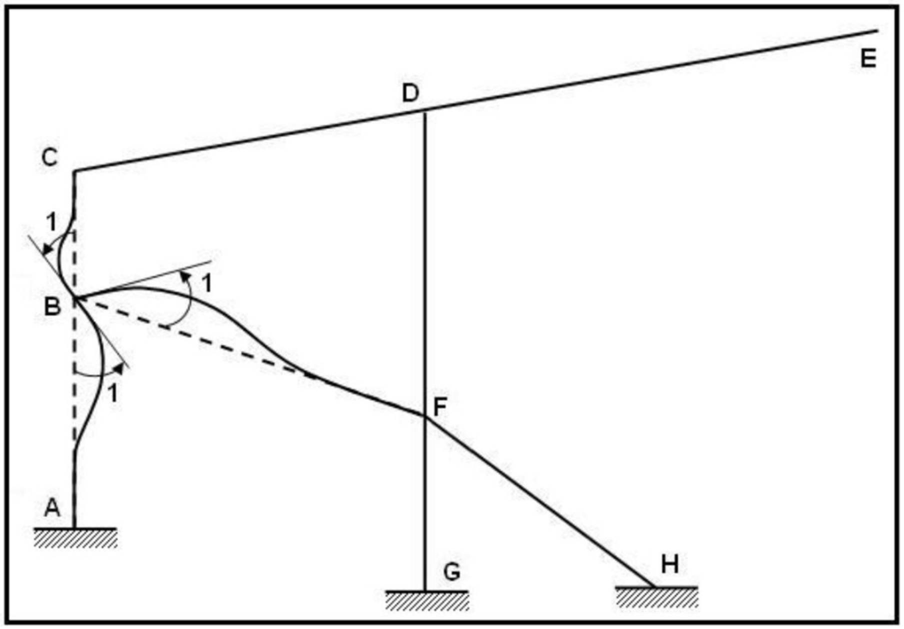
Sistema P-p



Sistema Q-q

Primera columna matriz A

$q1 = 1\,;\ qi = 0\,; i \neq 1$



$p1 = 0$

$p2 = 1$

$p3 = 1$

$p4 = 0$

$p5 = 0$

$p6 = 0$

$p7 = 0$

$p8 = 0$

$p9 = 1$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

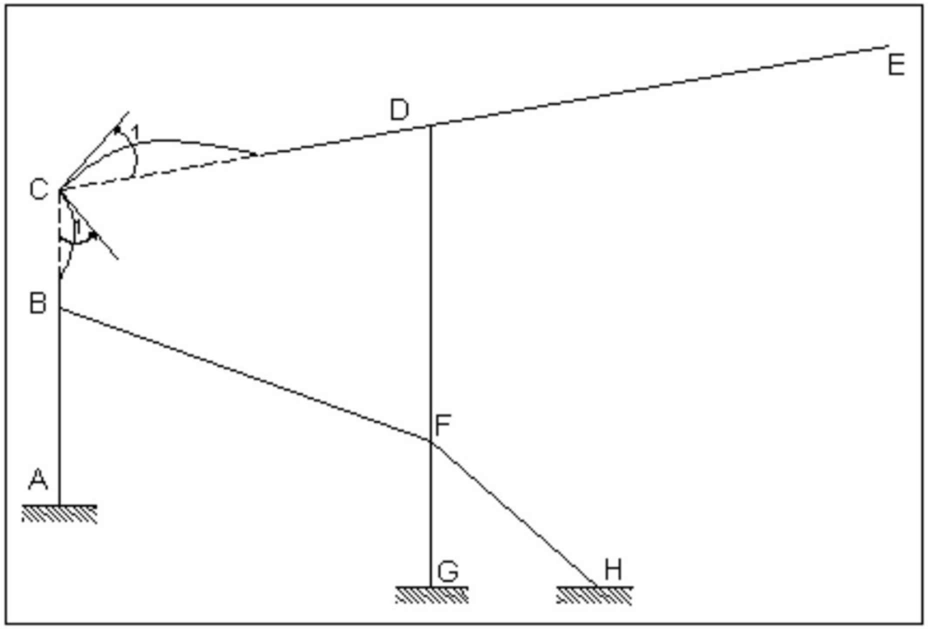
$p12 = 0$

$p13 = 0$

$p14 = 0$

Segunda columna matriz A

$q2 = 1\ ;\ qi = 0\ ;i \neq 2$



$p1 = 0$

$p2 = 0$

$p3 = 0$

$p4 = 1$

$p5 = 1$

$p6 = 0$

$p7 = 0$

$p8 = 0$

$p9 = 0$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

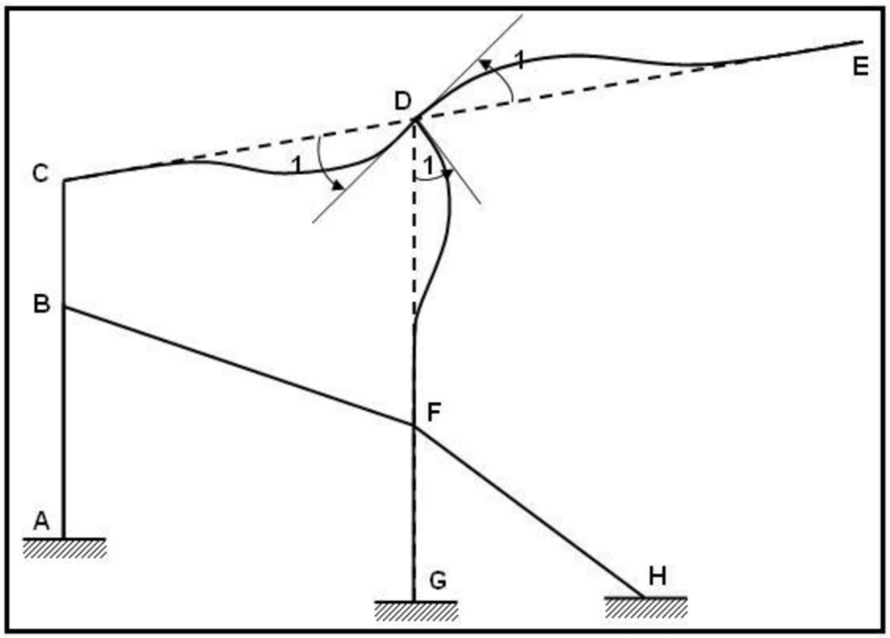
$p12 = 0$

$p13 = 0$

$p14 = 0$

Tercera columna matriz A

$q3 = 1\ ;\ qi = 0\ ; i \neq 3$



$p1 = 0$

$p2 = 0$

$p3 = 0$

$p4 = 0$

$p5 = 0$

$p6 = 1$

$p7 = 0$

$p8 = 1$

$p9 = 0$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

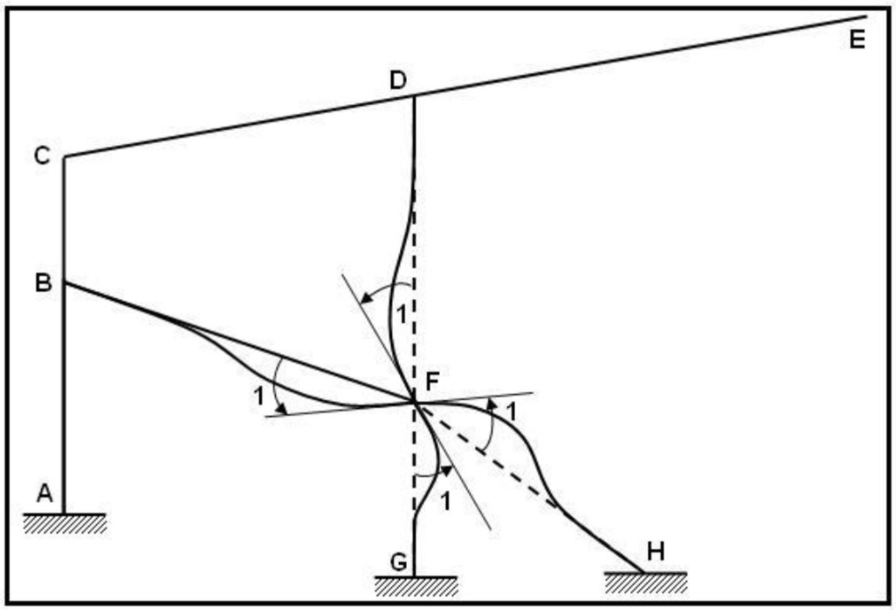
$p12 = 0$

$p13 = 0$

$p14 = 0$

Cuarta columna matriz A

$q4 = 1\,;\ qi = 0\,;i \neq 4$



$p1 = 0$

$p2 = 0$

$p3 = 0$

$p4 = 0$

$p5 = 0$

$p6 = 0$

$p7 = 1$

$p8 = 0$

$p9 = 0$

$p10 = 1$

$p11 = 0$

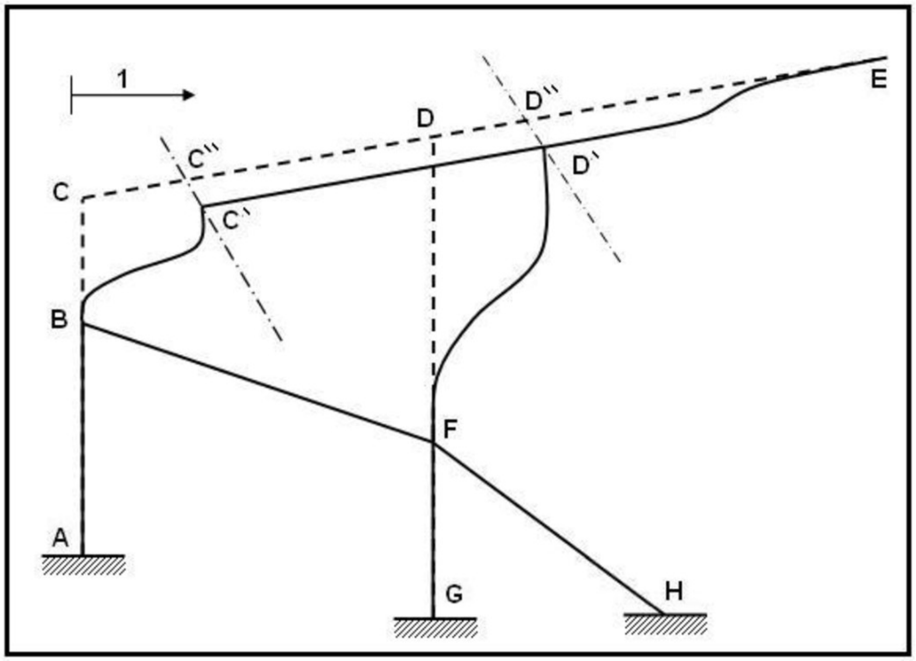
$p12 = 1$

$p13 = 0$

$p14 = 1$

Quinta columna matriz A

$q5 = 1\,;\; qi = 0\,; i \neq 5$



$p1 = 0$

$p2 = 1$

$p3 = \frac{1}{4}$

$p4 = \frac{1}{4}$

$p5 = 0$

$p6 = 0$

$p7 = \frac{1}{10}$

$p8 = \frac{1}{10}$

$p9 = 0$

$p10 = 0$

$p11 = 0$

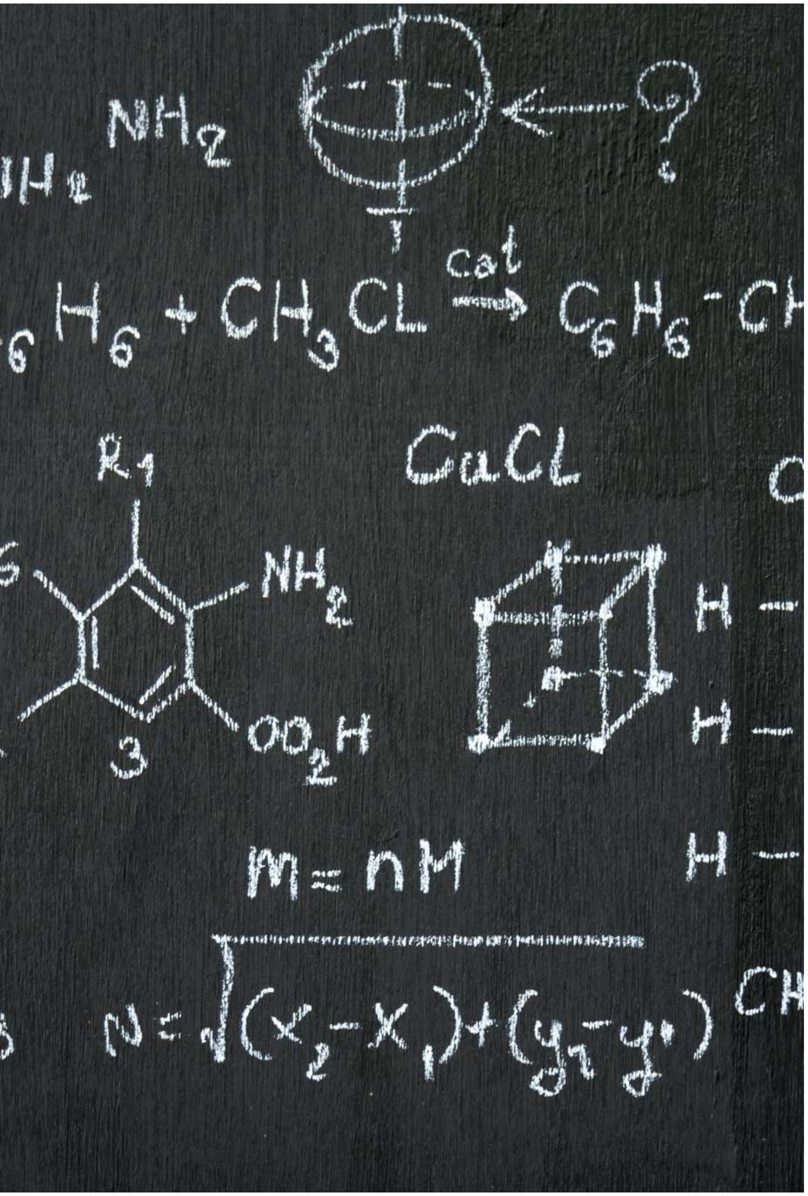
$p12 = 0$

$p13 = 0$

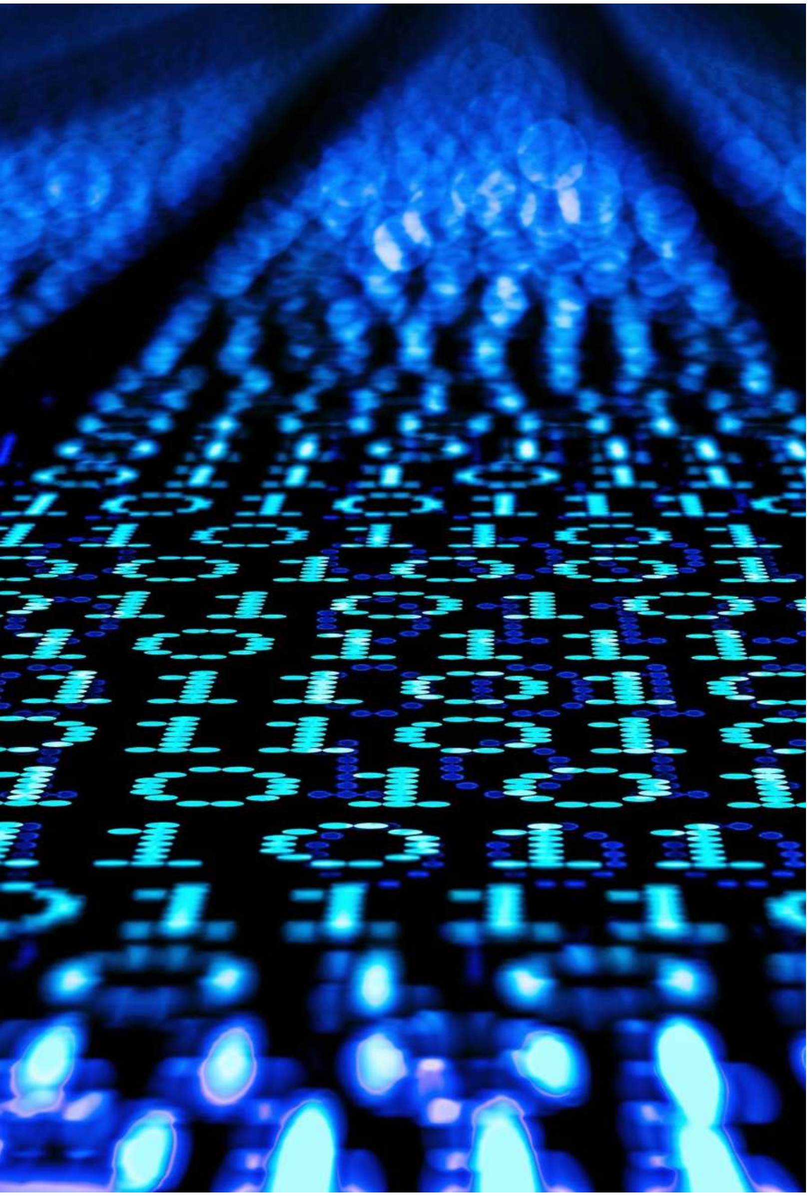
$p14 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz “A”



Cálculo de matriz de rigidez de la estructura por medio de la matriz “A”



Matriz de Rigidez

$$K = A^t * k * A$$

Donde **K** es la matriz de rigidez de la estructura; **A** es la matriz de compatibilidad de deformaciones; **k** es la matriz que está conformada por las matrices de rigidez de cada uno de los elementos de la estructura colocados en la diagonal.

Ejercicio

Ejercicio

Para la estructura, presentada a la izquierda de la figura 1, cuyos elementos son axialmente rígidos, se pide calcular la matriz de rigidez, utilizando el sistema de coordenadas Q − q indicadas a la derecha de la figura 1. En la figura 2 se presenta el sistema de coordenadas de los elementos P - p y la numeración de los elementos con los cuales se halló la matriz A.

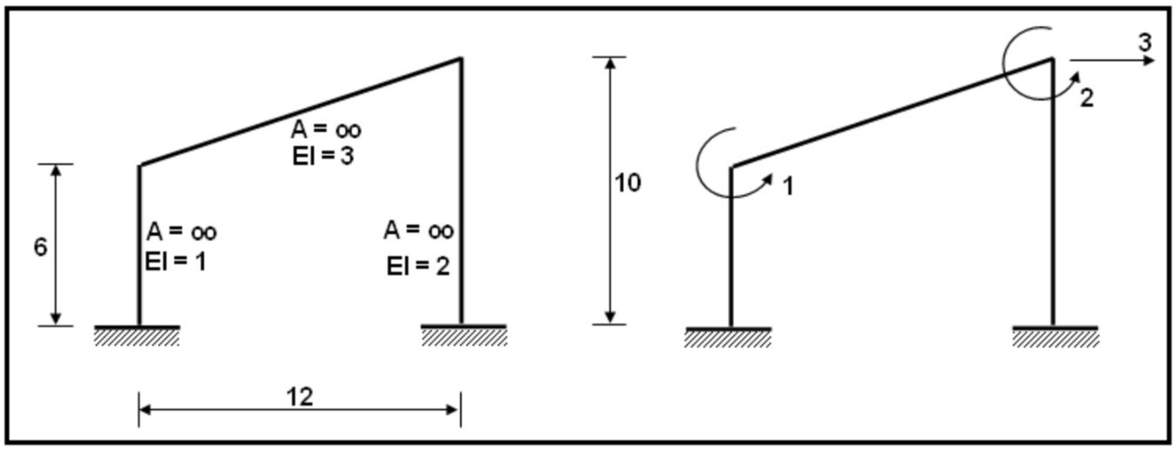


Figura 1

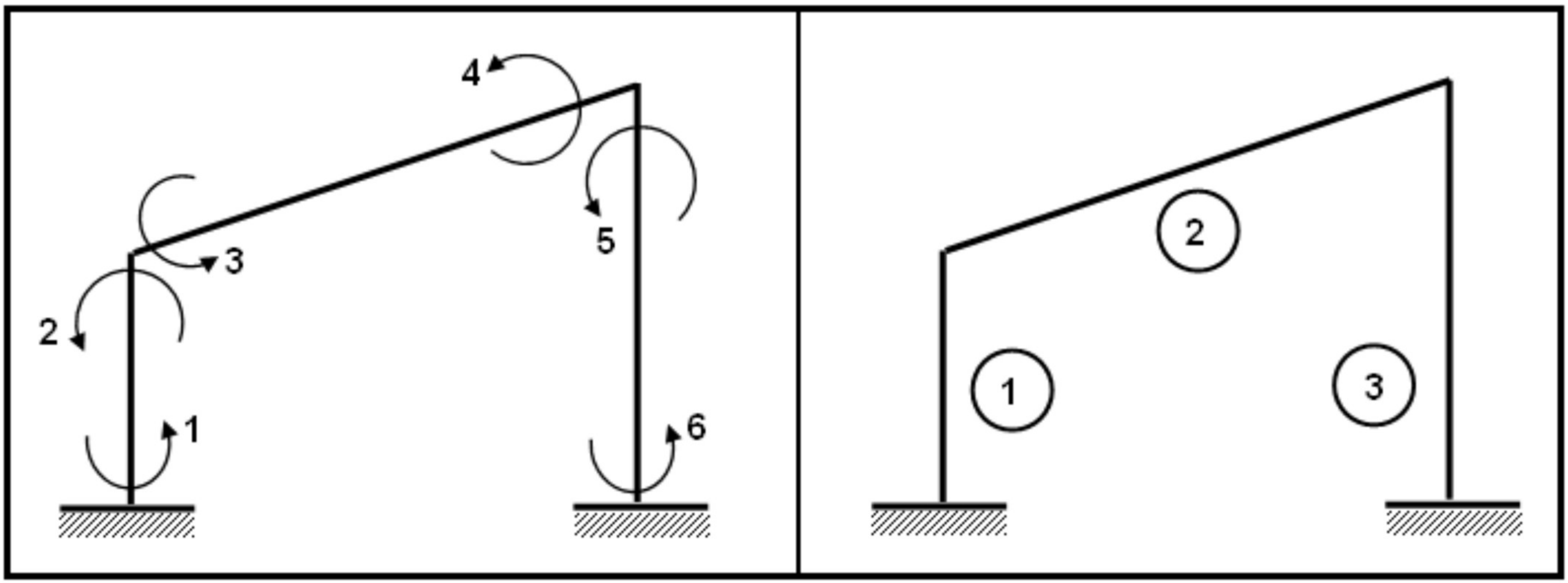
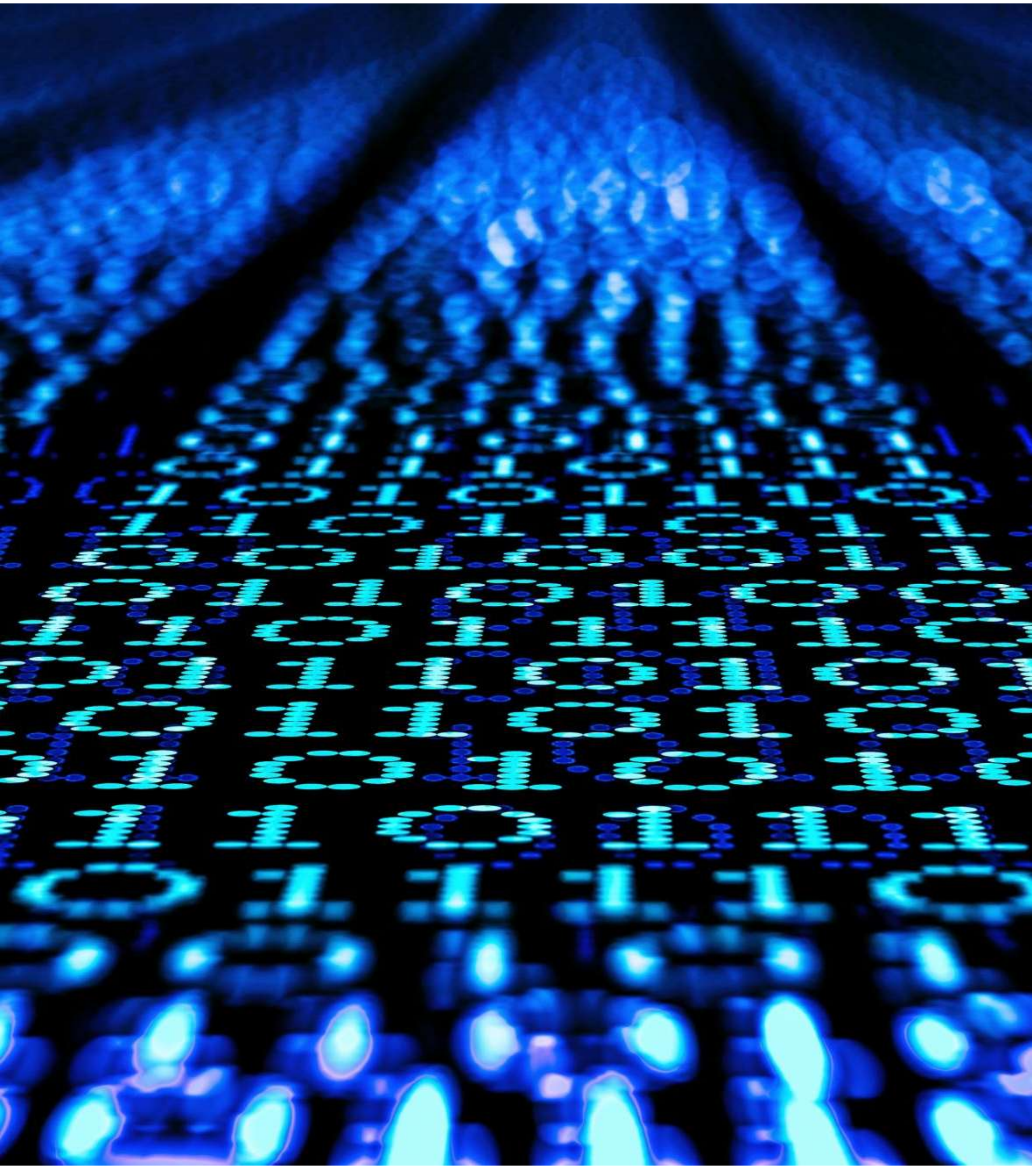
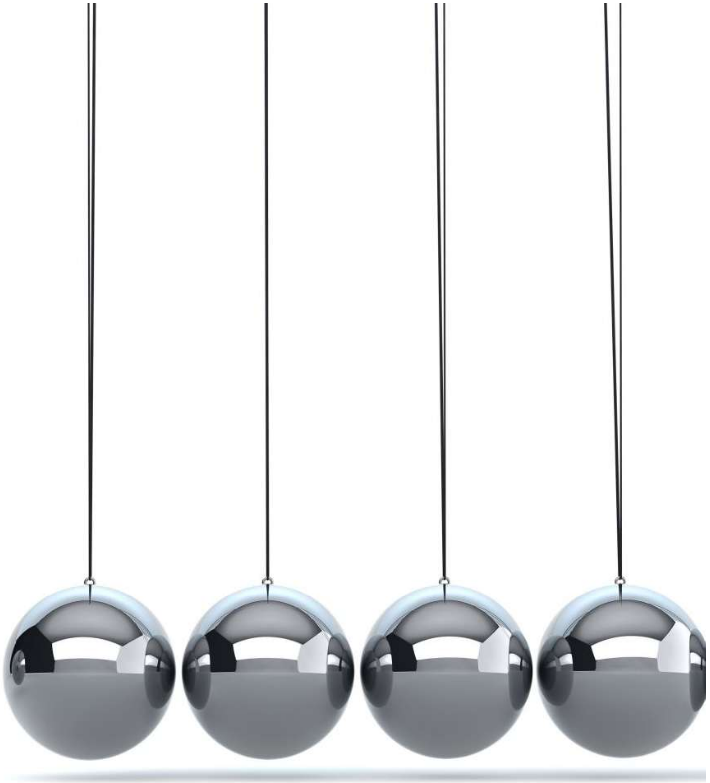


Figura 2



Matriz de Colocación



¿Qué es la matriz de colocación?

La matriz de colocación se utiliza para trasladar o colocar la relación fuerza deformación del elemento en ejes globales a las dimensiones de la estructura.

Por ejemplo, en barras la dimensión de la matriz de rigidez es de 4x4 sin embargo la matriz de rigidez de la estructura es de dimensión NxN.

La matriz de colocación convierte la matriz del elemento de 4x4 en una matriz de NxN situando los coeficientes de rigidez adecuadamente dentro de la matriz resultante.

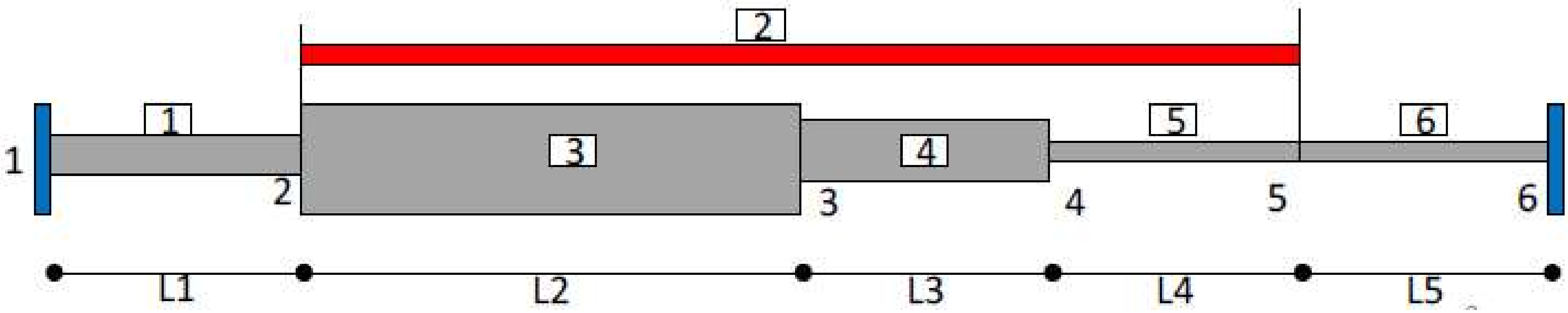
¿Qué es la matriz de colocación?

El objetivo de esta traslación de dimensiones es que la matriz de rigidez, el vector de fuerzas y el vector de fuerzas de empotramiento de la estructura se las obtenga sumando las matrices de los elementos.

Se requiera una matriz que traslade o coloque los GDL del elemento situados correctamente en la relación fuerza deformación de la estructura y viceversa.

¿Qué es la matriz de colocación?

Por ejemplo, la relación fuerza deformación del elemento 2 en la estructura mostrada es:



$$\begin{bmatrix} F22 \\ F52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k2 & -k2 \\ -k2 & k2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u2 \\ u5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Femp22 \\ Femp52 \end{bmatrix}$$

¿Qué es la matriz de colocación

Los grados de libertad de la estructura son 6 por lo tanto la matriz de rigidez de la estructura es de dimensión 6x6. Para convertir los GDL de la estructura a los de los elementos se necesita una matriz L.

$$\begin{bmatrix} u2 \\ u5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{bmatrix}$$

$$L := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las filas de la matriz de colocación representan los grados de libertad que tiene el elemento. Las columnas de la matriz de colocación representan los grados de libertad totales de la estructura analizada.

¿Qué es la matriz de colocación?

La matriz de colocación que convierte la dimensión del elemento en el de la estructura es:

$$L^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u2 \\ u5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ u2 \\ 0 \\ 0 \\ u5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Relaciones para transformar tamaños de vectores y matrices utilizando la matriz de colocación

Por lo tanto, se tiene las siguientes relaciones:

$$U_E = L^T * U_e$$
$$U_e = L * U_E$$

Donde:

U_E: Desplazamientos en dimensiones de la estructura (Total de grados de libertad)

U_e: Desplazamientos en dimensiones del elemento (Grados de libertad del elemento)

L: Matriz de colocación

L^T: Matriz de colocación traspuesta.

Relaciones para transformar tamaños de vectores y matrices utilizando la matriz de colocación

Por lo tanto, se tiene las siguientes relaciones:

$$K_E = L^T * K_e * L$$

Donde:

K_E: Matriz de rigidez en dimensiones de la estructura (Total de grados de libertad)

K_e: Matriz de rigidez en dimensiones del elemento (Grados de libertad del elemento)

L: Matriz de colocación

L^T: Matriz de colocación traspuesta.

Relaciones para transformar tamaños de vectores y matrices utilizando la matriz de colocación

Por lo tanto, se tiene las siguientes relaciones:

$$F_E = L^T * F_e$$
$$Femp_E = L^T * Femp_e$$

Donde:

F_E: Fuerzas en nudos en dimensiones de la estructura (Total de grados de libertad)

F_e: Fuerzas en nudos en dimensiones del elemento (Grados de libertad del elemento)

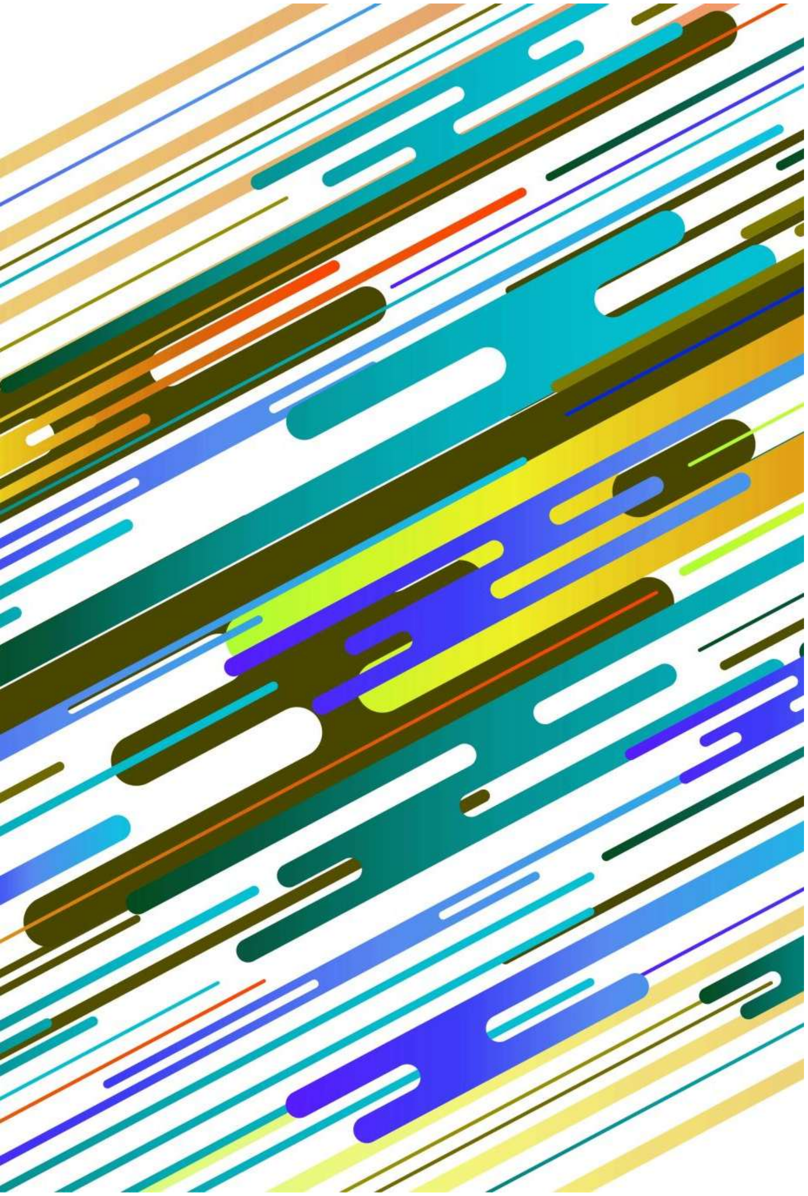
$Femp_E$: Fuerzas de empotramiento en dimensiones de la estructura (Total de grados de libertad)

$Femp_e$: Fuerzas de empotramiento en dimensiones del elemento (Grados de libertad del elemento)

L^T: Matriz de colocación traspuesta.

Resumen de relaciones de la matriz de colocación

Relaciones de la matriz de colocación
De tamaño de elemento a tamaño de la estructura
$[F_E] = [L]^T * [F_e]$
$[\mu_E] = [L]^T * [\mu_e]$
$[Femp_E] = [L]^T * [Femp_e]$
$[K_E] = [L]^T * [K_e] * [L]$



Análisis Matricial de Armaduras

Armaduras

Los elementos que forman parte una armadura son los mismos que los ya estudiados en barras pues están sometidos únicamente a cargas axiales.

Las tres suposiciones en armaduras son:

1. Los elementos de la armadura están conectados en los extremos y son rectos.
2. Las conexiones entre elementos son simples (sin capacidad de transmitir momentos).
3. Cargas aplicadas únicamente en los extremos (nodos).

Como resultado de estas suposiciones las fuerzas internas en los elementos son axiales las mismas que pueden ser tracción o compresión.

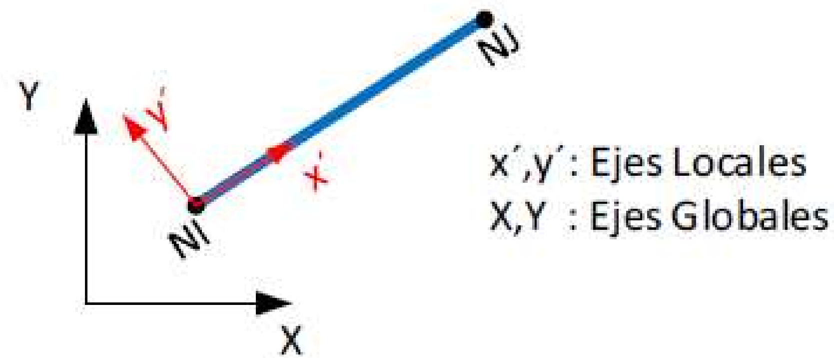
Armaduras

En armaduras, los elementos pueden estar orientados en cualquier dirección.

Los ejes locales de cada elemento no necesariamente coinciden con los ejes globales de la estructura.

Los ejes locales de un elemento están posicionados a lo largo del elemento y perpendicular al mismo.

El nodo inicial y final dictarán la dirección del eje X´.



Armaduras

Resulta conveniente establecer la relación fuerza-deformación, es decir, la matriz de rigidez en ejes locales.

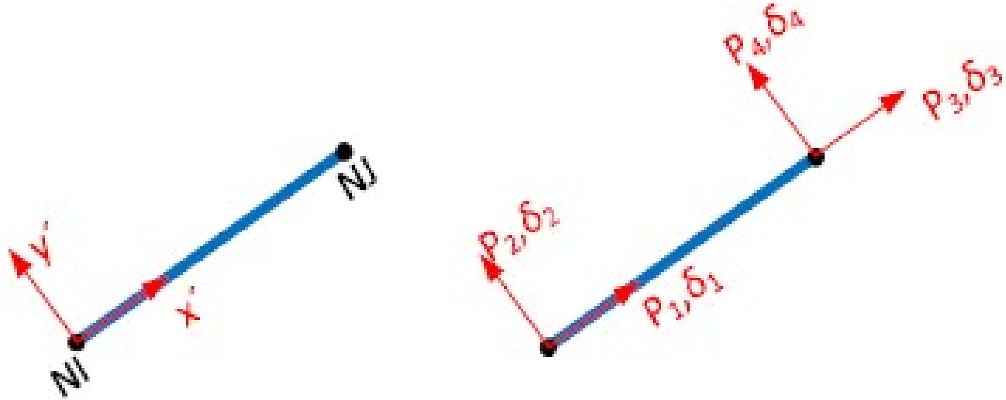
Una vez que se encuentre esta relación, es necesario transformar las relaciones fuerza deformación de cada elemento a un sistema de referencia común.

Los elementos de una armadura están sometidos únicamente a cargas axiales.

Un elemento de una armadura ahora tiene dos grados de libertad por nodo por lo que es necesario expandir la relación fuerza deformación de un elemento de 2GDL a un elemento de 4GDL.

Relación Fuerza-Deformación en Armaduras

La relación fuerza-deformación en ejes locales (P-δ) de un elemento de una armadura es:



$$[P] = [k] \cdot [\delta]$$

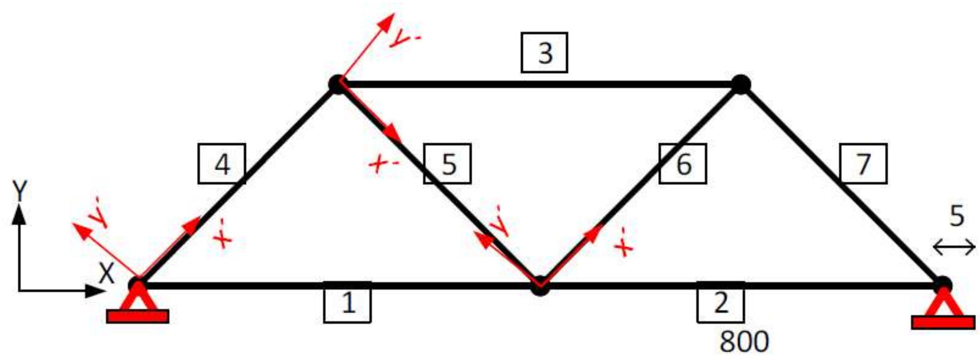
$$k = \frac{E \cdot A}{L}$$

$$\begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & -\left(\frac{E \cdot A}{L}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{E \cdot A}{L}\right) & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta 1 \\ \delta 2 \\ \delta 3 \\ \delta 4 \end{bmatrix}$$

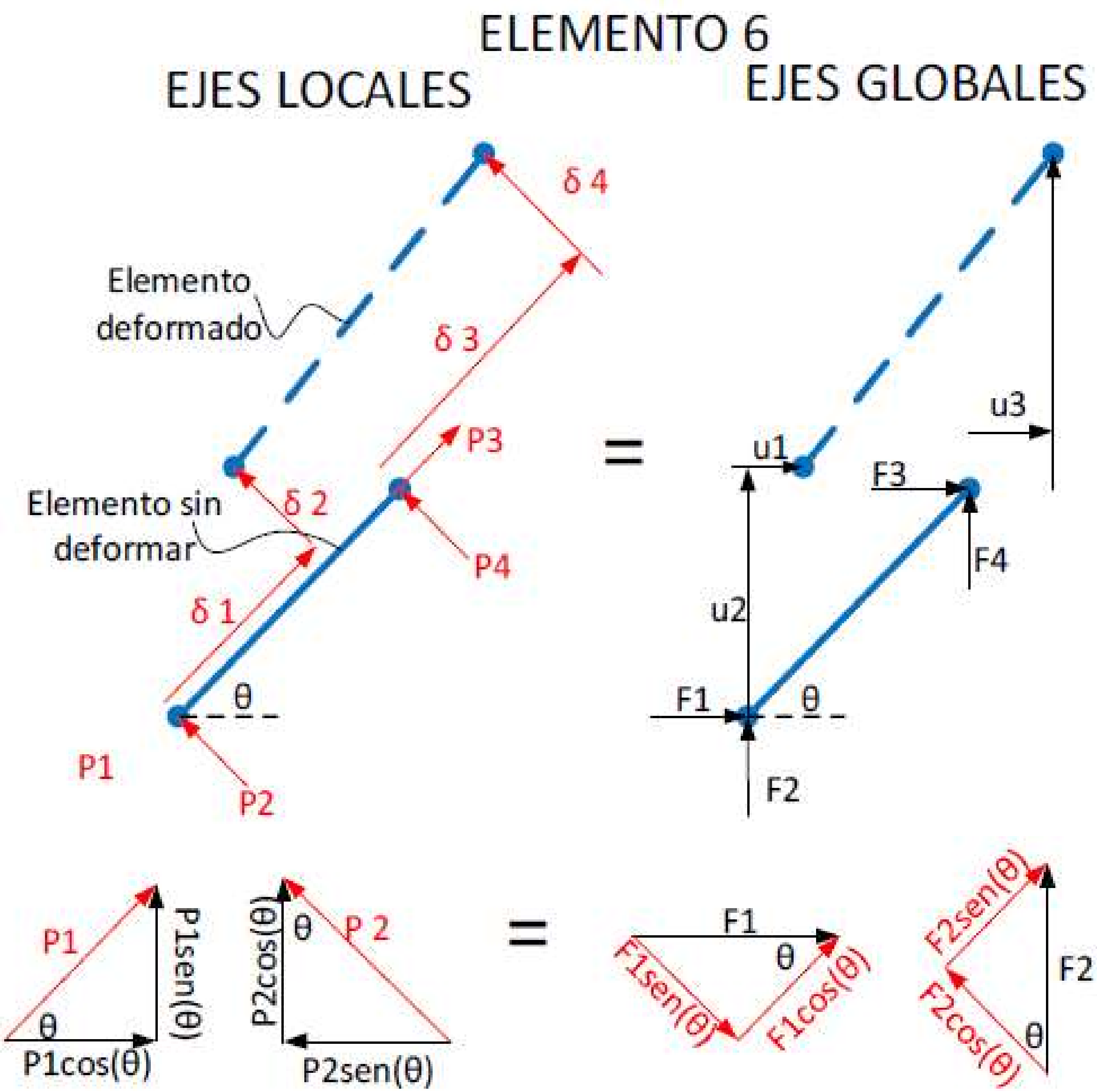
Transformación de coordenadas

La transformación de coordenadas de ejes locales a globales y viceversa se la hace analizando una armadura como se muestra en la figura.

Para establecer la relación entre ejes locales y globales se analiza el elemento 6 de la estructura mostrada.



Se analiza la relación de las fuerzas y las deformaciones en ejes locales y globales en el elemento en su posición original y deformada.



Transformación de coordenadas

Los dos sistemas en ejes locales y ejes globales representan lo mismo.

Se puede establecer relaciones entre los dos sistemas

Transformación de coordenadas

Las fuerzas en los ejes locales se igualan a las fuerzas en ejes globales descompuestas en ejes locales:

$$P1 = F1 \cdot cos(\theta) + F2 \cdot sen(\theta) \qquad P2 = -F1 \cdot sen(\theta) + F2 \cdot cos(\theta)$$

$$P3 = F3 \cdot cos(\theta) + F4 \cdot sen(\theta) \qquad P4 = -F3 \cdot sen(\theta) + F4 \cdot cos(\theta)$$

La relación matricialmente se la expresaría de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) & 0 & 0 \\ -sen(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & sen(\theta) \\ 0 & 0 & -sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \end{bmatrix}$$

Transformación de coordenadas

$$\beta = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) & 0 & 0 \\ -sen(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & sen(\theta) \\ 0 & 0 & -sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$[P] = [\beta] \cdot [F]$$

Donde

$[\beta]$: Matriz de transformación de coordenadas globales a coordenadas locales

De la misma manera se puede establecer la relación de desplazamientos en coordenadas globales con coordenadas locales

$$[\delta] = [\beta] \cdot [u]$$

Transformación de coordenadas

Las fuerzas en los ejes locales se igualan a las fuerzas en ejes globales descompuestas en ejes locales:

$$F1 = P1 \cdot cos(\theta) - P2 \cdot sen(\theta) \qquad F2 = P1 \cdot sen(\theta) + P2 \cdot cos(\theta)$$

$$F3 = P3 \cdot cos(\theta) - P4 \cdot sen(\theta) \qquad F4 = P3 \cdot sen(\theta) + P4 \cdot cos(\theta)$$

La relación matricialmente se la expresaría de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & -sen(\theta) \\ 0 & 0 & sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{bmatrix}$$

Transformación de coordenadas

$$\beta^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & -sen(\theta) \\ 0 & 0 & sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$[F] = [\beta]^{\mathrm{T}} \cdot [P]$$

Donde

$[\beta]^T$: Matriz traspuesta de matriz de transformación de coordenadas globales a coordenadas locales

De la misma manera se puede establecer la relación de desplazamientos en coordenadas globales con coordenadas locales

$$[u] = [\beta]^{\mathrm{T}} \cdot [\delta]$$

Transformación de coordenadas

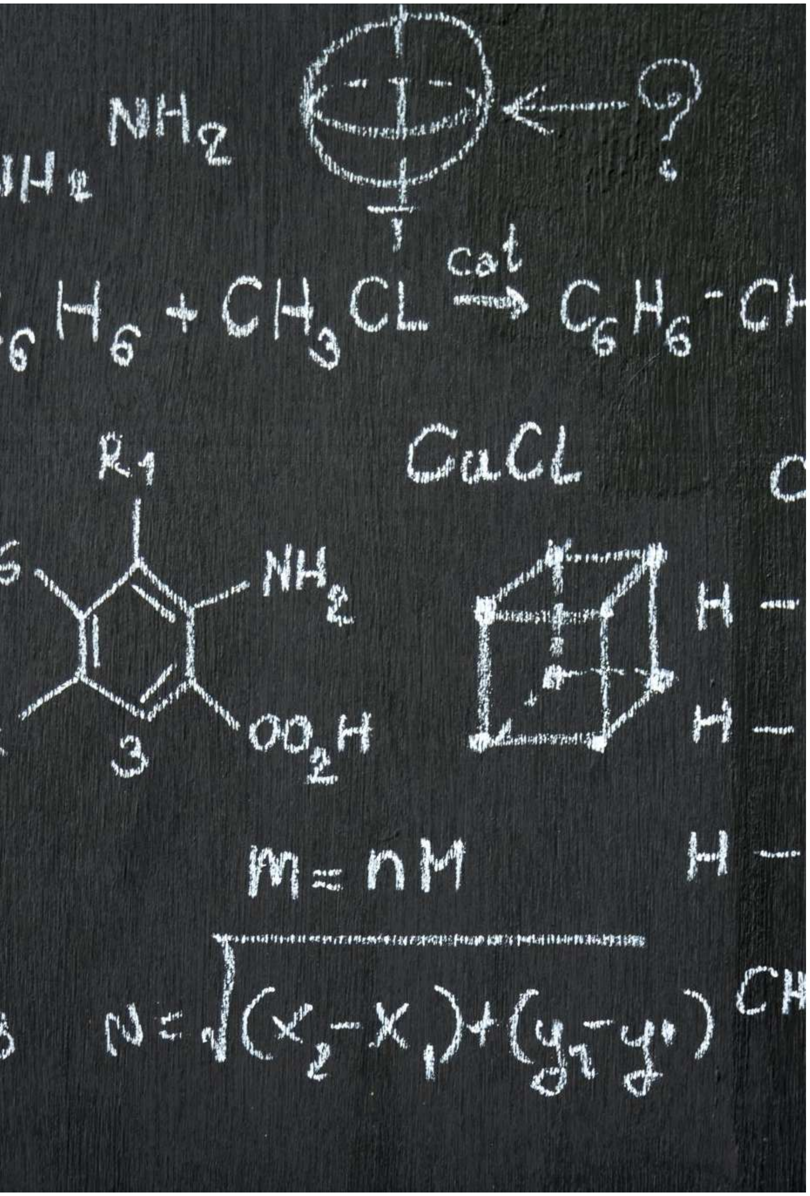
Por lo tanto, se demuestra que la matriz inversa de la matriz de transformación es igual a la matriz traspuesta:

$$[\beta]^{-1} = [\beta]^{T}$$

Eso también se lo pudo haber establecido reconociendo que la matriz β es ortonormal, pues su determinante es igual a 1

Resumen de relaciones de transformación de coordenadas.

Relaciones para transformación de coordenadas	
De ejes locales de elemento a ejes globales de la estructura	**De ejes globales de estructura a ejes locales de elemento**
$[F] = [\beta]^T * [P]$	$[P] = [\beta] * [F]$
$[\mu] = [\beta]^T * [\delta]$	$-$
$[Femp] = [\beta]^T * [Pemp]$	$-$
$[K] = [\beta]^T * [k] * [\beta]$	$-$



Matrices y vectores en ejes globales y en dimensiones de la estructura

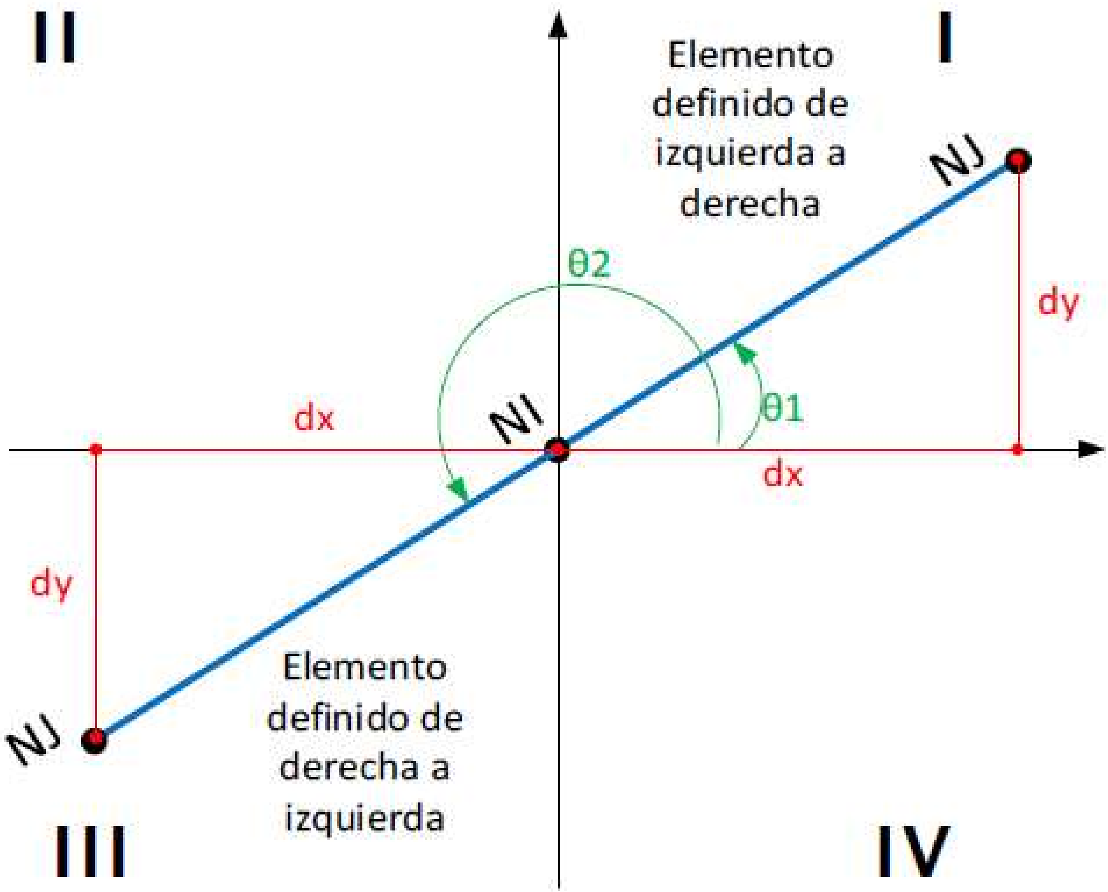
En resumen, si se desea trabajar con los vectores o matrices en ejes globales y en las dimensiones de la estructura se debe realizar lo siguiente:

1. Se debe transformar las coordenadas: de ejes locales de elemento a ejes globales de la estructura.
2. Se debe utilizar la matriz de colocación para transformar los vectores y matrices de dimensiones de elemento a dimensiones de estructura.

Ángulo del Elemento

Es muy importante tomar en cuenta el ángulo del elemento a analizar pues se pueden cometer errores.

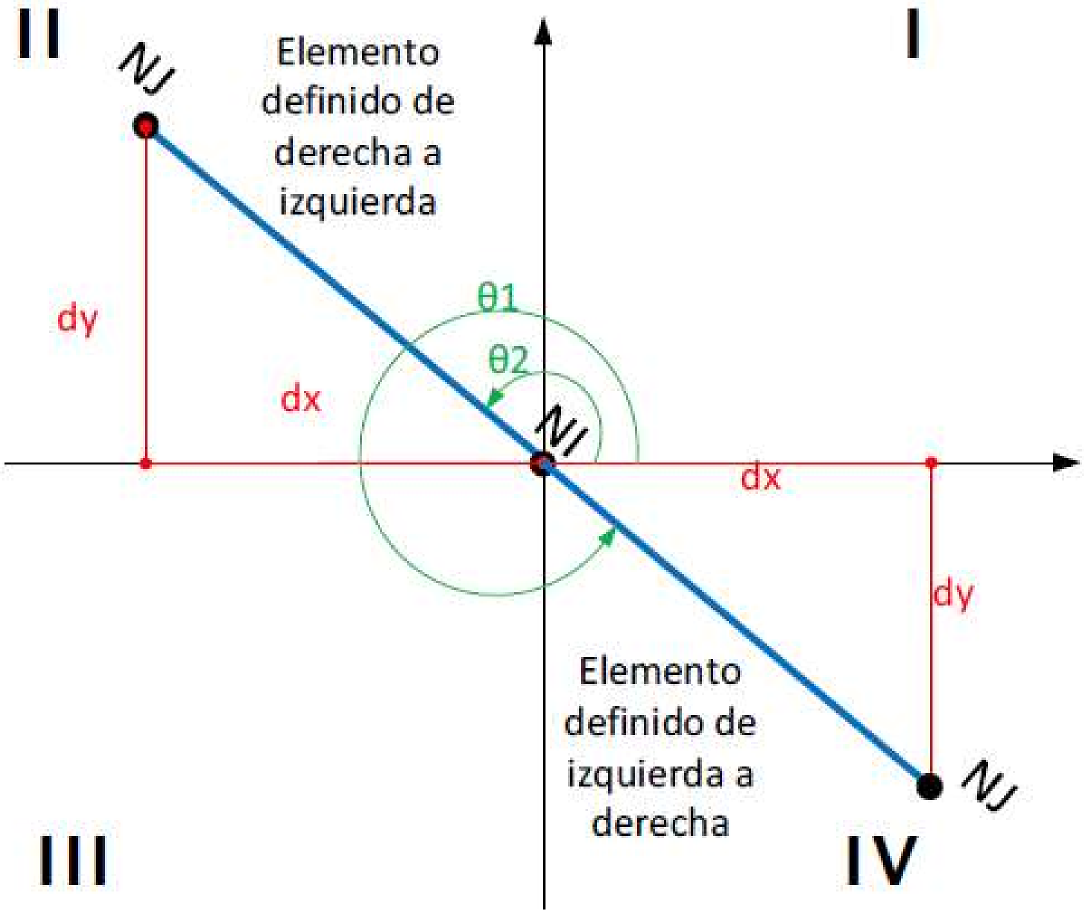
- Los errores ocurren generalmente en ciertos lenguajes de programación y calculadoras que no entregan como resultado el cuadrante del ángulo.
- Para obtener el ángulo y la dirección (eje x´) de manera correcta es necesario establecer el cuadrante donde se encuentra.
- El siguiente ejemplo ilustra el problema que puede suscitarse. Se tiene un elemento cuyo nodo inicial (NI) y final (NJ) son definidos de izquierda a derecha y otro de derecha a izquierda.



Ángulo del elemento

Tomando como ejemplo el elemento con pendiente positivo, si se calcula el ángulo con la función “arc tan” en cualquiera de los dos casos el ángulo es de 45°.

Sin embargo, los signos de cos(θ) y sen(θ) son distintos dependiendo como se defina el eje x´ del elemento. Los ángulos deberían ser 45 y 225.



Ángulo del elemento

- Tomando como ejemplo el elemento con pendiente negativa, si se calcula el ángulo con la función “arc tan” en cualquiera de los dos casos el ángulo es de -45°.
- Sin embargo, los signos de cos(θ) y sen(θ) son distintos dependiendo como se defina el eje x´ del elemento. Los ángulos deberían ser 135 y -45 o 315.

Ángulo del elemento

La solución a este problema es obtener directamente los valores de cos(θ) y sen(θ) sin calcular el ángulo utilizando las distancias ortogonales y la longitud del elemento.

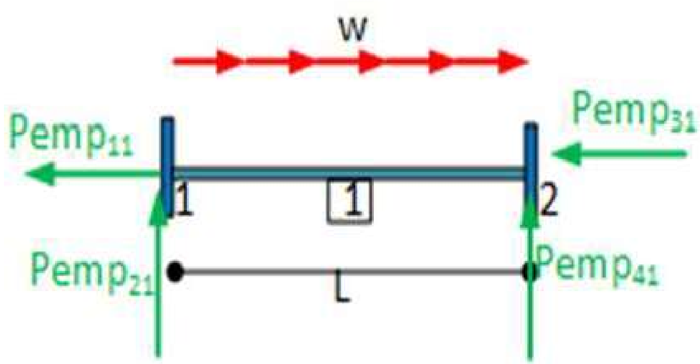
$$cos(\theta) = \frac{dx}{L}$$

$$sen(\theta) = \frac{dy}{L}$$

Fuerzas de empotramiento

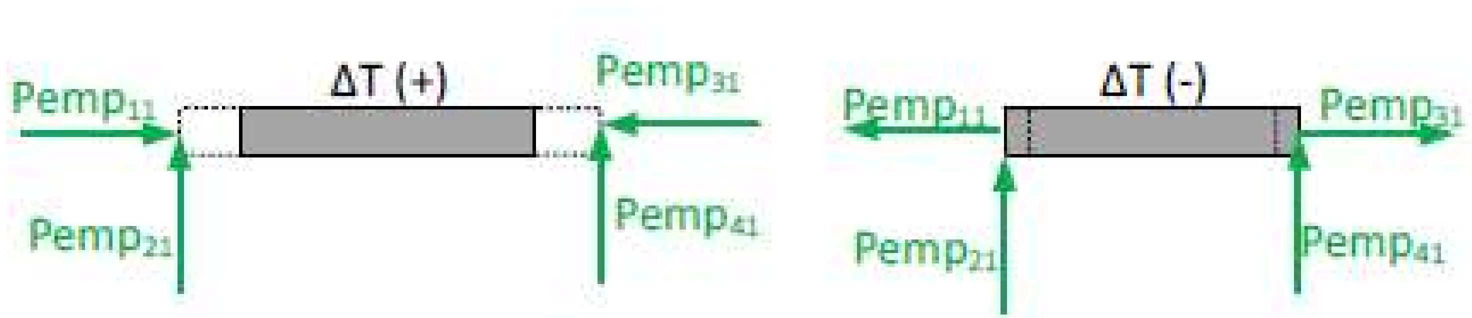
Las fuerzas de empotramiento en armaduras son las mismas que las ya estudiadas en barras con la diferencia que una vez obtenidas deben ser transformadas a coordenadas globales.

Las fuerzas de empotramiento se las obtiene primero en ejes locales considerando en este caso 2 GDL por nodo. Es decir, se aumenta un grado de libertad traslacional.



$$\begin{bmatrix} Pemp11 \\ Pemp21 \\ Pemp31 \\ Pemp41 \end{bmatrix} = \frac{w \cdot L}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fuerzas de empotramiento – Variación de temperatura



$$\begin{bmatrix} Pemp11 \\ Pemp21 \\ Pemp31 \\ Pemp41 \end{bmatrix} = E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Análisis Matricial de Vigas y Pórticos

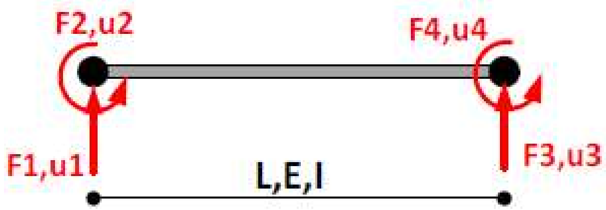
Vigas

Vigas y Pórticos

Los elementos que se los distinguirá en dos grupos: vigas y pórticos tienen un papel fundamental en el análisis de estructuras.

En el caso de vigas se asumirá que no tienen fuerzas axiales internas. Sin embargo, poseen rigidez a flexión.

Las vigas tienen 2 GDL por nodo y sus ejes locales coinciden con ejes globales. Las propiedades necesarias para definir su rigidez son: E, I , L



Se definen las fuerzas como F y u pues los ejes locales coinciden con ejes globales

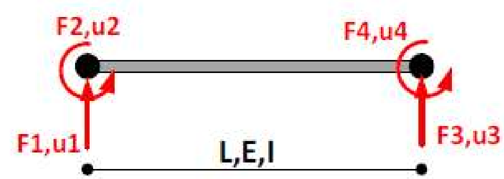
Matriz de Rigidez de Viga

Al igual que en el caso de barras, es necesario obtener la relación fuerza-deformación en vigas.

En este caso se requiere obtener una nueva matriz de rigidez que considere flexión.

La matriz de rigidez se la obtiene utilizando al igual que lo hecho antes, conceptos de mecánica de materiales, conceptos de rigidez y equilibrio.

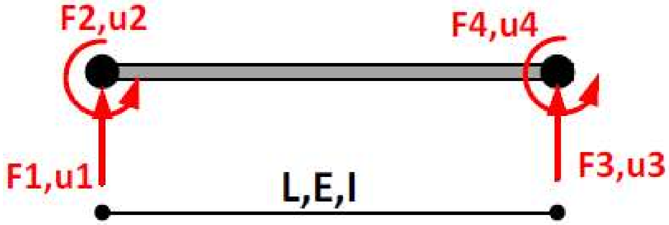
$$\begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k11 & k12 & k13 & k14 \\ k21 & k22 & k23 & k24 \\ k31 & k32 & k33 & k34 \\ k41 & k42 & k43 & k44 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Femp1 \\ Femp2 \\ Femp3 \\ Femp4 \end{bmatrix}$$



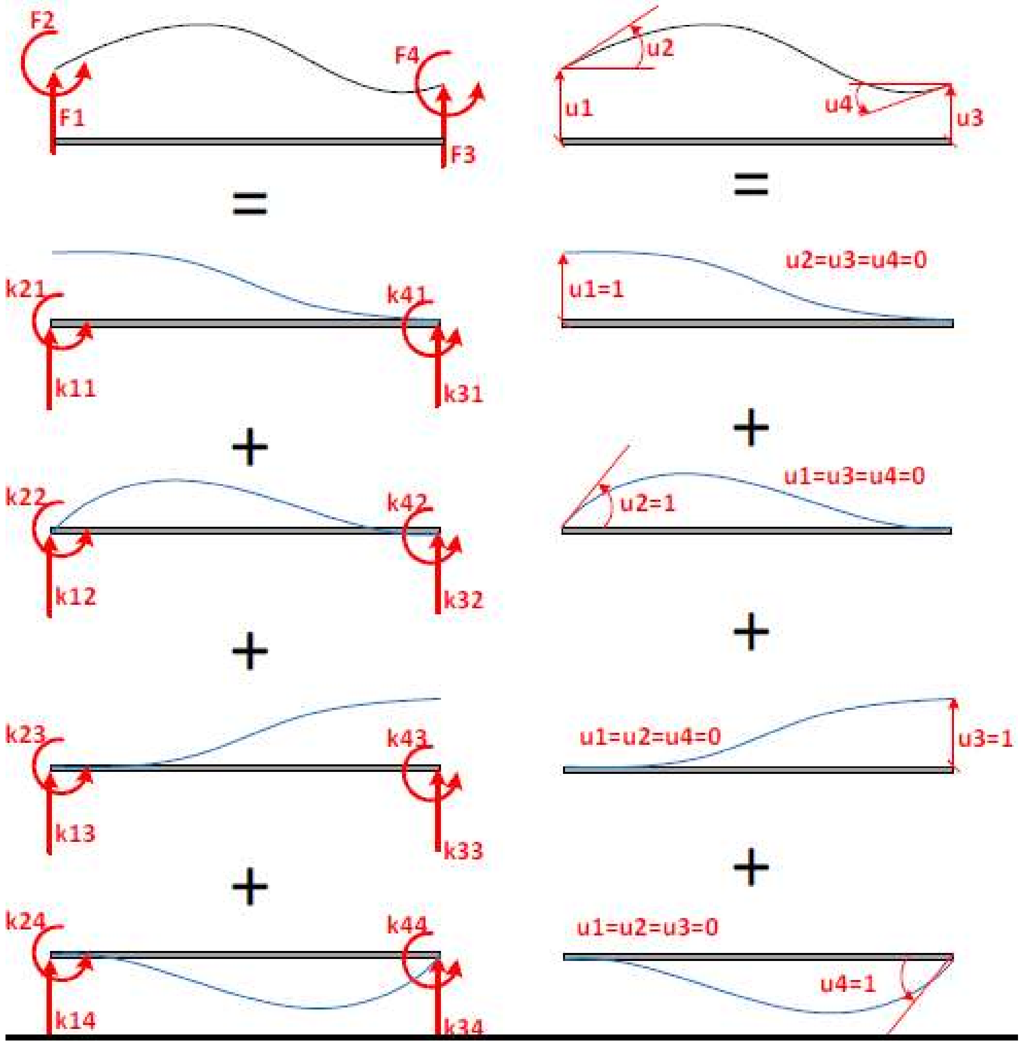
Los elementos kij se los conoce como coeficientes de rigidez.

Matriz de Rigidez de Viga

Analizando una viga con todas sus posibles deformaciones



La deformada total se puede obtener haciendo una superposición de efectos aplicando deformaciones en cada grado de libertad.



Descomposición Deformación Viga

Si la deformación aplicada es unitaria la fuerza necesaria representa la rigidez

Kij

i → GDL

j → GDL con desplazamiento unitario

Matriz de Rigidez de Viga

Al descomponer las fuerzas en sus 4 posibles deformaciones se puede establecer que:

$$F1 = k11 \cdot u1 + k12 \cdot u2 + k13 \cdot u3 + k14 \cdot u4$$
$$F2 = k21 \cdot u1 + k22 \cdot u2 + k23 \cdot u3 + k24 \cdot u4$$
$$F3 = k31 \cdot u1 + k32 \cdot u2 + k33 \cdot u3 + k34 \cdot u4$$
$$F4 = k41 \cdot u1 + k42 \cdot u2 + k43 \cdot u3 + k44 \cdot u4$$

En este punto se ha aplicado también una deformación unitaria en cada GDL . Las fuerzas necesarias para producir dicha deformación son la rigidez (concepto).

Matriz de Rigidez de Viga

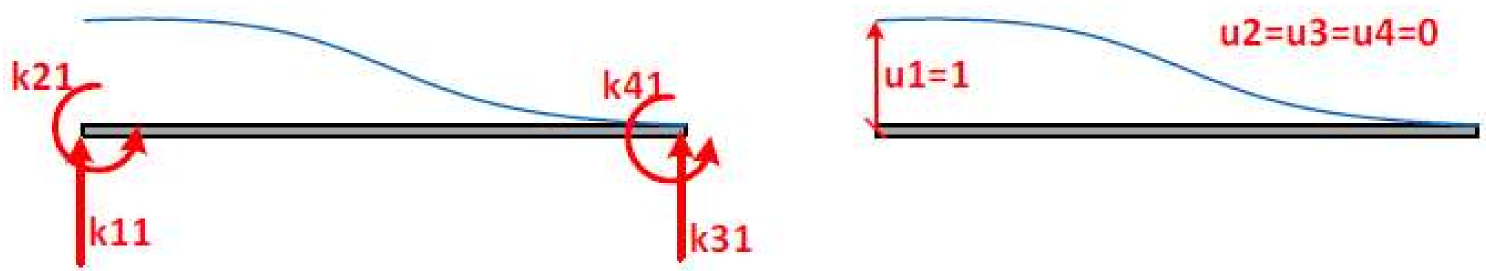
Para encontrar la matriz de rigidez se debe analizar cada caso de deformación:

- u1=1, u2=u3=u4=0
- u2=1, u1=u3=u4=0
- u3=1, u1=u2=u4=0
- u4=1, u1=u2=u3=0

Las fuerzas necesarias para producir cada deformación son una columna de la matriz de rigidez de la viga.

Analizando cada caso deformación.

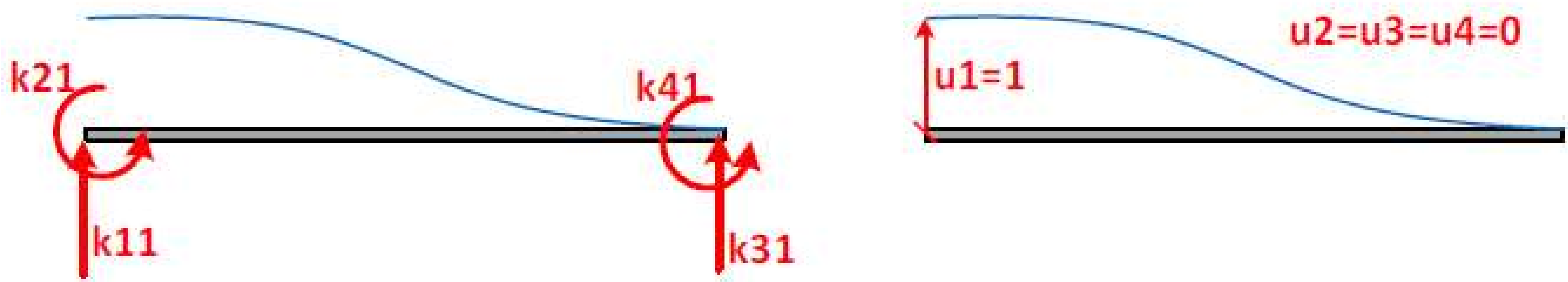
Caso 1: u1=1, u2=u3=u4=0



Se requiere obtener las fuerzas k11, k21, k31 y k41 que generan la deformación mostrada.

Se aplica el método de doble integral y equilibrio.

Caso 1: u1=1, u2=u3=u4=0



$$M = \frac{d^2\ y}{dx^2} \cdot EI = k11 \cdot x - k21$$ **Momento**

$$EI \cdot \theta = k11 \cdot \frac{x^2}{2} - k21 \cdot x + A$$ **Giro**

$$EI \cdot y = k11 \cdot \frac{x^3}{6} - k21 \cdot \frac{x^2}{2} + A \cdot x + B$$ **Desplazamiento**

Las condiciones de borde para el primer caso son:

$x = 0$	$x = L$
$\theta = u2 = 0$	$\theta = u4 = 0$
$y = u1 = 1$	$y = u3 = 0$

Con las condiciones x=0, se tiene que:

$A = 0$ $\qquad$ $B = EI$

Con las condiciones x=L, se tiene dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$0 = k11 \cdot \frac{L^2}{2} - k21 \cdot L$$ **Giro**

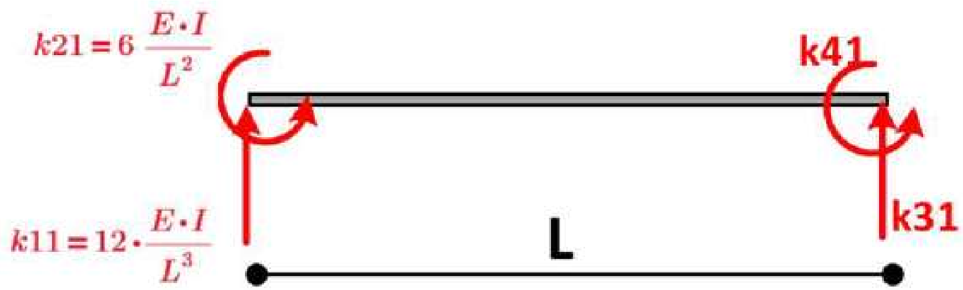
$$0 = k11 \cdot \frac{L^3}{6} - k21 \cdot \frac{L^2}{2} + EI$$ **Desplazamiento**

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$k11 = \frac{12\ EI}{L^3} \qquad k21 = \frac{6\ EI}{L^2}$$

Caso 1: u1=1, u2=u3=u4=0

Una vez encontrado k11 y k21 se aplica equilibrio para obtener k31 y k41



$$\sum M = 0$$

$$-\frac{12\,EI}{L^3} \cdot L + \frac{6\,EI}{L^2} + k41 = 0$$

$$k41 = \frac{6\,EI}{L^2}$$

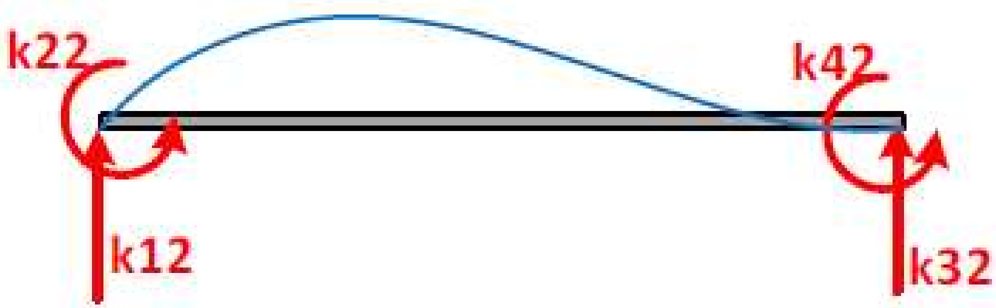
$$\sum Fy = 0$$

$$\frac{12\,EI}{L^3} + k31 = 0$$

$$k31 = -\left(\frac{12\,EI}{L^3}\right)$$

La solución del primer caso da como resultado la primera columna de la matriz de rigidez.

Caso 2: u2=1, u1=u3=u4=0



$$M = \frac{d^2\ y}{dx^2} \cdot EI = k12 \cdot x - k22$$ **Momento**

$$EI \cdot \theta = k12 \cdot \frac{x^2}{2} - k22 \cdot x + A$$ **Giro**

$$EI \cdot y = k12 \cdot \frac{x^3}{6} - k22 \cdot \frac{x^2}{2} + A \cdot x + B$$ **Desplazamiento**

Las condiciones de borde para el primer caso son:

$x = 0$ $\qquad x = L$

$\theta = u2 = 1$ $\qquad \theta = u4 = 0$

$y = u1 = 0$ $\qquad y = u3 = 0$

Con las condiciones x=0, se tiene que:

$A = EI$ $\qquad B = 0$

Con las condiciones x=L, se tiene dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$0 = k12 \cdot \frac{L^2}{2} - k22 \cdot L + EI$$ **Giro**

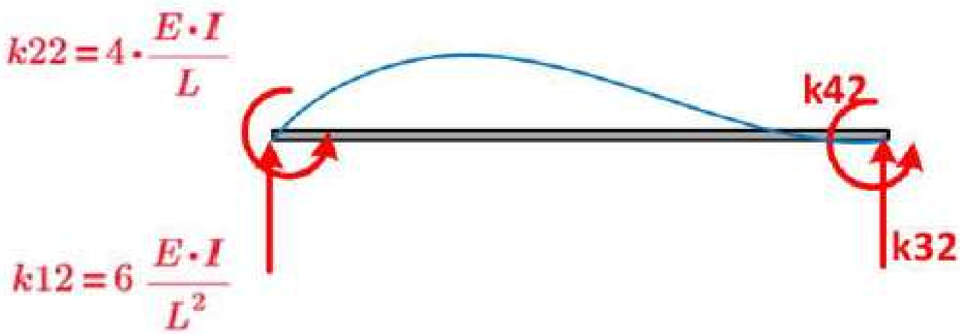
$$0 = k12\ \frac{L^3}{6} - k22 \cdot \frac{L^2}{2} + EI \cdot L$$ **Desplazamiento**

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$k12 = \frac{6\ EI}{L^2} \qquad k22 = \frac{4\ EI}{L}$$

Caso 2: u2=1, u1=u3=u4=0

Una vez encontrado k12 y k22 se aplica equilibrio para obtener k32 y k42



$$\sum M = 0$$

$$-\frac{6\ EI}{L^2} \cdot L + \frac{4\ EI}{L} + k42 = 0$$

$$k42 = \frac{2\ EI}{L}$$

$$\sum Fy = 0$$

$$\frac{6\ EI}{L^2} + k31 = 0$$

$$k32 = -\left(\frac{6\ EI}{L^2}\right)$$

La solución del segundo caso da como resultado la segunda columna de la matriz de rigidez.

Matriz de Rigidez de Viga

Resolviendo todos los casos se obtiene la matriz de rigidez

$$\begin{bmatrix} \frac{12\,EI}{L^3} & \frac{6\,EI}{L^2} & -\left(\frac{12\,EI}{L^3}\right) & \frac{6\,EI}{L^2} \\ \frac{6\,EI}{L^2} & \frac{4\,EI}{L} & -\left(\frac{6\,EI}{L^2}\right) & \frac{2\,EI}{L} \\ -\left(\frac{12\,EI}{L^3}\right) & -\left(\frac{6\,EI}{L^2}\right) & \frac{12\,EI}{L^3} & -\left(\frac{6\,EI}{L^2}\right) \\ \frac{6\,EI}{L^2} & \frac{2\,EI}{L} & -\left(\frac{6\,EI}{L^2}\right) & \frac{4\,EI}{L} \end{bmatrix}$$

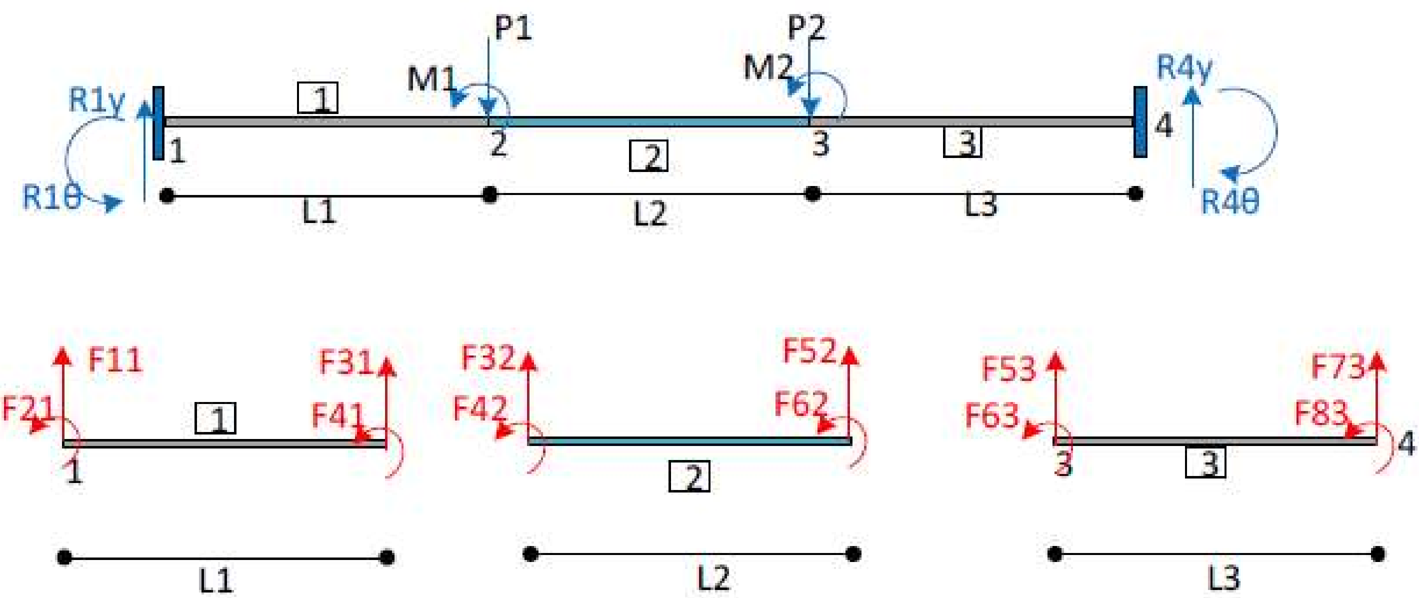
Matriz de Rigidez de Viga

La relación fuerza deformación para una viga es:

$$\begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12\,EI}{L^3} & \frac{6\,EI}{L^2} & -\left(\frac{12\,EI}{L^3}\right) & \frac{6\,EI}{L^2} \\ \frac{6\,EI}{L^2} & \frac{4\,EI}{L} & -\left(\frac{6\,EI}{L^2}\right) & \frac{2\,EI}{L} \\ -\left(\frac{12\,EI}{L^3}\right) & -\left(\frac{6\,EI}{L^2}\right) & \frac{12\,EI}{L^3} & -\left(\frac{6\,EI}{L^2}\right) \\ \frac{6\,EI}{L^2} & \frac{2\,EI}{L} & -\left(\frac{6\,EI}{L^2}\right) & \frac{4\,EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Femp1 \\ Femp2 \\ Femp3 \\ Femp4 \end{bmatrix}$$

Ensamblaje de Matrices de Vigas

El ensamble de matrices en vigas lleva el mismo concepto anteriormente revisado. La suma de fuerzas internas en cada nodo es igual a las fuerzas externas.



$$\begin{bmatrix} F11 \\ F21 \\ F31 \\ F41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^3} & 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^2} & -\left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^3}\right) & 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^2} \\ 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^2} & 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L1} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^2}\right) & 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L1} \\ -\left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^3}\right) & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^2}\right) & 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^3} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^2}\right) \\ 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^2} & 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L1} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L1^2}\right) & 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F32 \\ F42 \\ F52 \\ F62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^3} & 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^2} & -\left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^3}\right) & 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^2} \\ 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^2} & 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L2} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^2}\right) & 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L2} \\ -\left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^3}\right) & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^2}\right) & 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^3} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^2}\right) \\ 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^2} & 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L2} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L2^2}\right) & 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F53 \\ F63 \\ F73 \\ F83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^3} & 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^2} & -\left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^3}\right) & 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^2} \\ 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^2} & 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L3} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^2}\right) & 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L3} \\ -\left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^3}\right) & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^2}\right) & 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^3} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^2}\right) \\ 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^2} & 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L3} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L3^2}\right) & 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u5 \\ u6 \\ u7 \\ u8 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L1} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3}+\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & 0 & 0 \\
\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L1} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L1}+\frac{4\cdot E\cdot I}{L2} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3}+\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} \\
0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L2} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L2}+\frac{4\cdot E\cdot I}{L3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L3}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} F11 \\ F21 \\ F31+F32 \\ F41+F42 \\ F52+F53 \\ F62+F63 \\ F73 \\ F83 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L1} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3}+\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & 0 & 0 \\
\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L1} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L1}+\frac{4\cdot E\cdot I}{L2} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3}+\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} \\
0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L2} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L2}+\frac{4\cdot E\cdot I}{L3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L3}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \\ u7 \\ u8 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} F11 \\ F21 \\ F31+F32 \\ F41+F42 \\ F52+F53 \\ F62+F63 \\ F73 \\ F83 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L1} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3}+\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & 0 & 0 \\
\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L1} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L1}+\frac{4\cdot E\cdot I}{L2} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3}+\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} \\
0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L2} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L2}+\frac{4\cdot E\cdot I}{L3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L3}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \\ u7 \\ u8 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} Femp11 \\ Femp21 \\ Femp31+Femp32 \\ Femp41+Femp42 \\ Femp52+Femp53 \\ Femp62+Femp63 \\ Femp73 \\ Femp83 \end{bmatrix}
$$

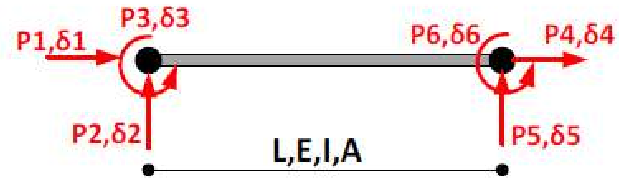
$$
\begin{bmatrix} R1y \\ R1\theta \\ P1 \\ M1 \\ P2 \\ M2 \\ R4y \\ R4\theta \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L1} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3}+\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & 0 & 0 \\
\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L1} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L1}+\frac{4\cdot E\cdot I}{L2} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3}+\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} \\
0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L2} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2}-\frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L2}+\frac{4\cdot E\cdot I}{L3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L3}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \\ u7 \\ u8 \end{bmatrix}
$$

Pórticos

Pórticos

Los elementos de pórticos son los más completos y poseen rigidez a flexión y axial.

Los elementos de un pórtico poseen 3 GDL en cada nodo y sus ejes locales no necesariamente coinciden con ejes globales.



Las fuerzas y deformaciones en este caso se definen con P y δ pues los ejes locales no coinciden con ejes globales.

Pórticos

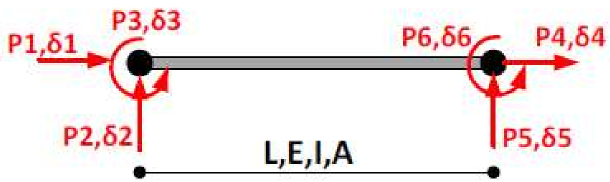
La flexión está completamente desacoplada de las fuerzas axiales. Es decir, fuerzas de flexión no generan fuerzas axiales y viceversa.

Se debe considerar nuevamente la transformación de coordenadas.

Las deformaciones en los GDL δ1 y δ4 generan fuerzas axiales.

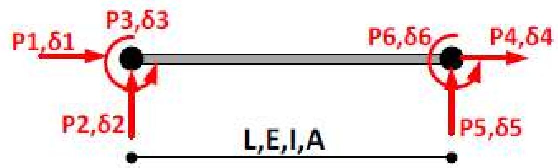
Las deformaciones en los GDL δ2, δ3 y δ5, δ6 generan fuerzas de corte y flexión.

Es así que la matriz de rigidez de un elemento de pórtico es una fusión de la matriz de rigidez de armaduras con la de vigas.



Matriz de Rigidez de Pórticos

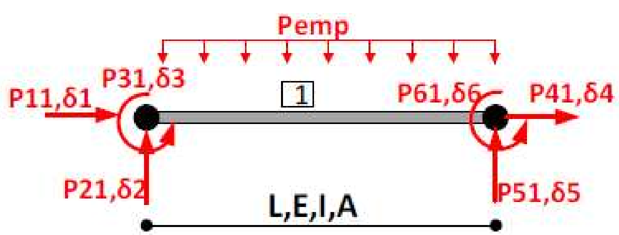
La matriz de rigidez de cada elemento será de 6x6.



$$\begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \\ P6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\cdot\frac{E\cdot I}{L^3} & 6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2} & 0 & -\left(12\cdot\frac{E\cdot I}{L^3}\right) & 6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2} \\ 0 & 6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2} & 4\cdot\frac{E\cdot I}{L} & 0 & -\left(6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2}\right) & 2\cdot\frac{E\cdot I}{L} \\ -\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(12\cdot\frac{E\cdot I}{L^3}\right) & -\left(6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2}\right) & 0 & 12\cdot\frac{E\cdot I}{L^3} & -\left(6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2}\right) \\ 0 & 6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2} & 2\cdot\frac{E\cdot I}{L} & 0 & -\left(6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2}\right) & 4\cdot\frac{E\cdot I}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta 1 \\ \delta 2 \\ \delta 3 \\ \delta 4 \\ \delta 5 \\ \delta 6 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez de Pórticos

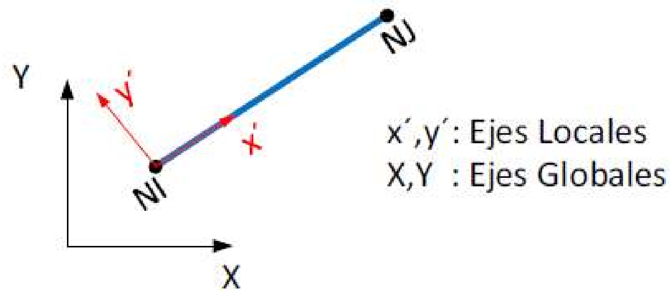
La relación fuerza-deformación en ejes locales considerando fuerzas de empotramiento (asumiendo un elemento 1)



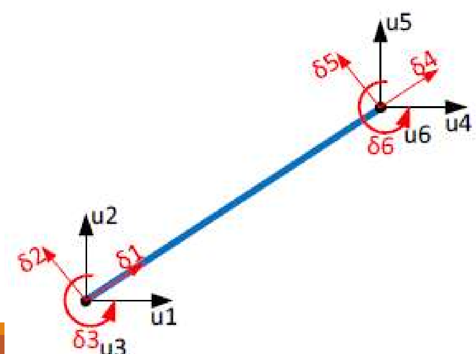
$$\begin{bmatrix} P11 \\ P21 \\ P31 \\ P41 \\ P51 \\ P61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\cdot\frac{E\cdot I}{L^3} & 6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2} & 0 & -\left(12\cdot\frac{E\cdot I}{L^3}\right) & 6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2} \\ 0 & 6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2} & 4\cdot\frac{E\cdot I}{L} & 0 & -\left(6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2}\right) & 2\cdot\frac{E\cdot I}{L} \\ -\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(12\cdot\frac{E\cdot I}{L^3}\right) & -\left(6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2}\right) & 0 & 12\cdot\frac{E\cdot I}{L^3} & -\left(6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2}\right) \\ 0 & 6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2} & 2\cdot\frac{E\cdot I}{L} & 0 & -\left(6\cdot\frac{E\cdot I}{L^2}\right) & 4\cdot\frac{E\cdot I}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta 1 \\ \delta 2 \\ \delta 3 \\ \delta 4 \\ \delta 5 \\ \delta 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Pemp11 \\ Pemp21 \\ Pemp31 \\ Pemp41 \\ Pemp51 \\ Pemp61 \end{bmatrix}$$

Transformación de Coordenadas

La transformación de ejes locales y globales se la hace obteniendo una relación entre los mismos.

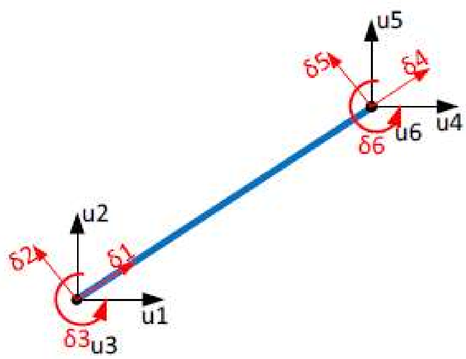


La relación se la debe hacer entre las deformaciones y las fuerzas.



Transformación de coordenadas

Como se puede ver, la relación entre δ1, δ2 y u1, u2 es la misma ya vista en armaduras.



$$\delta 1 = u1 \cdot cos(\theta) + u2 \cdot sen(\theta)$$

$$\delta 2 = u2 \cdot cos(\theta) - u1 \cdot sen(\theta)$$

$$\delta 4 = u4 \cdot cos(\theta) + u5 \cdot sen(\theta)$$

$$\delta 5 = u5 \cdot cos(\theta) - u4 \cdot sen(\theta)$$

Se puede ver que las deformaciones δ3, δ6 y u3, u6 son las mismas respectivamente. Por lo tanto, no hay que hacer ninguna transformación.

$$\delta 3 = u3 \qquad \delta 6 = u6$$

Transformación de Coordenadas

La matriz de transformación β es:

$$\beta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resumen de relaciones de transformación de coordenadas.

Relaciones para transformación de coordenadas	
De ejes locales de elemento a ejes globales de la estructura	**De ejes globales de estructura a ejes locales de elemento**
$[F] = [\beta]^T * [P]$	$[P] = [\beta] * [F]$
$[\mu] = [\beta]^T * [\delta]$	$-$
$[Femp] = [\beta]^T * [Pemp]$	$-$
$[K] = [\beta]^T * [k] * [\beta]$	$-$