ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

Ing. Marcelo David Guerra Valladares, MSc.
Magíster en Ingeniería Civil – Mención Estructuras Sismorresistentes
Especialista Estructural

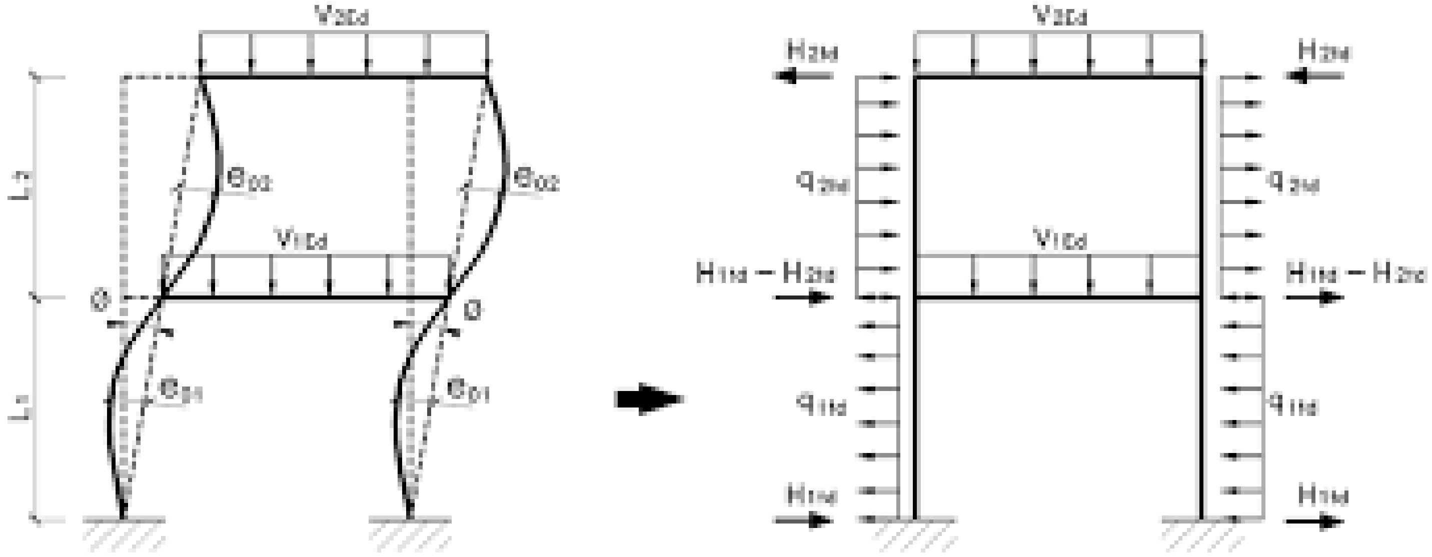
UNIDAD 1

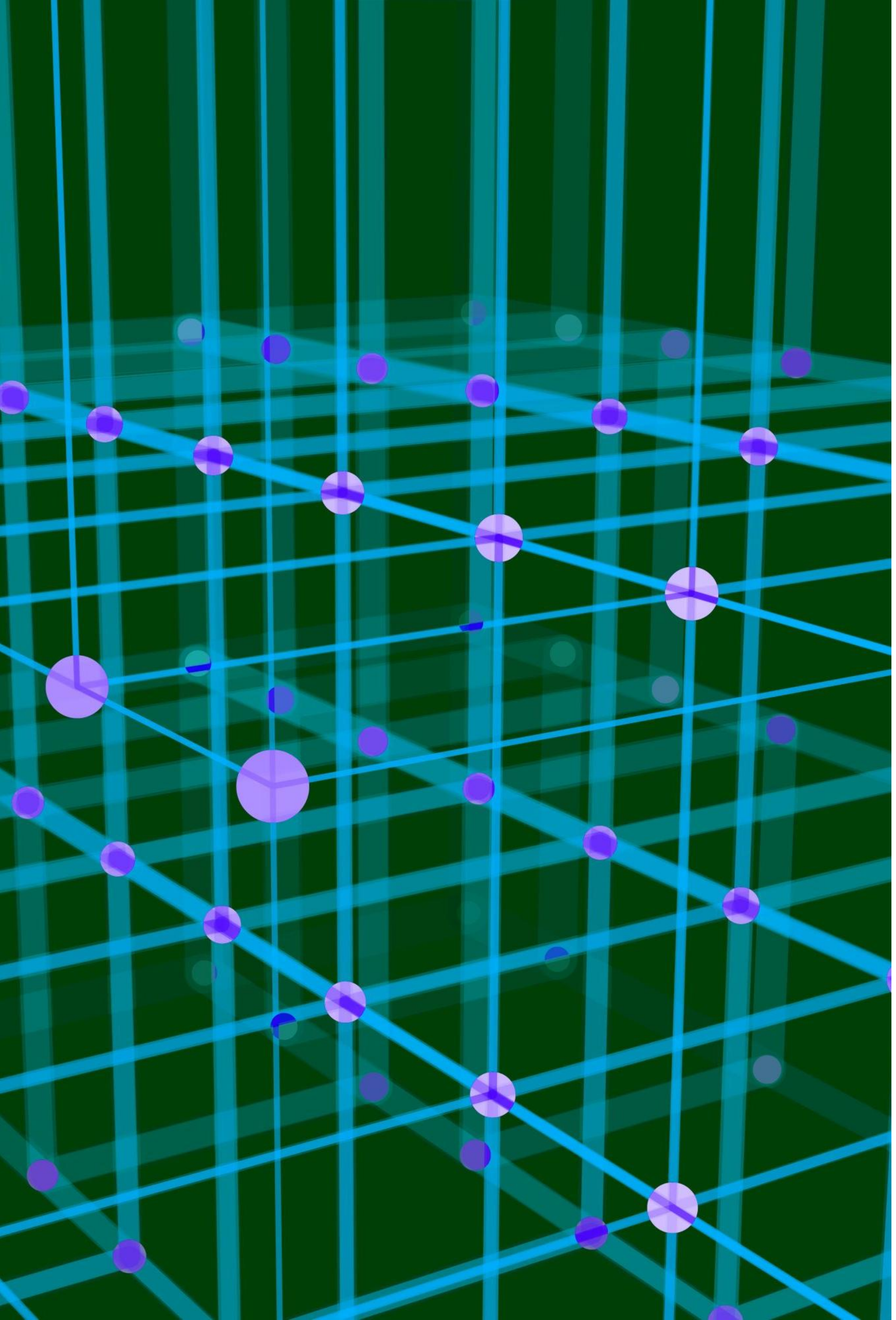
GRADOS DE LIBERTAD Y CARGAS GENERALIZADAS

Introducción

Se presentan algunas definiciones, las más elementales, para estructuras que trabajan en el rango elástico.

- Se definen: los grados de libertad de una estructura desde el punto de vista estático y dinámico.
- Se empieza a trabajar con elementos: totalmente flexibles, axialmente rígidos, transversalmente rígidos y totalmente rígidos; se dibujan deformadas generales y elementales.





Definiciones Estructurales

Vínculos

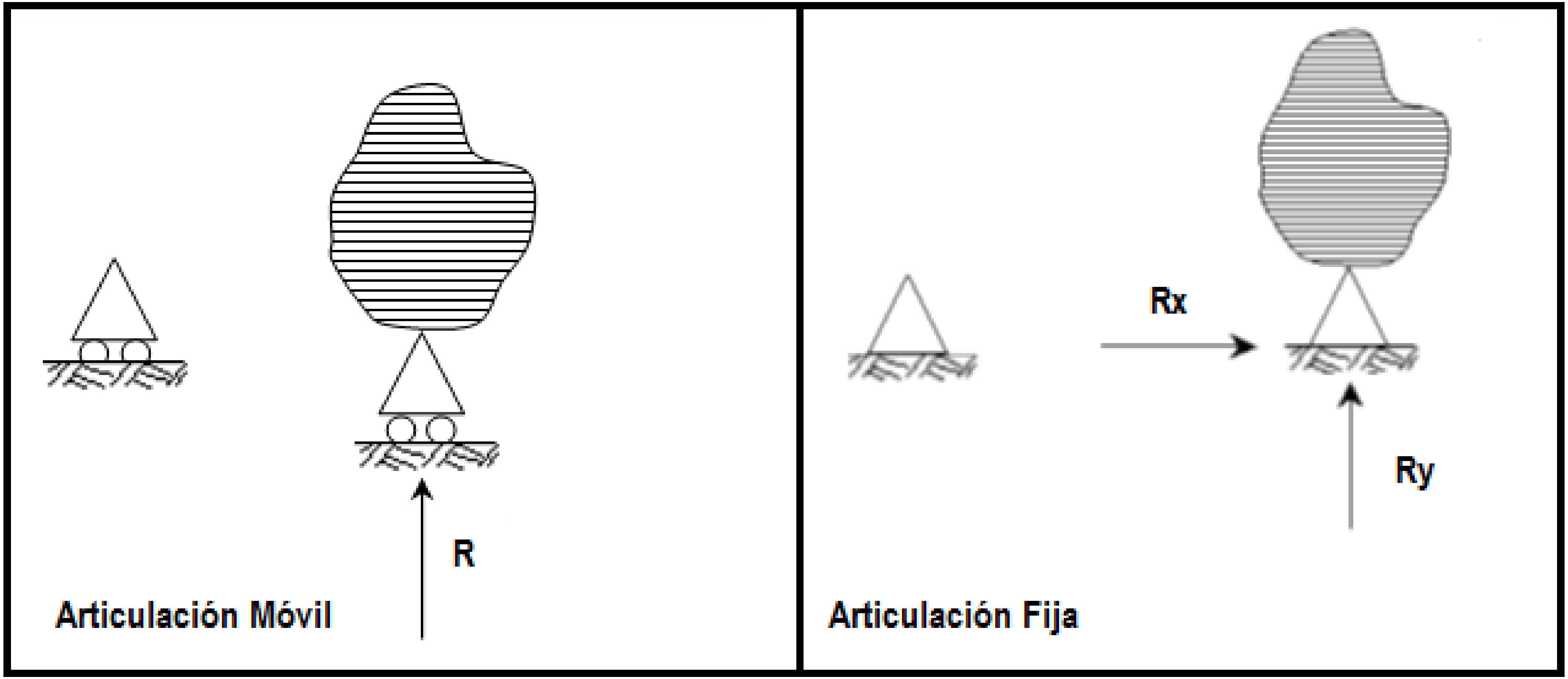
Se define por vínculo a toda condición geométrica que limita o restringe la movilidad de un cuerpo; es el Ingeniero Diseñador de acuerdo al sistema constructivo que va a utilizar el que define el tipo de vínculo.

De acuerdo a su ubicación en la estructura, los vínculos pueden ser externos e internos. Son externos aquellos que vinculan el cuerpo con la tierra, e internos aquellos que vinculan a los cuerpos entre sí.

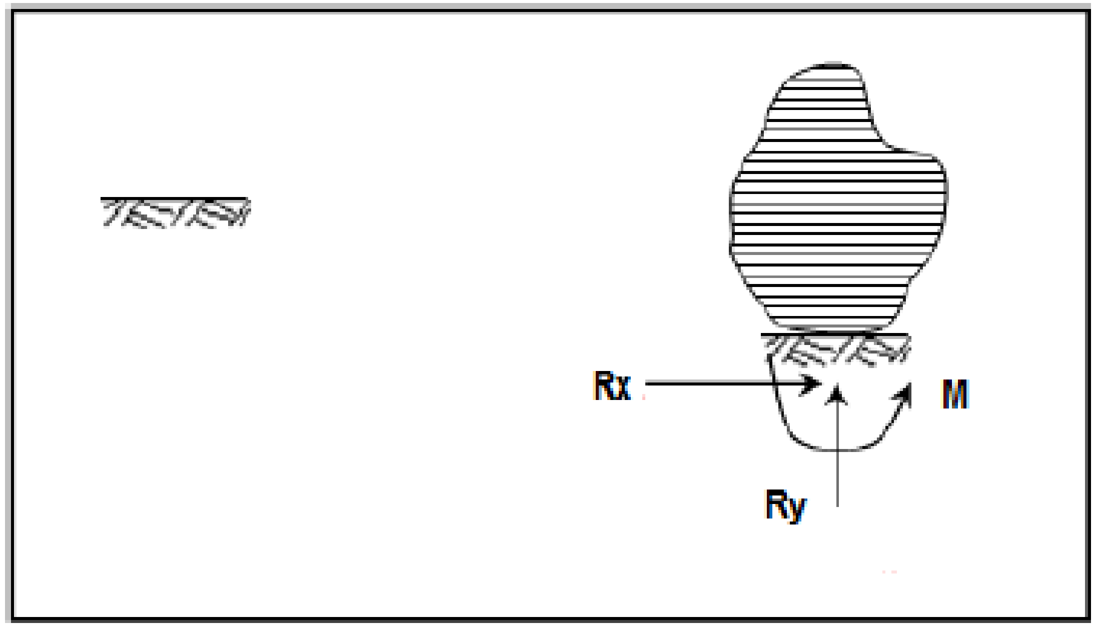
Los tipos de vínculos pueden ser:

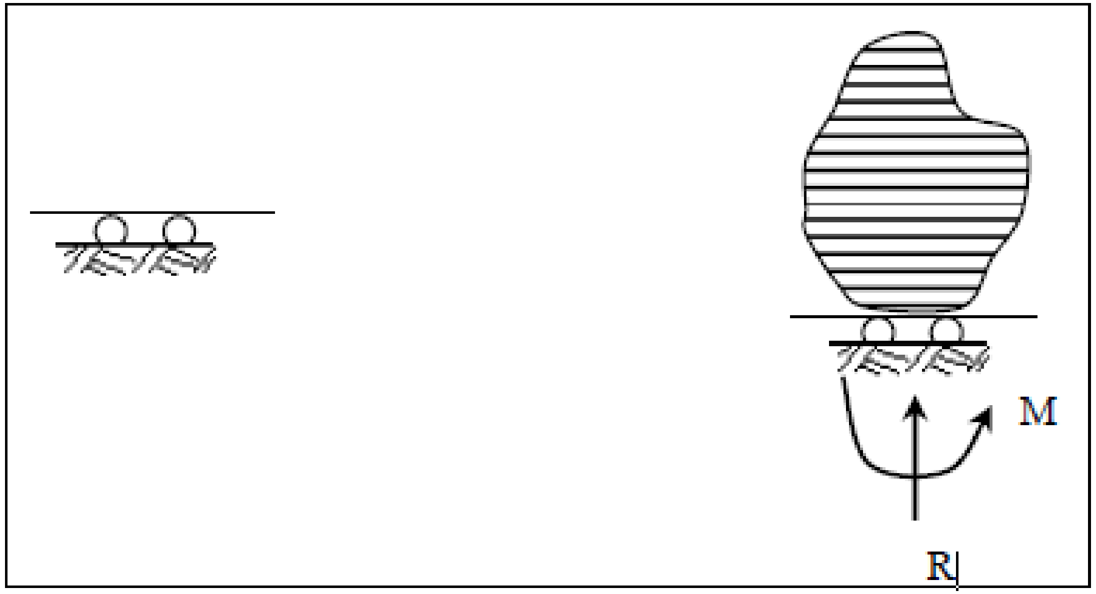
- El rodillo o articulación móvil permite la rotación del cuerpo al que está unido y el desplazamiento de ese mismo punto, en la dirección del movimiento del rodillo.
- La articulación fija, llamada simplemente articulación, posibilita únicamente la rotación del cuerpo al que se halla unido, alrededor del punto de unión.
- El empotramiento móvil permite solamente el deslizamiento lineal de su punto de unión con el cuerpo en la dirección de su movimiento.

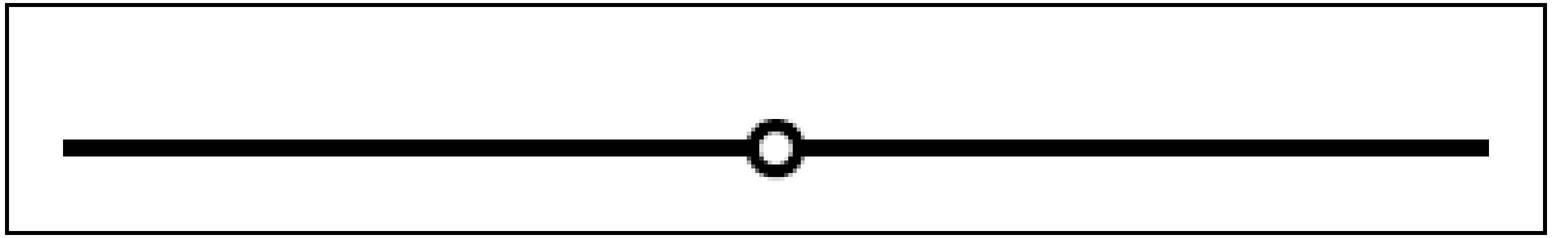
Rodillo	Articulación Fija	Empotramiento móvil	Empotramiento Fijo	Vínculos Interiores
• Permite la rotación del cuerpo al que está unido y el desplazamiento de ese mismo punto, en la dirección del movimiento del rodillo.	• Posibilita únicamente la rotación del cuerpo al que se halla unido, alrededor del punto de unión.	• Permite solamente el deslizamiento lineal de su punto de unión con el cuerpo en la dirección de su movimiento.	• No permite ningún tipo de desplazamiento ni rotación.	• Se denominan articulaciones. En estos vínculos, el momento es nulo.



R
Articulación Móvil
Rx
Ry
Articulación Fija

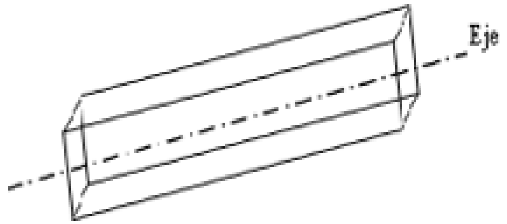

Rx
M
Ry


M
R

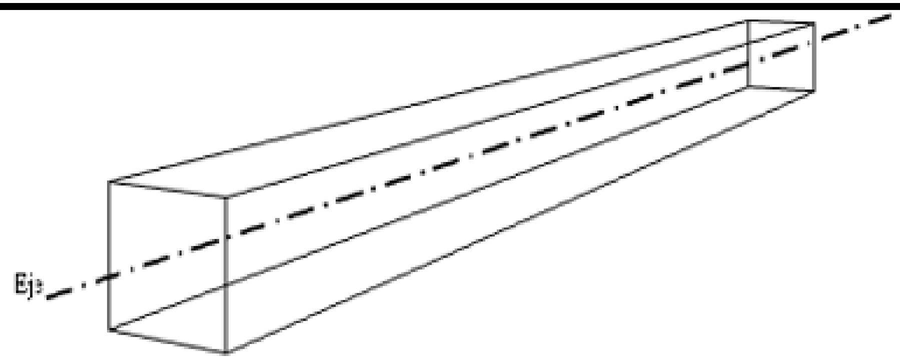


Elementos

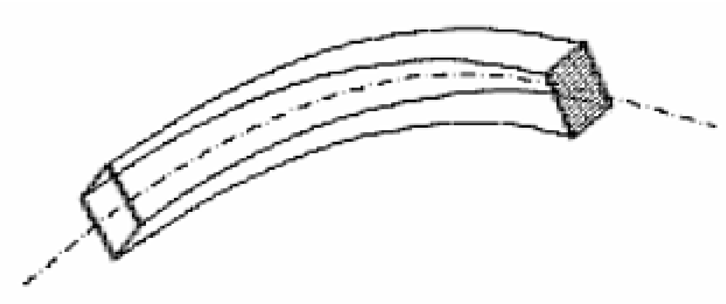
Los elementos lineales o unidimensionales o prismas mecánicos están generalmente sometidos a un estado de tensión plana con esfuerzos tensiones grandes en la dirección de línea baricéntrica (que puede ser recto o curvo). Geométricamente son alargados siendo la dimensión según dicha línea (altura, luz, o longitud de arco), mucho mayor que las dimensiones según la sección transversal, perpendicular en cada punto a la línea baricéntrica.



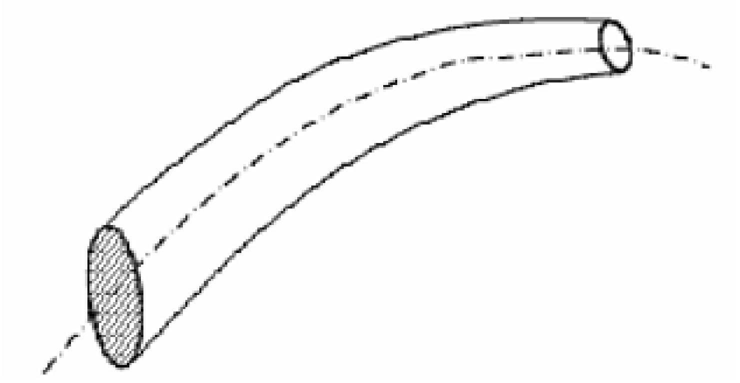
Sección constante



Sección Variable

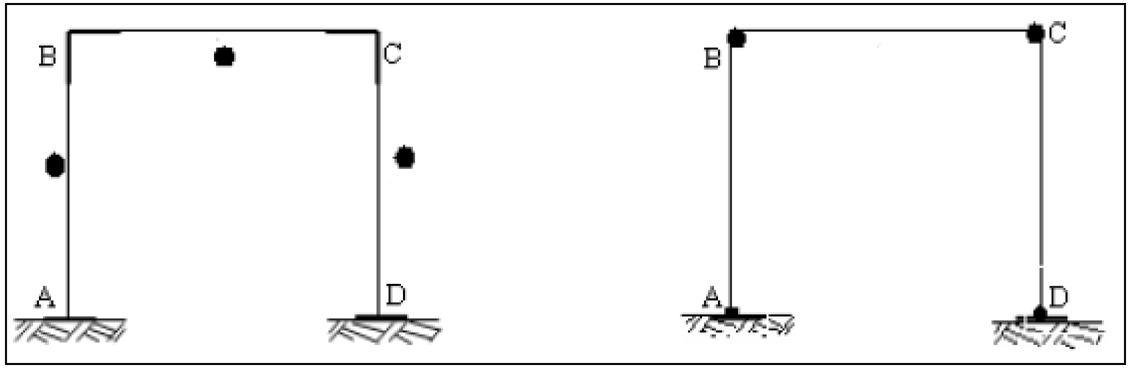


Curvo de sección constante

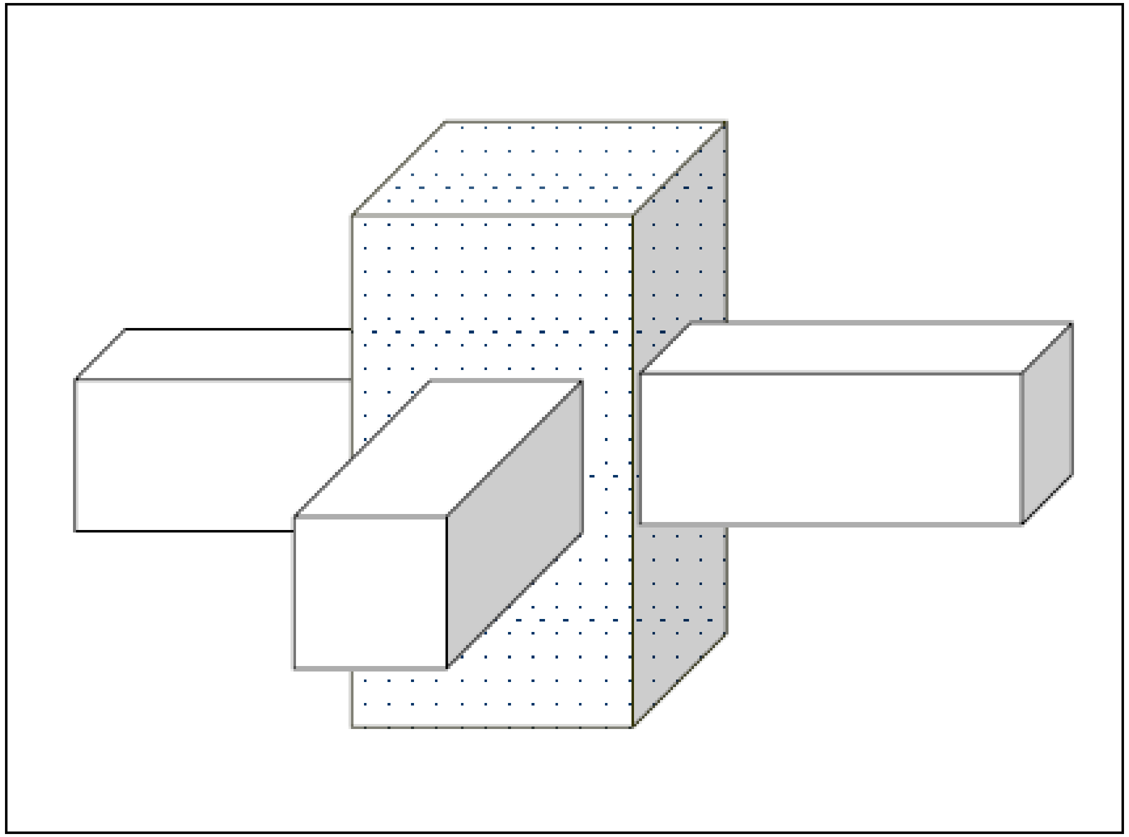


Curvo de sección variable

Juntas o nudos

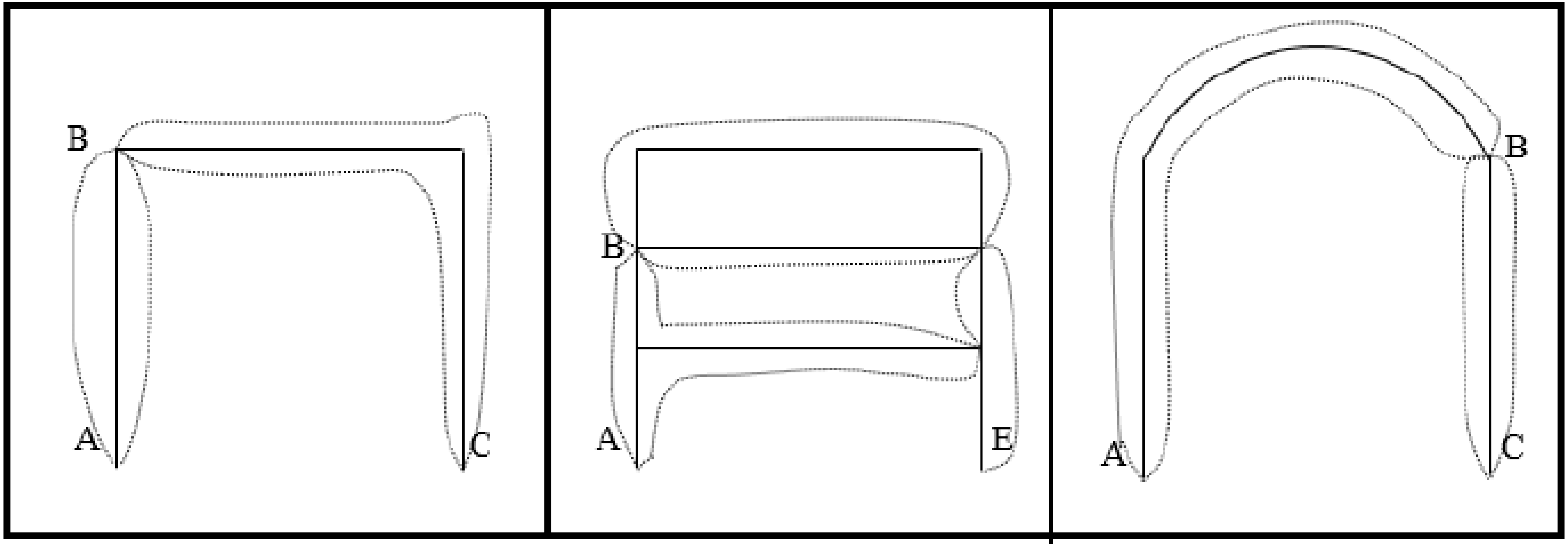


Se denominan juntas o nudos a los puntos de unión de varios elementos. Es decir, al medio de conexión de dos o más elementos. Normalmente se representa un nudo con un punto el mismo que corresponde a la intersección de los elementos que concurren a él.

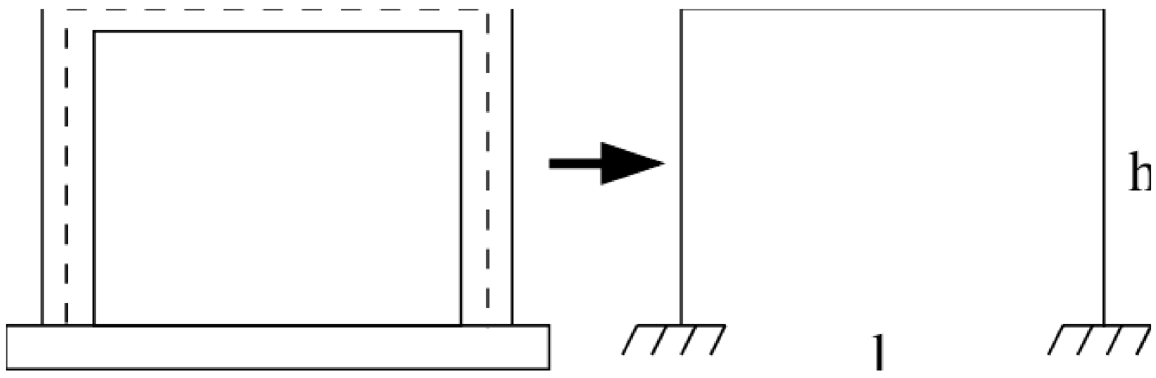


Juntas o Nudos

Es importante notar, que, si bien a un nudo se representa como un punto, en la realidad la representación es diferente, ya que es un elemento físico que tiene dimensiones, que se desplaza y gira.


B
A
C
B
A
E
B
A
C

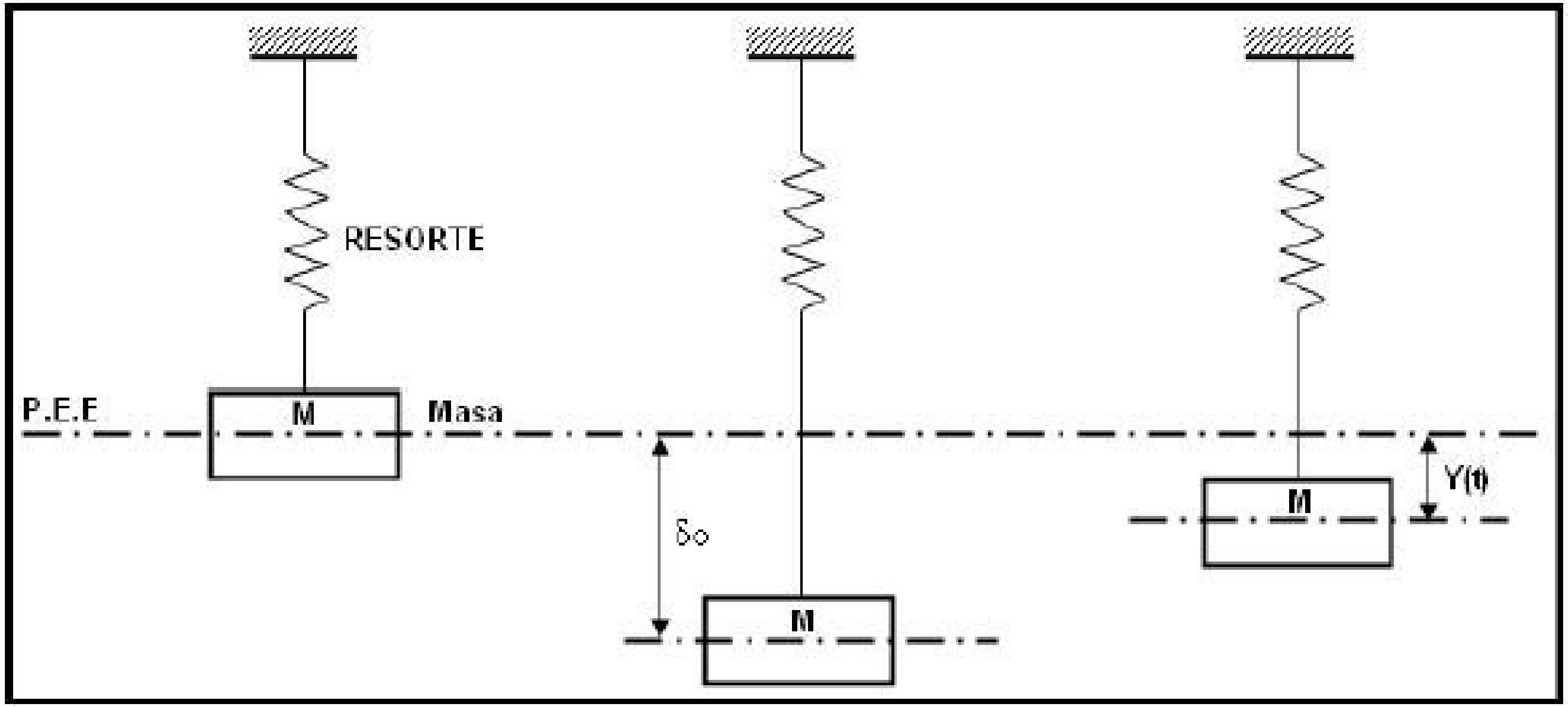
Estructura



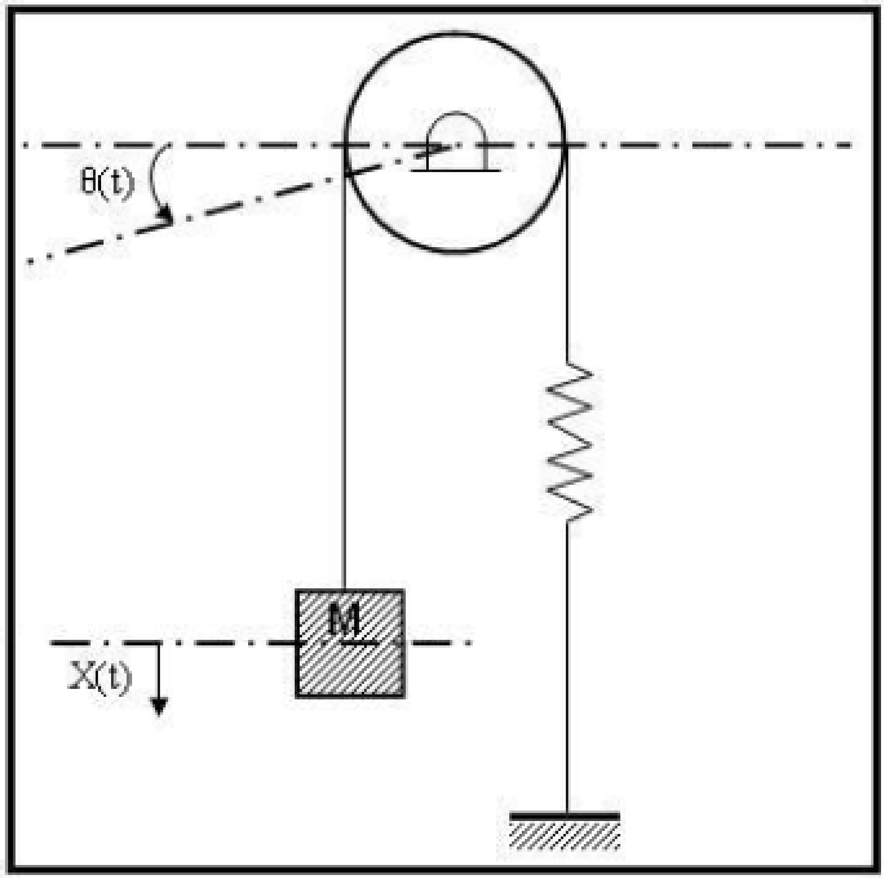
Una estructura es un agrupamiento elástico estable, compuesto por un número finito de elementos unidos entre sí mediante un número finito de juntas, uno de cuyos números es arbitrario.

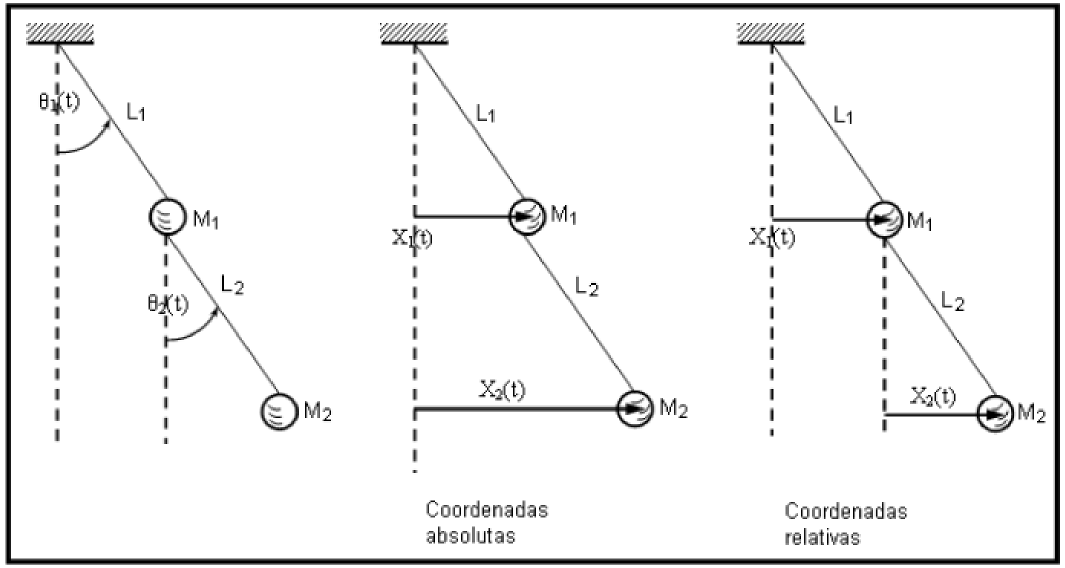
Definiciones de Mecánica

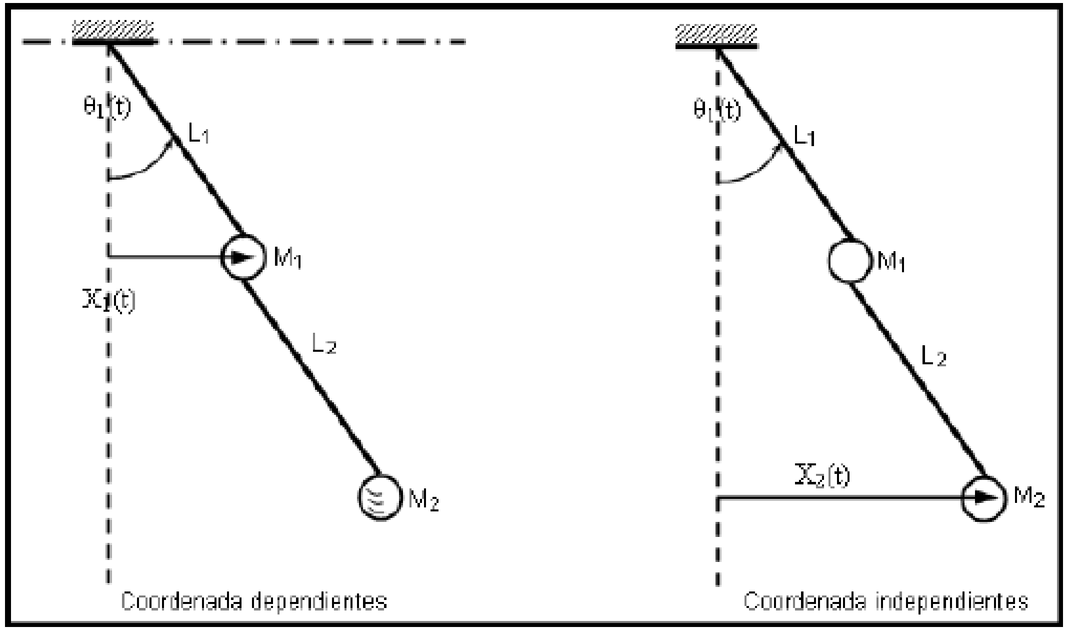
Coordenadas Generalizadas



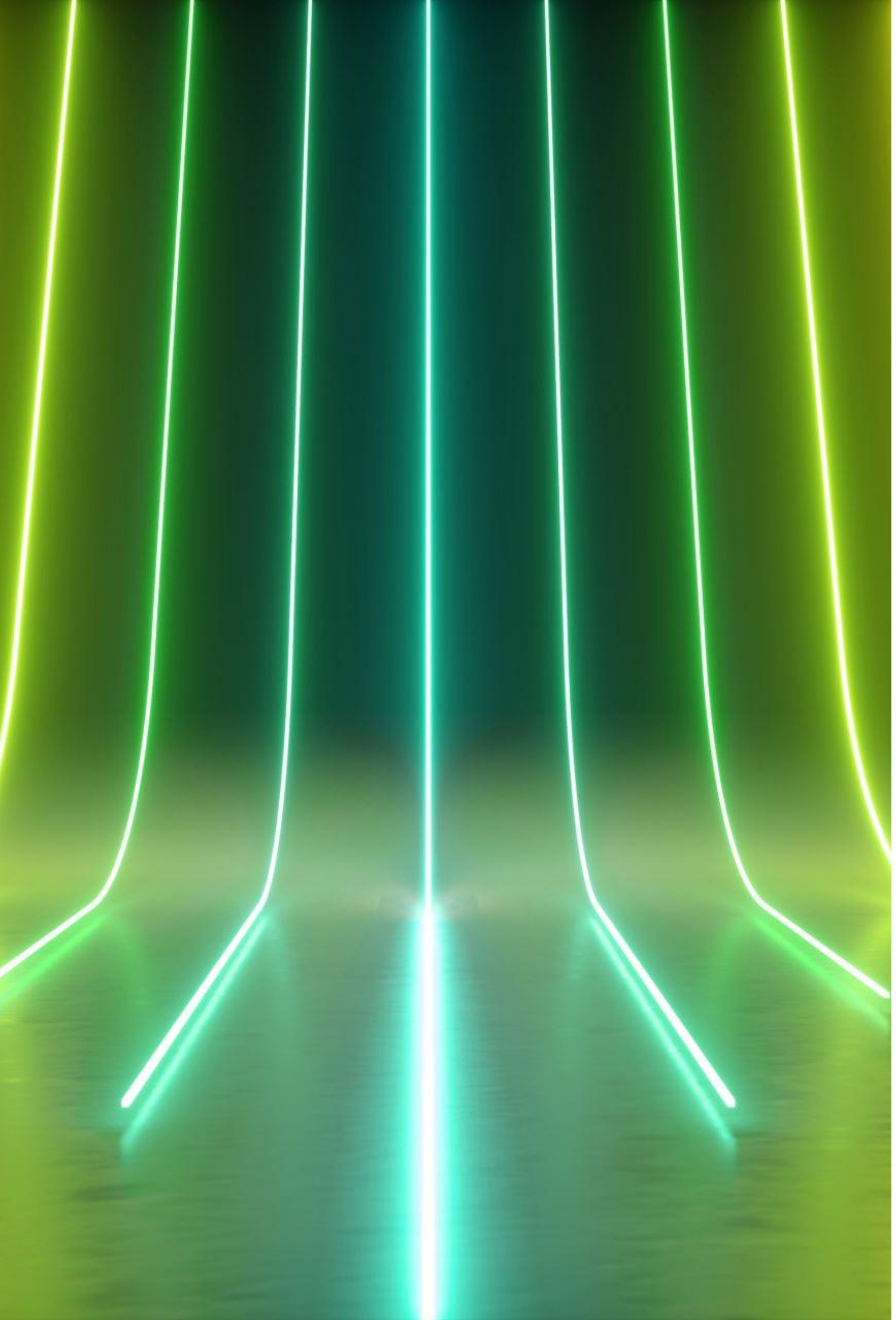
Coordenadas Generalizadas



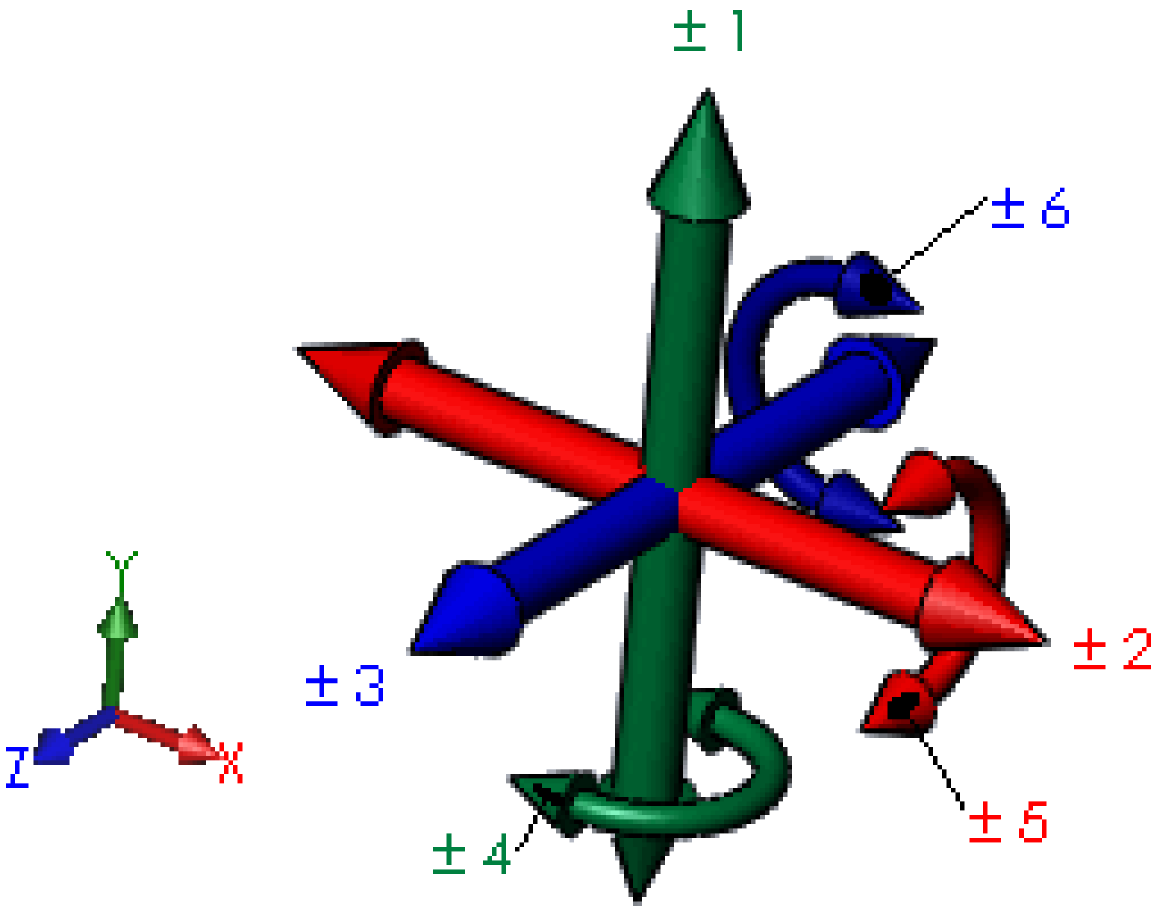




Coordenadas Generalizadas



Grados de Libertad

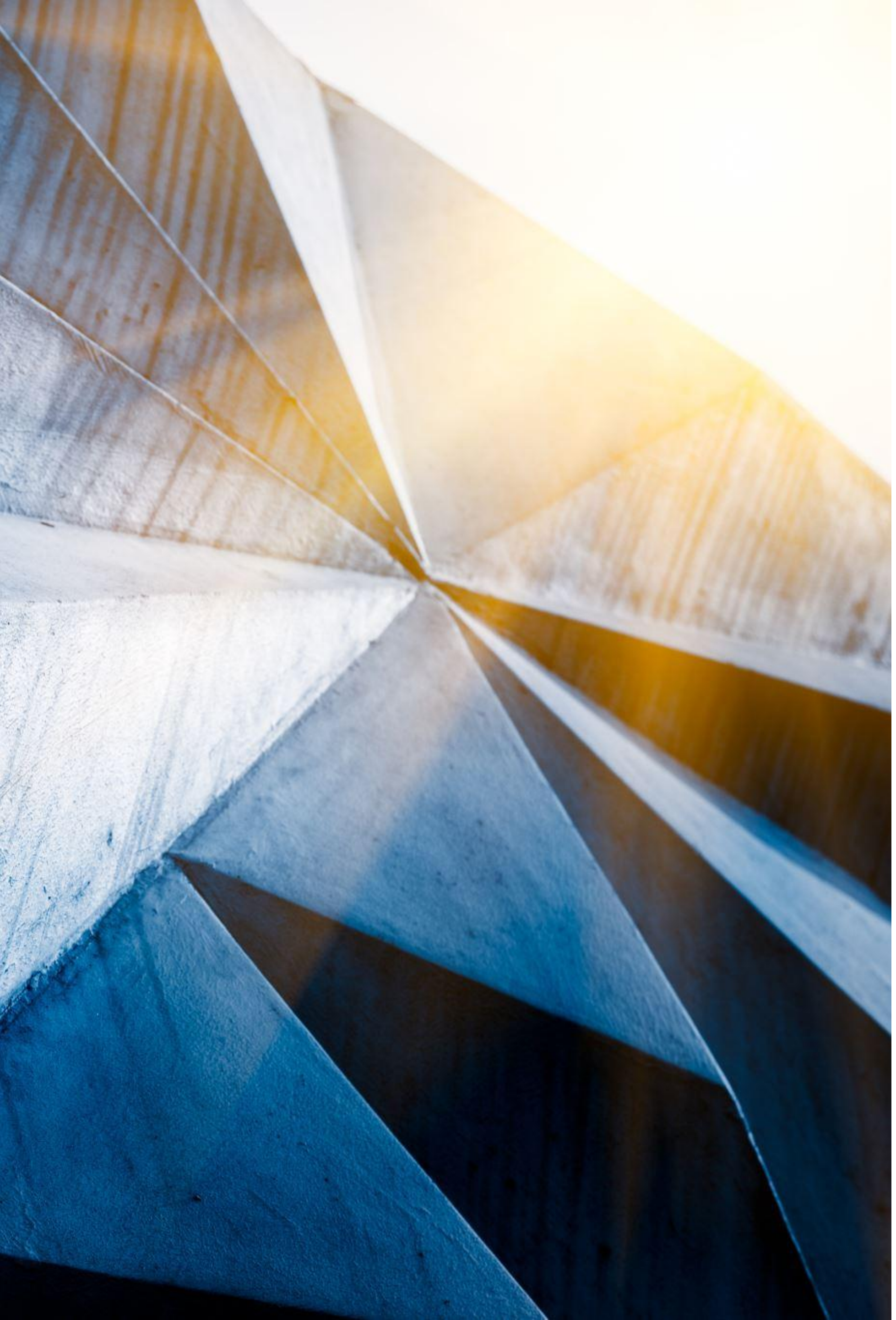


Números de Grados de Libertad

Se denomina número de grados de libertad al número de coordenadas generalizadas que hay que emplear para definir la configuración del sistema.

Desplazamientos posibles que tiene un nudo.

El número de grados de libertad depende del tipo de estructura y de las condiciones que se tenga para los elementos.



Grados de Libertad de una Estructura

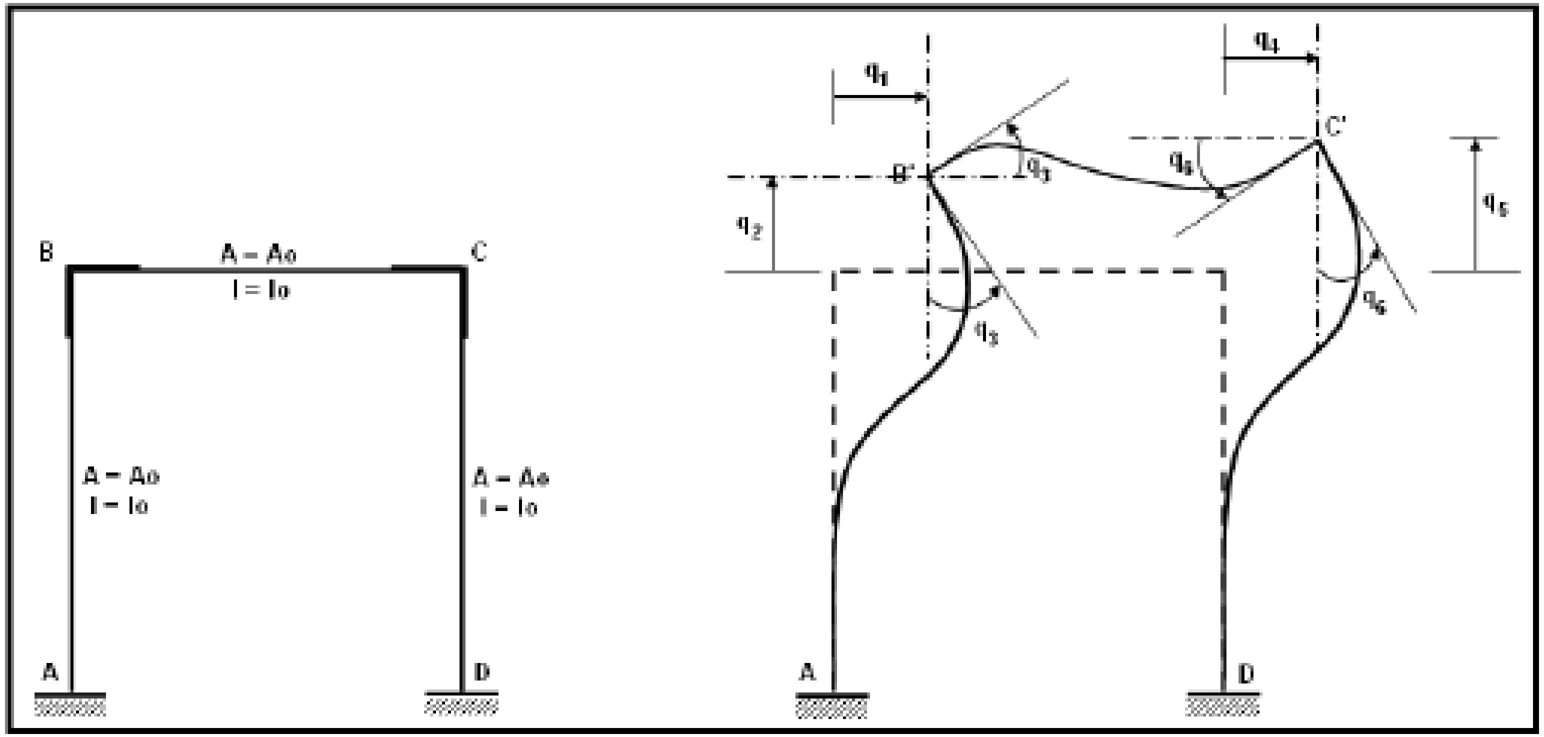
Clases de Estructuras

Las estructuras se clasifican en:

- Armaduras planas
- Pórticos planos
- Estructuras espaciales
- Armaduras espaciales
- Parrillas o mallas espaciales.

Para la definición correcta de cada una de las estructuras se debe considerar los correctamente los grados de libertad.

Pórticos planos con elementos flexibles

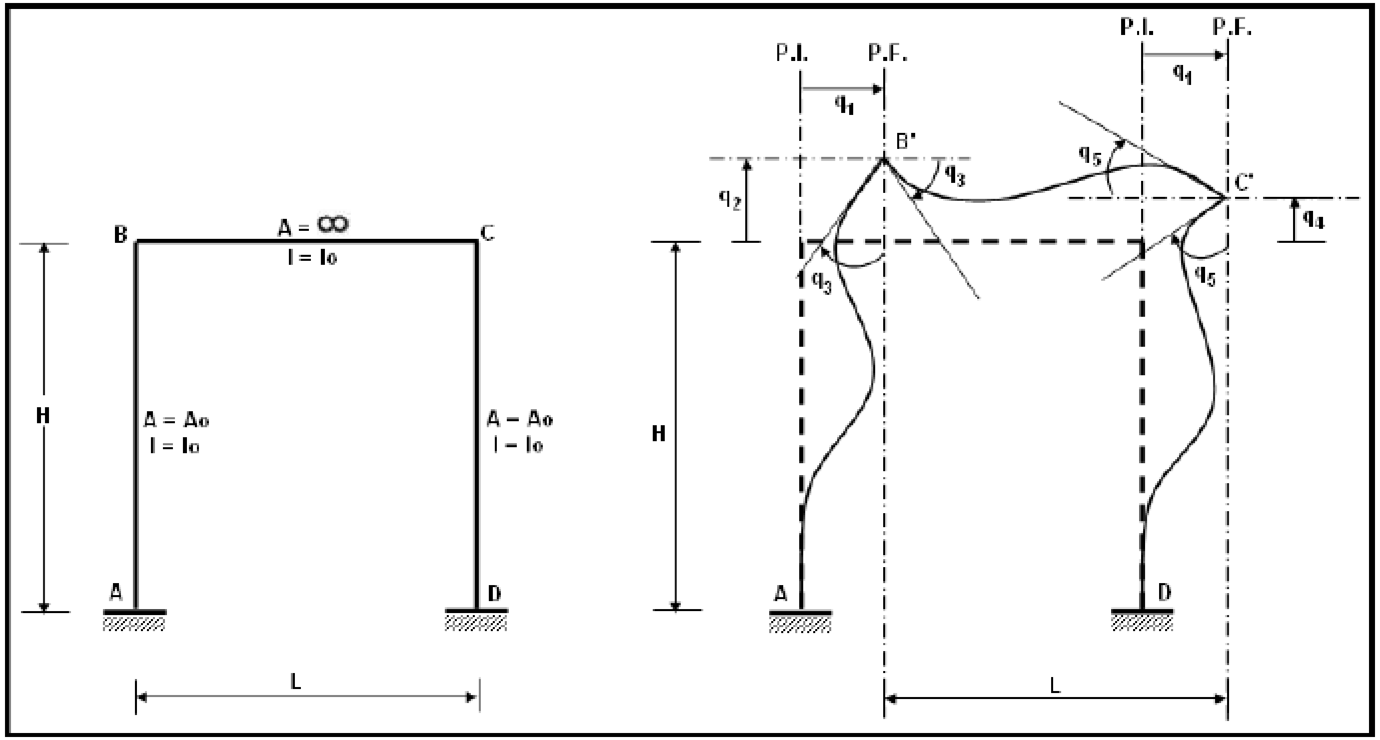


$$NGL = 3 * (NDJ) - (NDJ)_E * V$$

NGL: Número de grados de libertad
NDJ: Número de juntas totales
$(NDJ)_E$: Número de juntas externas.
V: Depende del apoyo

1: Rodillo
2: Articulación
3: Empotramiento

Pórtico plano con elementos axialmente rígidos

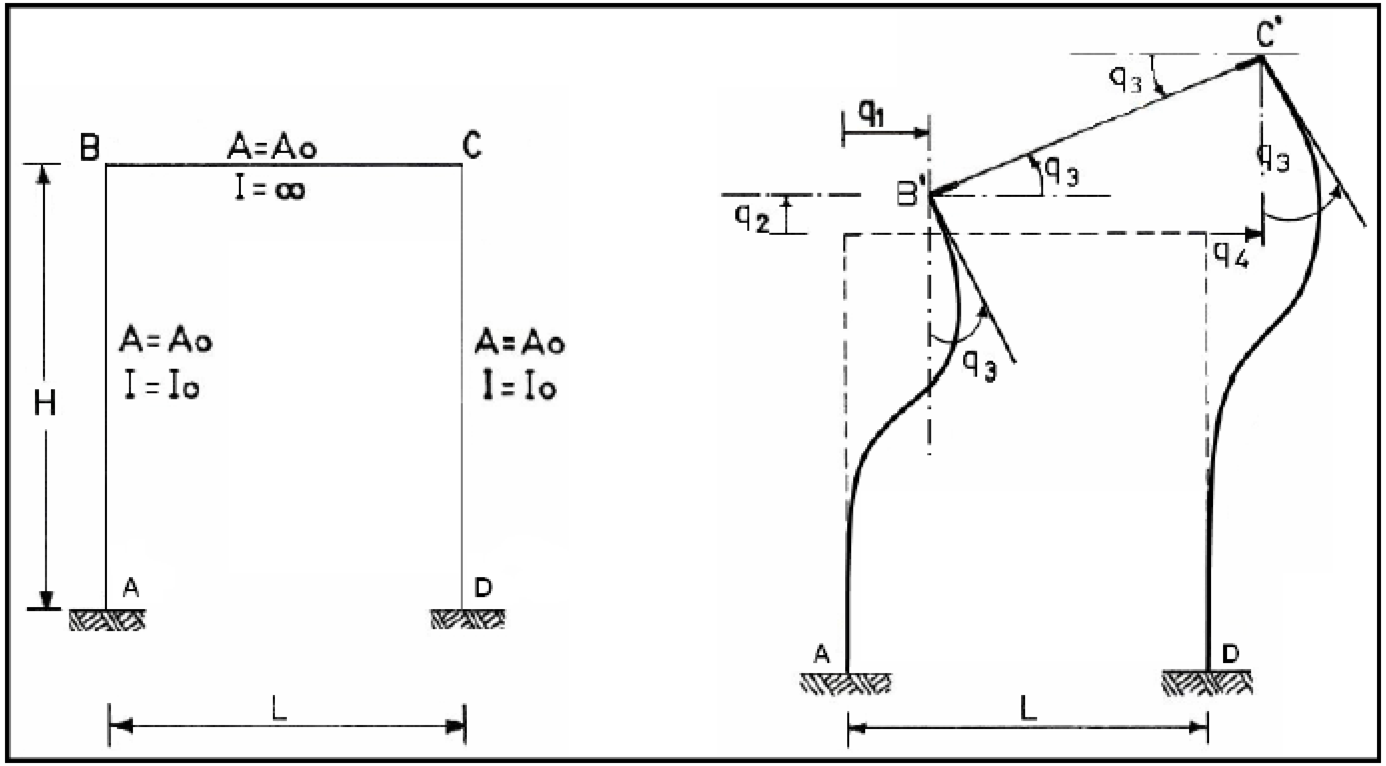


$$NGL = 3 * (NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A$$

NGL: Número de grados de libertad
NDJ: Número de juntas totales
$(NDJ)_E$: Número de juntas externas.
V: Depende del apoyo
- 1: Rodillo
- 2: Articulación
- 3: Empotramiento

A: Número de elementos axialmente rígidos

Pórtico plano con elementos transversalmente rígidos



$$NGL = 3 * (NDJ) - (NDJ)_E * V - 2 * T$$

NGL: Número de grados de libertad
NDJ: Número de juntas totales
$(NDJ)_E$: Número de juntas externas.
V: Depende del apoyo
 1: Rodillo
 2: Articulación
 3: Empotramiento
T: Número de elementos transversalmente rígidos

Para un pórtico plano con elementos axialmente rígidos y transversalmente rígidos, el número de grados de libertad, viene definido por la siguiente ecuación

$$\boxed{NGL = 3 * (NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A - 2 * T}$$

NGL: Número de grados de libertad

NDJ: Número de juntas totales

$(NDJ)_E$: Número de juntas externas.

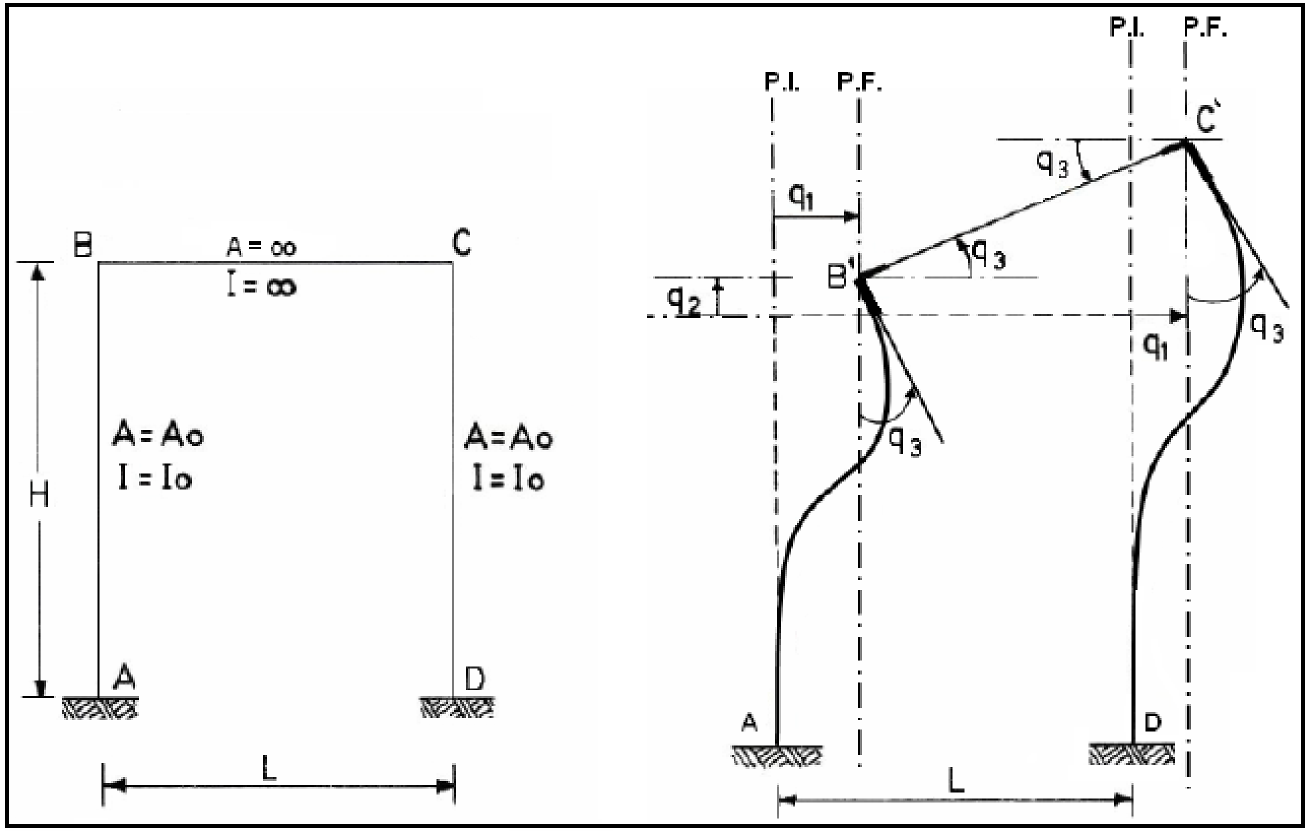
V: Depende del apoyo

- 1: Rodillo
- 2: Articulación
- 3: Empotramiento

T: Número de elementos transversalmente rígidos

A: Número de elementos axialmente rígidos

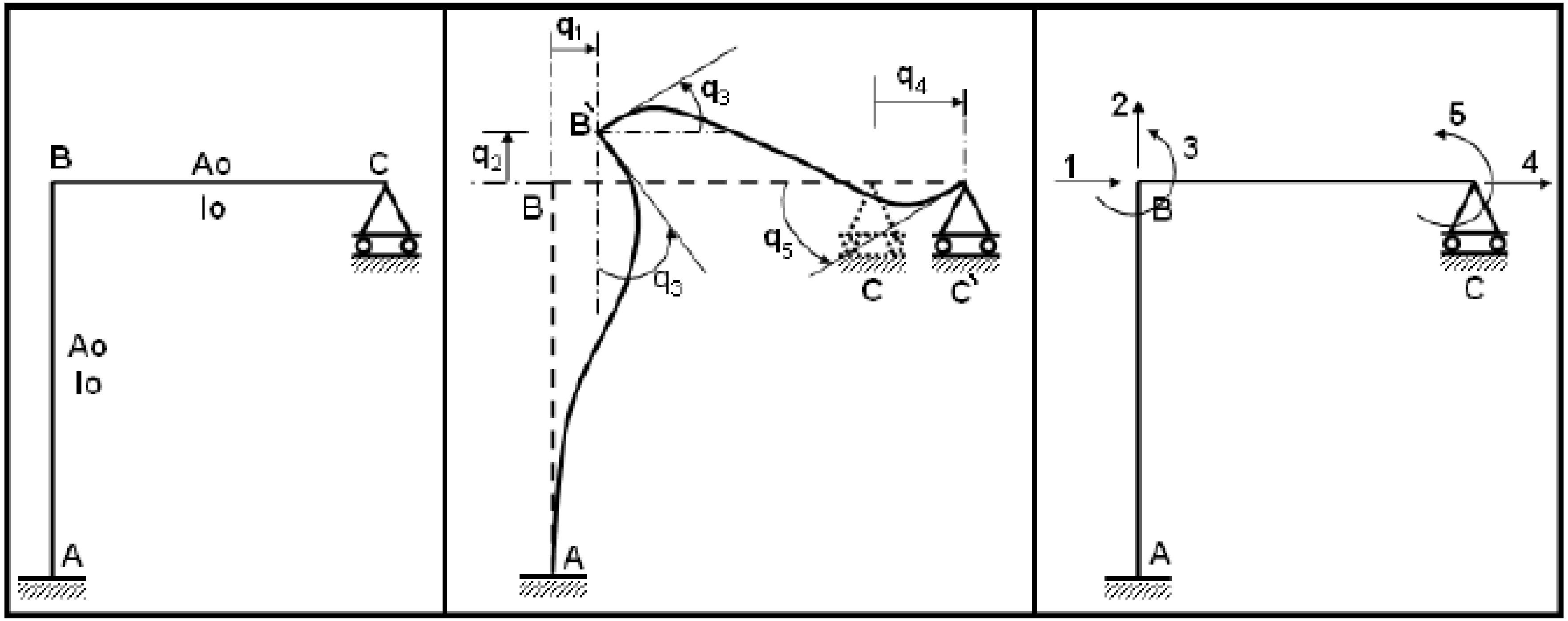
Pórtico plano con elementos totalmente rígidos



Sistemas de Cargas y Coordenadas Generalizadas

COORDENADAS GENERALIZADAS DE UNA ESTRUCTURA

Vector de coordenadas generalizadas: n es el número de grados de libertad de la estructura. Se debe notar que los desplazamientos q_i son infinitésimos, pero para visualizar los conceptos, siempre las coordenadas generales se dibujaran grandes.



$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Coordenadas generalizadas ortogonales

Se ha utilizado un sistema de coordenadas ortogonales para definir las componentes de desplazamiento de las juntas. Pero este sistema no es único ya que se puede utilizar otro sistema de coordenadas en el cual cada q_i esté asociado a una dirección determinada.

q_1: Componente de desplazamiento del nudo B en la dirección horizontal, siendo positivo si es hacia la derecha.

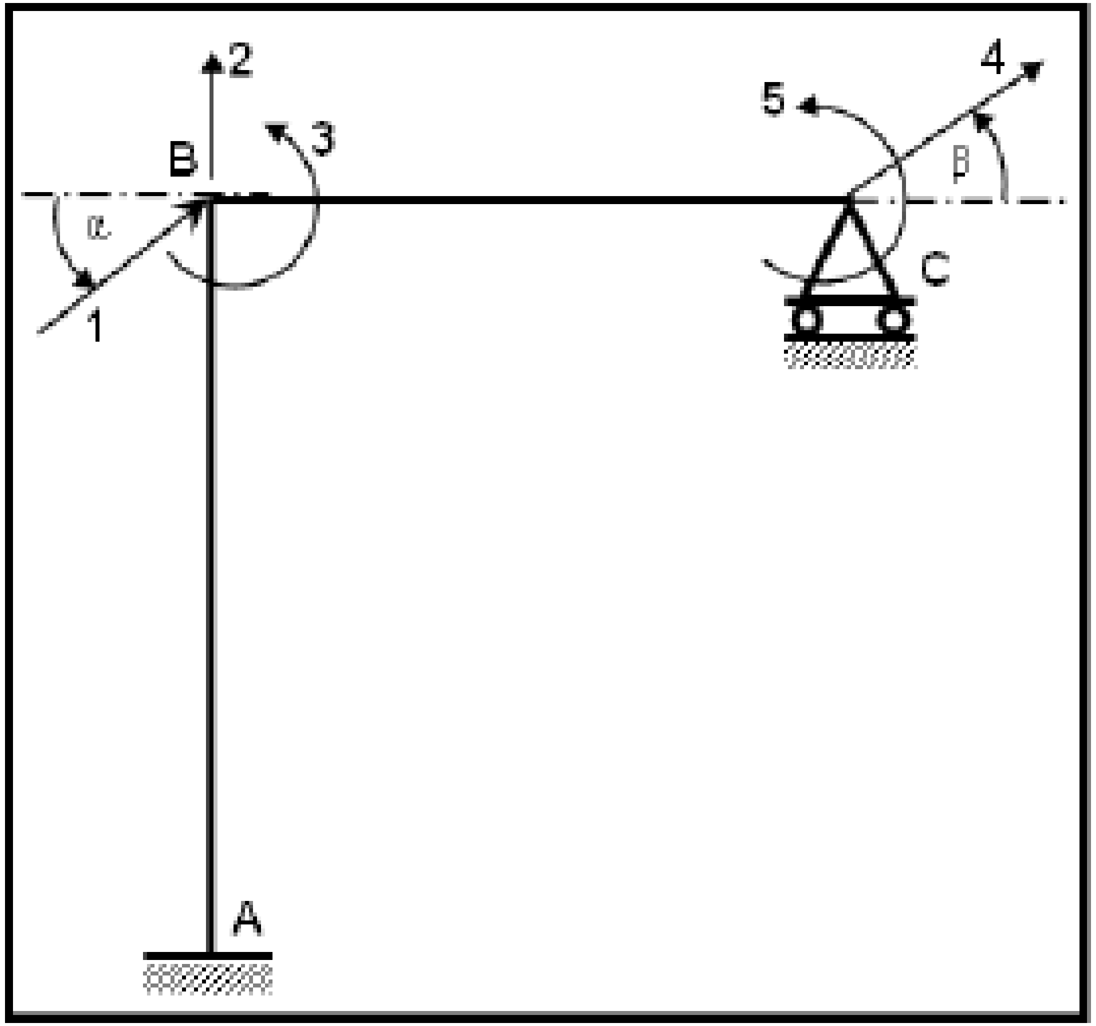
q_2: Componente de desplazamiento del nudo B en la dirección vertical, siendo positivo si es hacia arriba.

q_3: Rotación del nudo B, siendo positivo si es anti horario.

Algo similar se tiene para las coordenadas q_4 y q_5 pero referidas al nudo C. Lo importante es destacar que entre las direcciones de medición de q_1 y q_2 hay noventa grados por eso el nombre de ortogonales.

Ejemplo A)

Se supone que las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 de la junta B del pórtico anterior para un estado de cargas arbitrario, son: $q_1 = 0.004\ m$ y $q_2 = 0.006\ m$. Encontrar gráficamente la posición de B'.

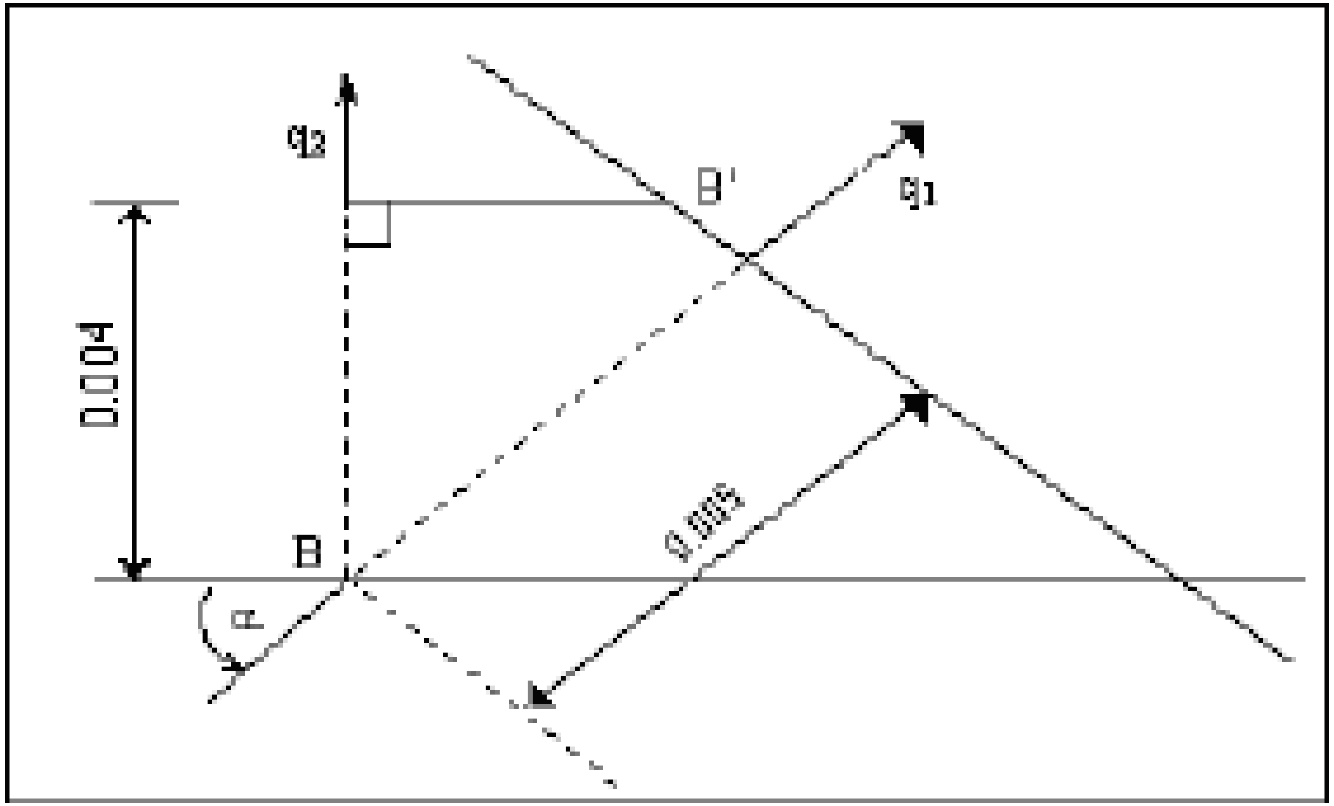


Coordenadas generalizadas no ortogonales

Para definir la posición final de las juntas del siguiente pórtico se puede utilizar las coordenadas indicadas en la figura.

Ejemplo B)

Con los datos de carga del Ejemplo A), pero al considerar el sistema de coordenadas de la figura de la lámina anterior, se supone que se obtuvo $q_1 = 0.005\ m$ y $q_2 = 0.004\ m$. ¿Encontrar el punto B'?.

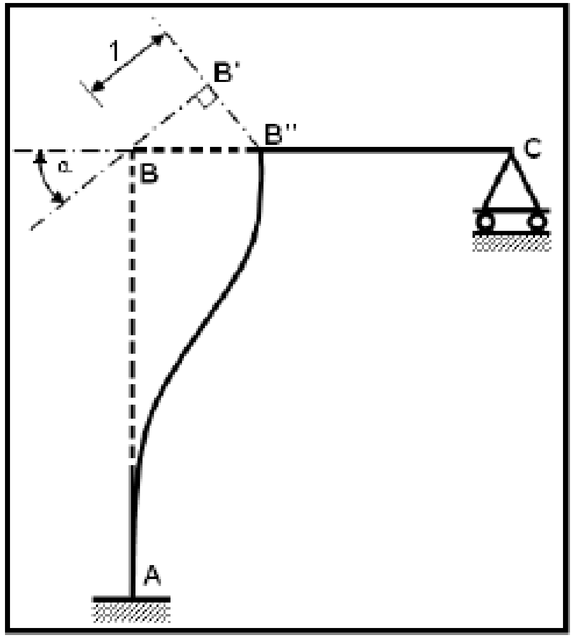


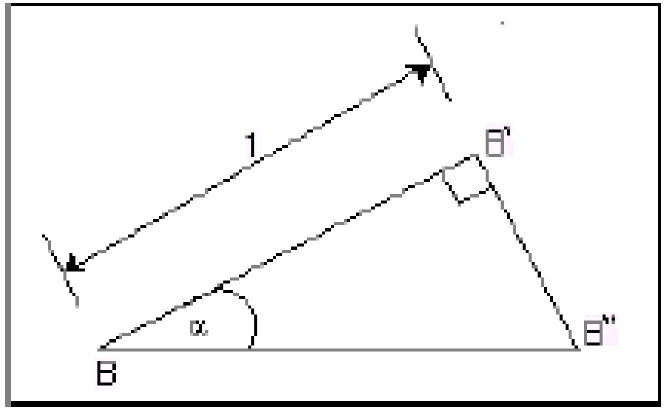
q2
B'
q1
0.004
B

Ejemplo C)

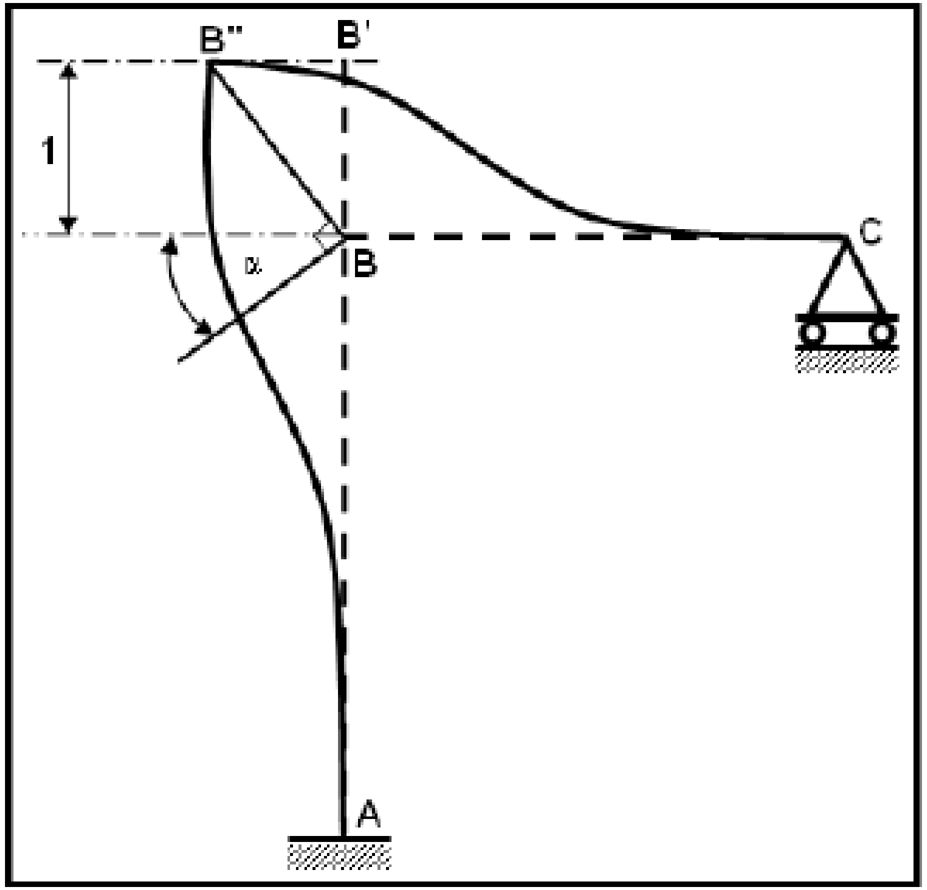
Encontrar los diagramas de deformación elemental q_1 y q_2 de la estructura de la figura, cuyos elementos son totalmente flexibles. Se trabaja con coordenadas no ortogonales

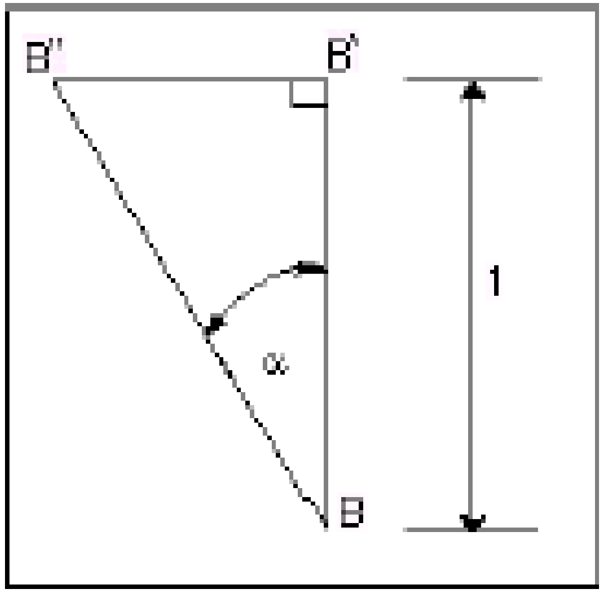
♣ $q_1 = 1$ y $q_2 = 0$ para $i \neq 1$



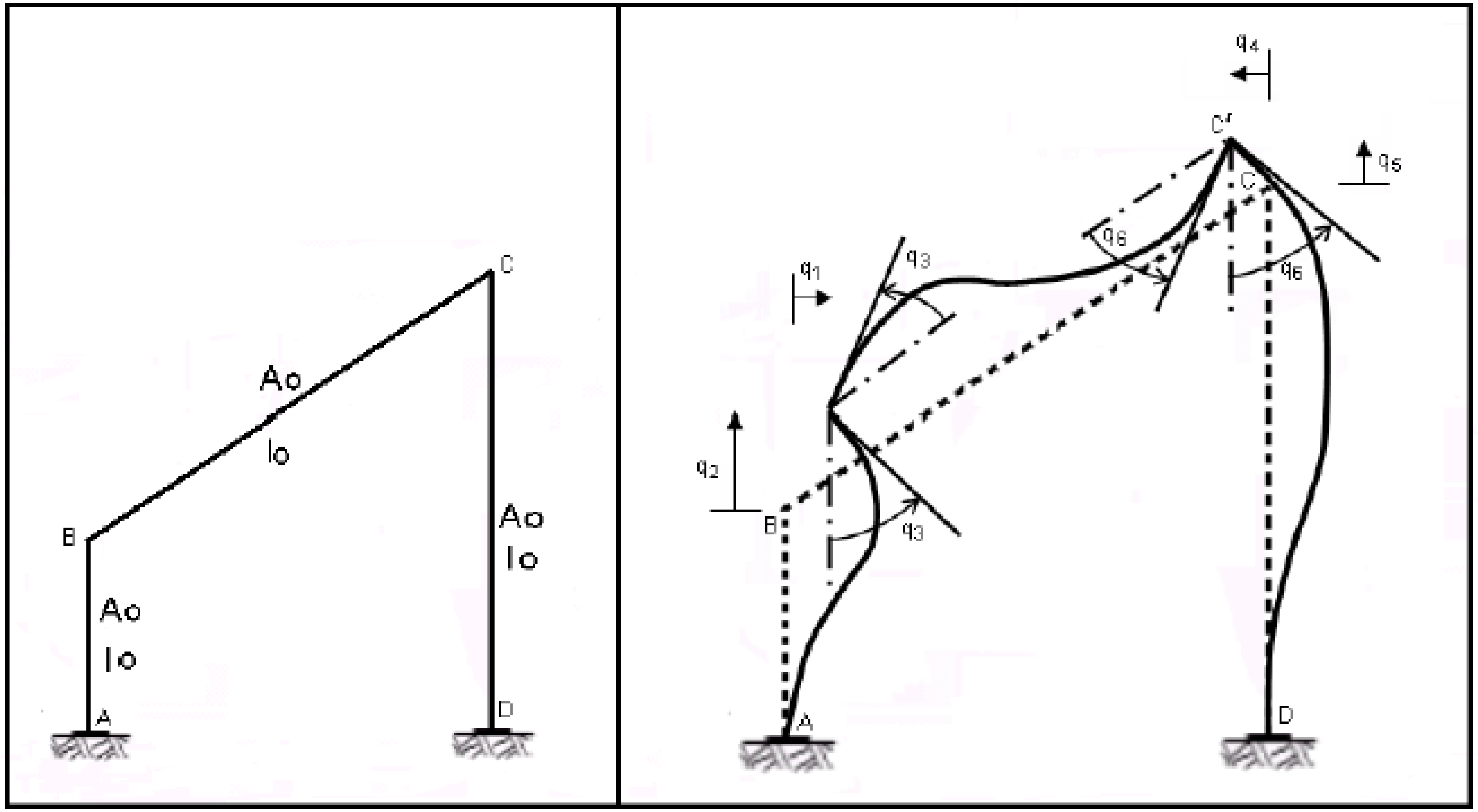


♣ $q_2 = 1$ y $q_i = 0$ para $i \neq 2$

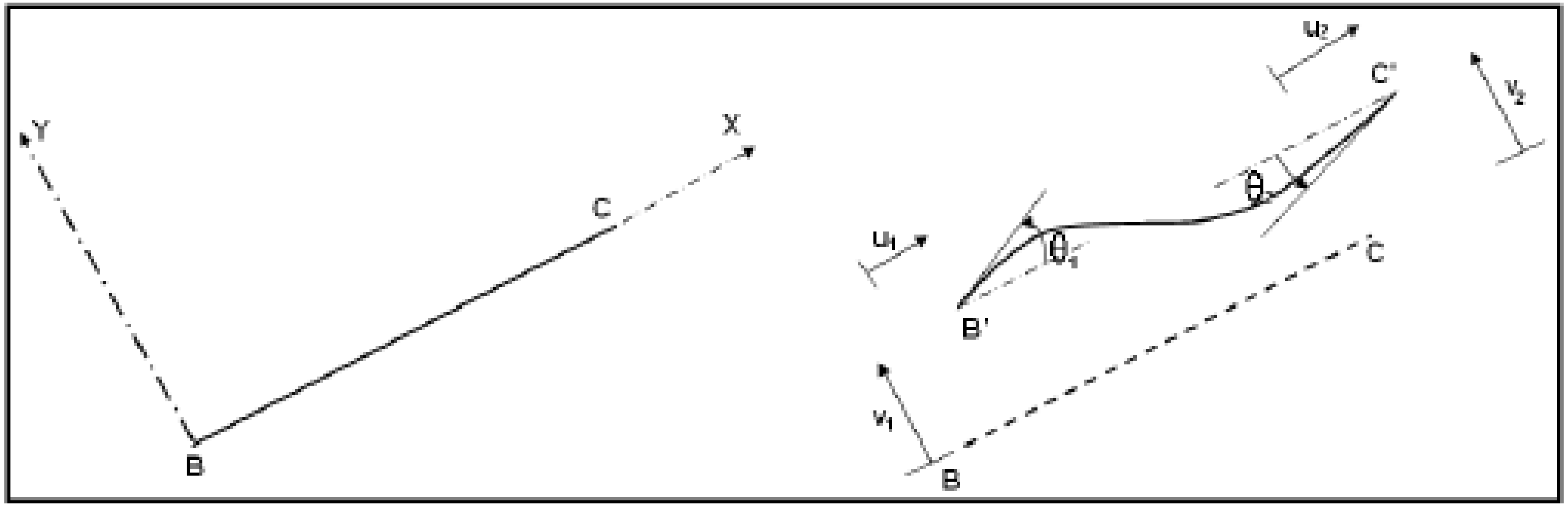




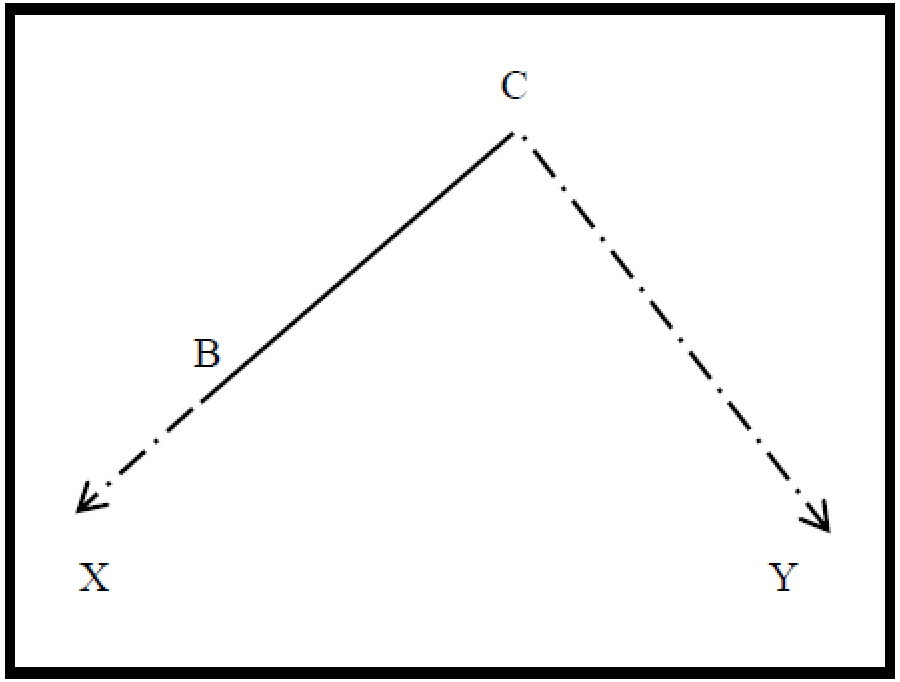
DESPLAZAMIENTO DE LOS ELEMENTOS

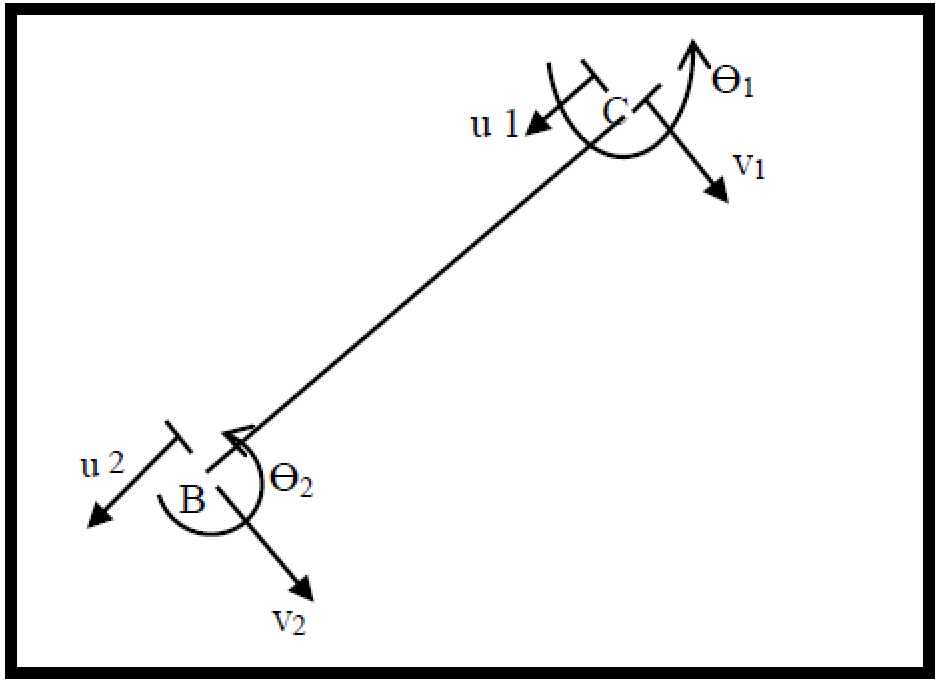


DESPLAZAMIENTO DE LOS ELEMENTOS



DESPLAZAMIENTO DE LOS ELEMENTOS





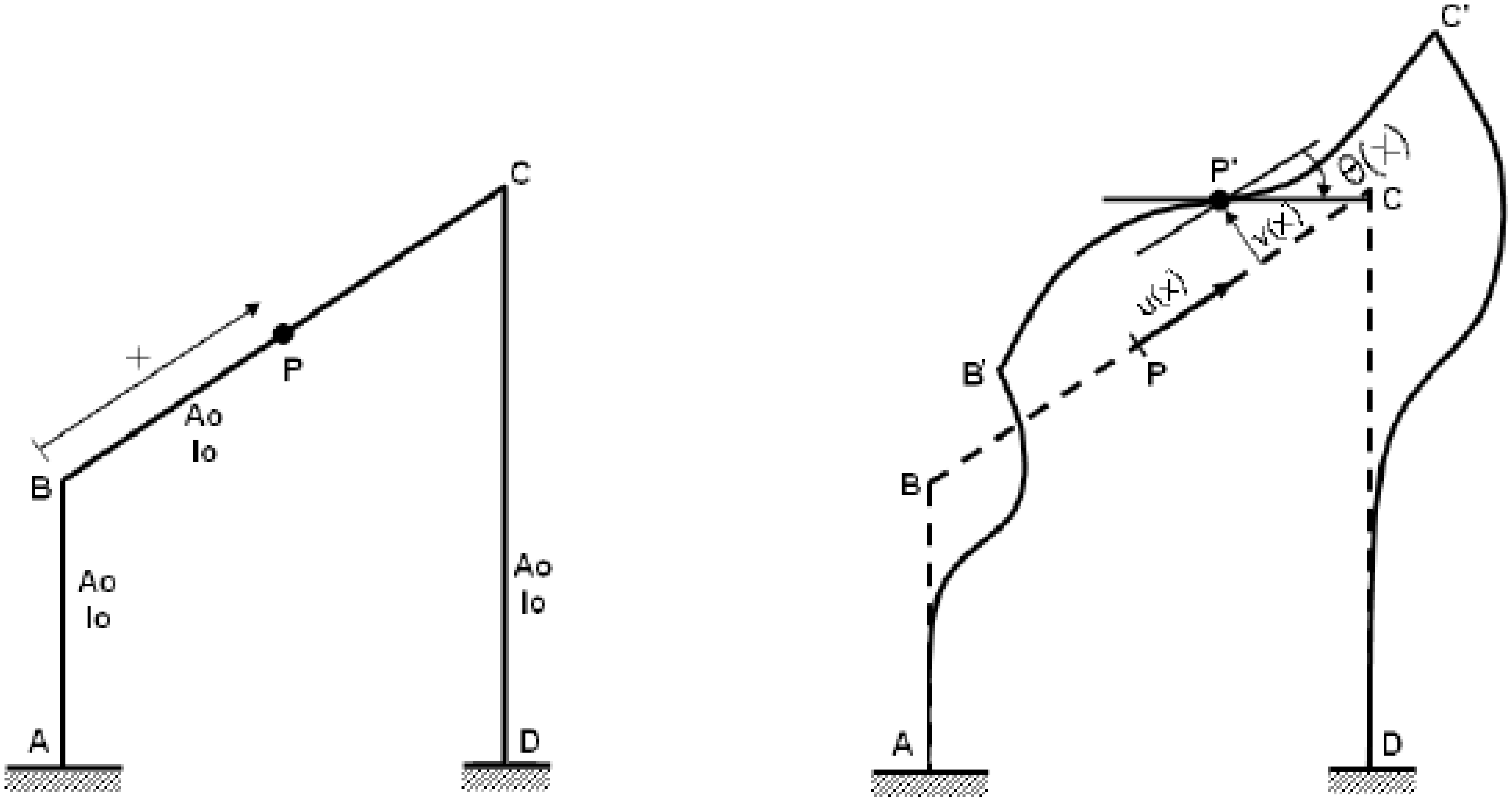
Ordenadas de la elástica

Dado un pórtico plano cualquiera. En el elemento inclinado BC se tiene un punto interior P. Ahora al actuar cualquier tipo de cargas este se deforma; el punto P pasa a P´. Se desea encontrar las ordenadas de la elástica $u(x)$, $v(x)$ y $\theta(x)$ para el punto P. Siendo:

$u(x)$ Componente de desplazamiento axial del punto P.

$v(x)$ Componente de desplazamiento transversal del punto P.

$\theta(x)$ Rotación del punto P.

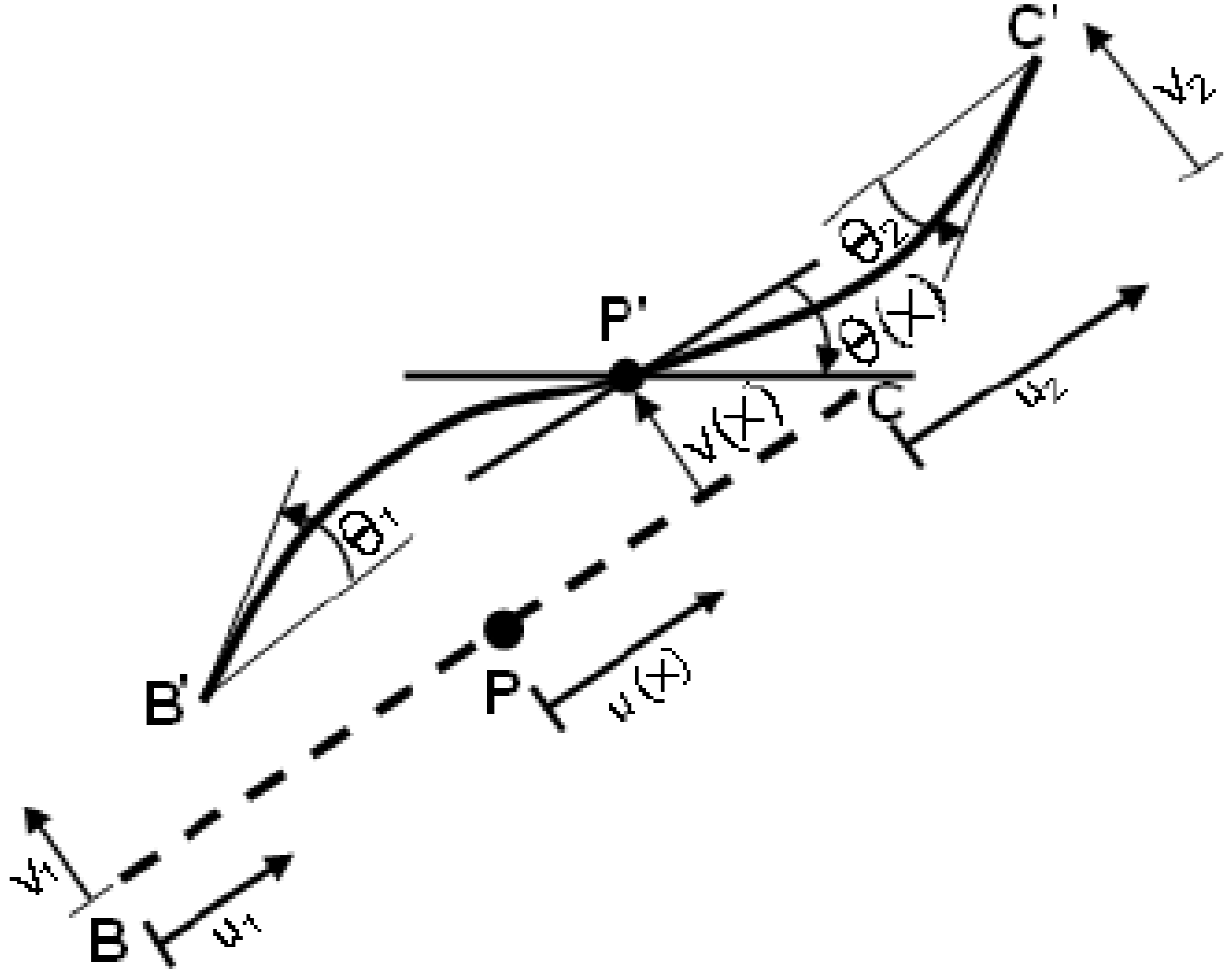


C
x
P
Ao
Io
B
Ao
Io
Ao
Io
A
D
C'
P'
θ(x)
C
v(x)
u(x)
B'
P
B
A
D

Ordenadas de la elástica

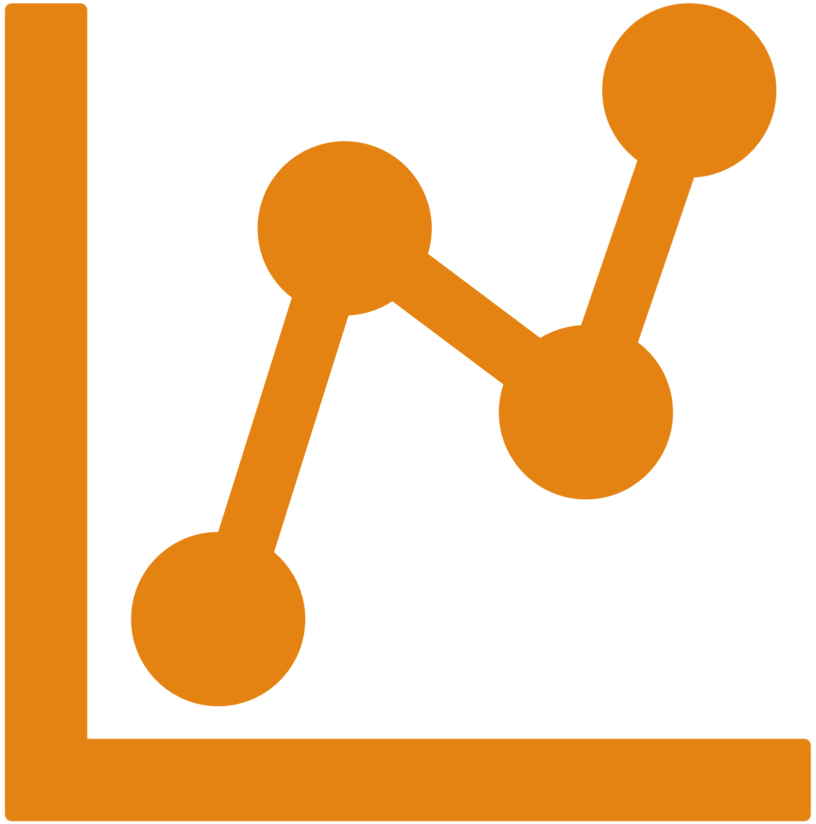
Para comprender el cálculo de las ordenadas de la elástica se aísla al elemento BC y se dibujan las coordenadas del elemento. Se destaca que para el marco teórico se pudo considerar un punto de cualquiera de las columnas, antes y después de deformarse y encontrar las ordenadas de la elástica, pero la explicación es general en la viga inclinada.

Para encontrar las ordenadas de la elástica **se verá la contribución de cada una de las coordenadas del elemento y luego se aplicará el principio de superposición lineal**.



C'
v_2
θ_2
P'
$\theta(X)$
C
u_2
$v(X)$
θ_1
B'
P
$u(X)$
v_1
B
u_1

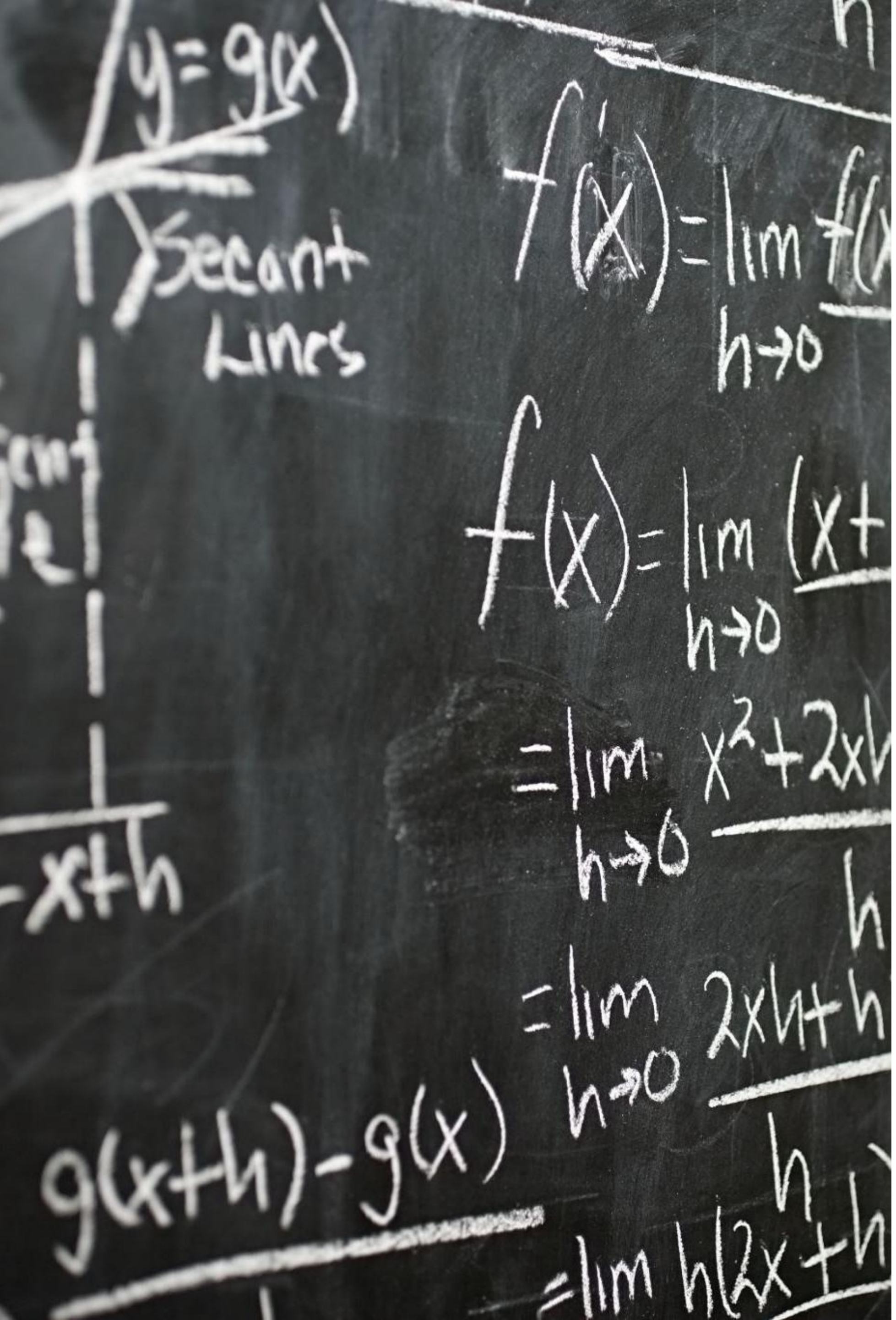
FUNCIONES DE FORMA O DE INTERPOLACIÓN



Introducción

Las funciones de forma tienen una aplicación muy amplia en el análisis estático y dinámico de estructuras razón por la cual se le da la importancia respectiva y se presentan algunas aplicaciones de las mismas.

Las aplicaciones que se dan están orientadas al cálculo de ordenadas de la elástica y obtención de momentos de empotramiento perfecto para cualquier tipo de carga, todo esto en miembros lineales de sección constante.

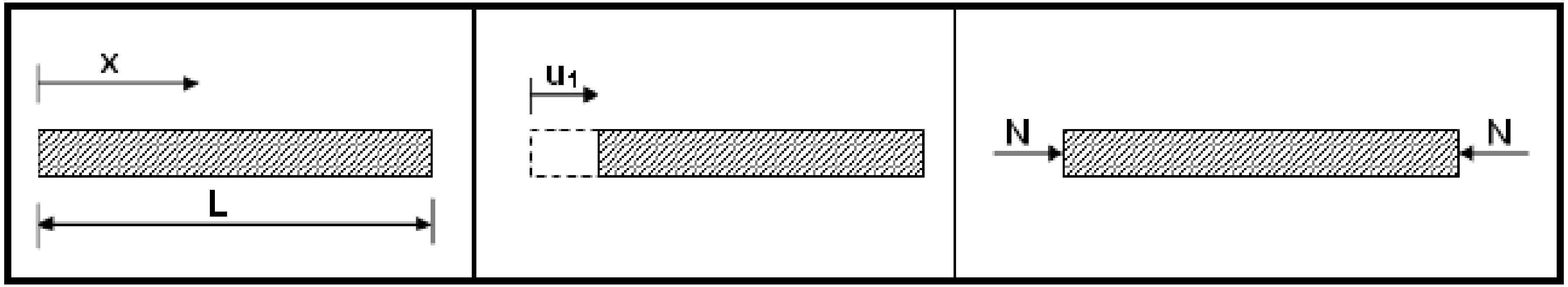


PRIMERA FORMA DE CÁLCULO: RESISTENCIA DE MATERIALES

Efecto de u_1 en la ordenada de la elástica

En el elemento lineal, se le aplica un desplazamiento axial en el nudo inicial. Se desea encontrar la ordenada de la elástica axial para encontrar el desplazamiento en un punto P, de la viga. Se destaca que solo existe un desplazamiento axial del nudo inicial u1 y las demás coordenadas locales son nulas.

Por facilidad a este elemento se lo considera horizontal, pero su aplicación es general. Para que el miembro experimente un desplazamiento u_1 es necesario aplicar una fuerza axial N.



Efecto de u_1 en la ordenada de la elástica

De la resistencia de materiales se conoce:

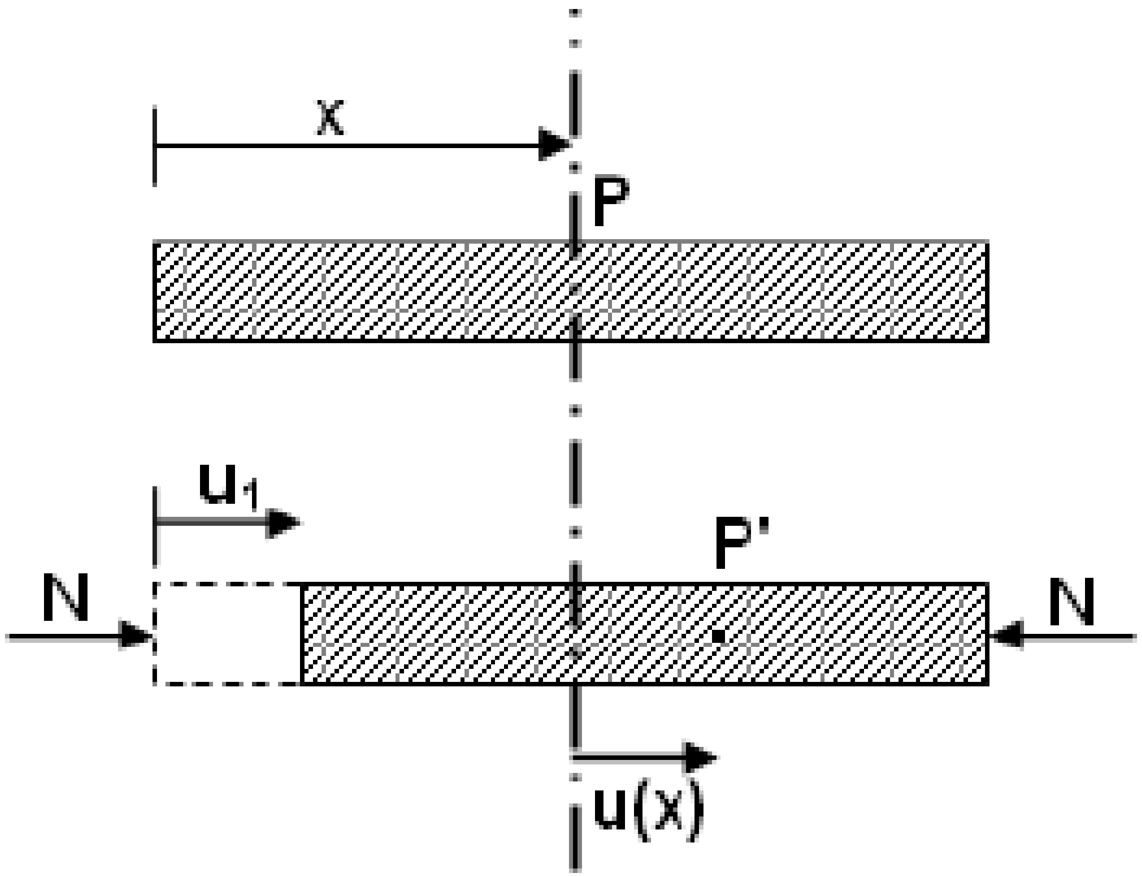
$$u_1 = \int_0^L \frac{N dx}{A(x)E}$$

Donde “A(x)” es el área de la sección transversal, para el caso de sección variable es función de “X”, “E” es el módulo de elasticidad del material y “N” es la fuerza axial, la misma que es constante, razón por la cual sale de la integral. Luego:

$$u_1 = N \int_0^L \frac{dx}{A(x)E}$$

En consecuencia, la fuerza axial que produce un corrimiento axial de magnitud u_1 es:

$$N = \frac{u_1}{\int_0^L \frac{dx}{A(x)E}}$$



Efecto de u_1 en la ordenada de la elástica

Ahora interesa calcular el desplazamiento longitudinal que experimenta un punto cualquiera P del elemento que se encuentra a una distancia X del nudo inicial, cuando existe la carga axial N, si el nudo final permanece fijo. En la figura se ilustra el problema en la parte superior de dicha figura se indica la posición inicial del punto P, que se encuentra a una distancia X y en la inferior se aprecia que el punto paso a P', se deformó axialmente $u(x)$. No existe deformación transversal por que el problema es de tipo axial.

Efecto de u_1 en la ordenada de la elástica

La deformación u(x) será igual a la deformación del nudo inicial u_1 menos la deformación producida por la fuerza axial N en el intervalo de longitud X.

$$u(x) = u_1 - \int_0^X \frac{Ndx}{A(x)E}$$

Por ser N constante se tiene:

$$u(x) = u_1 - N\int_0^X \frac{dx}{A(x)E}$$

Al reemplazar la ecuación de la carga axial, en la última ecuación y al factorar u_1 , se tiene:

$$u(x) = u_1 - \frac{u_1}{\int_0^L \frac{dx}{A(x)E}} * \int_0^X \frac{dx}{A(x)E}$$

Efecto de u_1 en la ordenada de la elástica

$$u(x) = u_1 \left(1 - \frac{\int_0^X \frac{dx}{A(x)E}}{\int_0^L \frac{dx}{A(x)E}} \right)$$

A la expresión encerrada entre paréntesis se le conoce con el nombre de función de forma o función de interpolación $\phi_1 = (x)$

$$\phi_1(x) = \left(1 - \frac{\int_0^X \frac{dx}{A(x)E}}{\int_0^L \frac{dx}{A(x)E}} \right)$$

Luego:

$$u(x) = u_1 \phi_1(x)$$

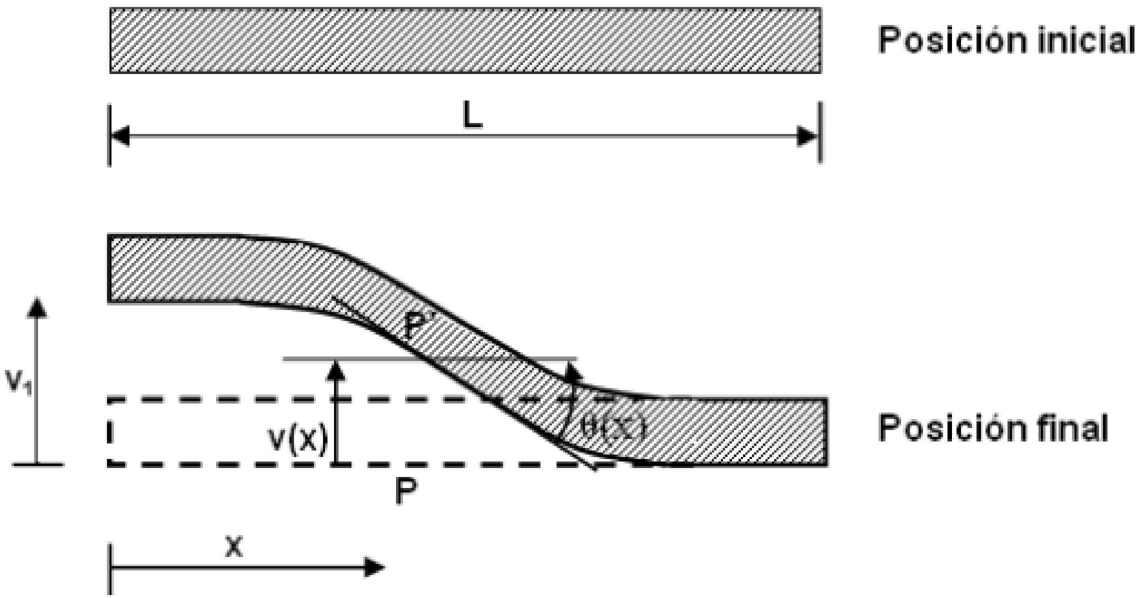
Efecto de u_1 en la ordenada de la elástica

Como se observa $\phi_1(x)$, al igual que las demás funciones de forma que se van a calcular, depende de las propiedades geométricas del elemento.

Para elementos de sección constante se tiene que: EA (x) = EA, al reemplazar este valor y resolver la integral definida, se encuentra:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L}$$

Efecto de v_1 en la ordenada de la elástica



En la figura se presenta un elemento en el cual al nudo inicial se da un desplazamiento vertical v_1; un punto P que se halla a una distancia X, pasa a P'. El desplazamiento vertical en este punto es $v(x)$. Se destaca que $u(x)$ = 0. Interesa calcular $v(x)$ para cuando solo existe v_1 y los demás desplazamientos y giros de los extremos son cero.

Efecto de v_1 en la ordenada de la elástica

Se va a resolver, un problema de flexión, sin carga en el tramo, $P_0 = 0$. Únicamente se tiene condiciones de borde.

La ecuación diferencial que gobierna la flexión, en un elemento de sección constante, en el que se desprecia el efecto del corte, es:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{P_0}{EI}$$

Las variables, no definidas todavía, son P_0 que es la carga transversal que actúa en el elemento, "I" es el momento de inercia a flexión del elemento y "v" es la ordenada transversal de la elástica. Al ser $P_0 = 0$, la ecuación diferencial se transforma, en:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

Efecto de v_1 en la ordenada de la elástica

Las condiciones de contorno, del problema, son:

1.- En X = 0, v (x) = v1

2.- En X = 0, v´(x) = 0

3.- En X = L, v (x) = 0

4.- En X = L, v´(x) = 0

Efecto de v_1 en la ordenada de la elástica

Las integrales de la ecuación, al ser la inercia constante, son:

$$1)\ EI\frac{d^3v}{dx^3} = A$$

$$2)\ EI\frac{d^2v}{dx^2} = AX + B$$

$$3)\ EI\frac{dv}{dx} = \frac{AX^2}{2} + BX + C$$

$$4)\ EIv(x) = \frac{AX^3}{6} + \frac{BX^2}{2} + CX + D$$

Efecto de v_1 en la ordenada de la elástica

Donde A, B, C y D son constantes de integración las mismas que se obtienen al aplicar las condiciones de borde en las ecuaciones 3 y 4.

Al reemplazar las dos primeras condiciones de borde, en las ecuaciones 3 y 4, se encuentran los valores de las constantes de integración D y C. Estas son:

Reemplazando la primera condición de borde en la ecuación 4:

$$D = EI * v_1$$

Reemplazando la segunda condición de borde en la ecuación 3:

$$C = 0$$

Efecto de v_1 en la ordenada de la elástica

Ahora al reemplazar las otras dos condiciones en las ecuaciones 3 y 4

Reemplazando la tercera condición de borde en la ecuación 4:

$$0 = \frac{AL^3}{6} + \frac{BL^2}{2} + CL + D$$

Reemplazando la cuarta condición de borde en la ecuación 3:

$$0 = \frac{AL^2}{2} + BL + C$$

Efecto de v_1 en la ordenada de la elástica

La solución del sistema de ecuaciones reporta luego de reemplazar C y D.

$$A = \frac{12EI}{L^3} v_1$$

$$B = -\frac{6EI}{L^2} v_1$$

Al reemplazar A, B, C y D en la expresión 4 se tiene:

$$EIv(x) = \frac{12EI}{L^3} v_1 * \frac{X^3}{6} - \frac{6EI}{L^2} v_1 \frac{X^2}{2} + EI * v1$$

De donde, luego de simplificar EI, se halla

$$v(x) = v_1 \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)$$

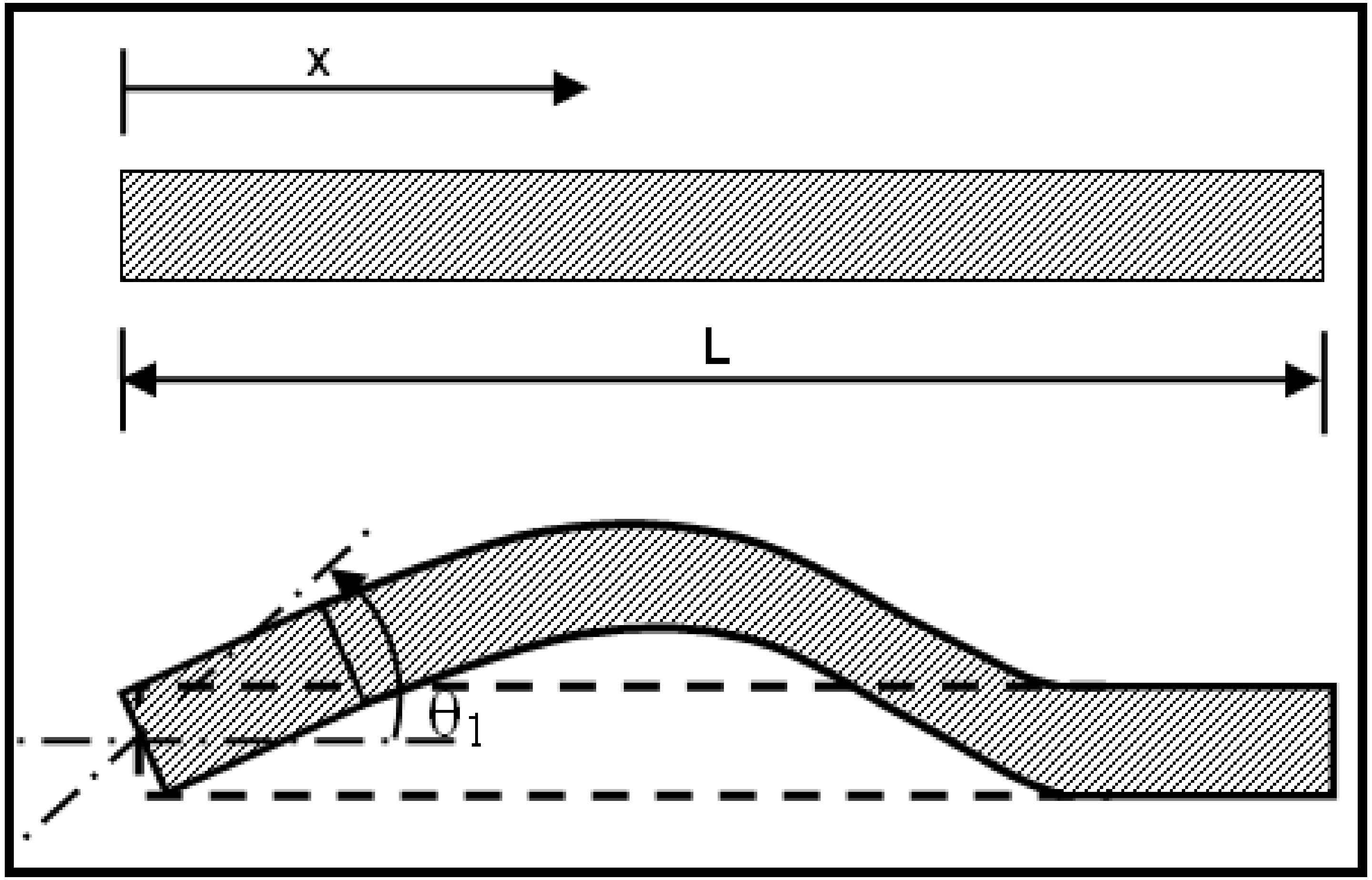
Efecto de v_1 en la ordenada de la elástica

Se denomina función de forma $\phi_2(x)$ a la expresión encerrada en el paréntesis.

$$\phi_2(x) = \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)$$

Luego:

$$v(x) = u_1\phi_2(x)$$



Efecto de θ_1 en la ordenada de la elástica

Efecto de θ_1 en la ordenada de la elástica

El problema es similar al cálculo de $\phi_3(x)$. Únicamente cambian las condiciones de borde, en este caso son:

1.- En X = 0, v (x) = 0

2.- En X = 0, v´(x) = θ1

3.- En X = L, v (x) = 0

4.- En X = L, v´(x) = 0

Efecto de θ_1 en la ordenada de la elástica

Las integrales de la ecuación, al ser la inercia constante, son:

$$1)\ EI\frac{d^3v}{dx^3} = A$$

$$2)\ EI\frac{d^2v}{dx^2} = AX + B$$

$$3)\ EI\frac{dv}{dx} = \frac{AX^2}{2} + BX + C$$

$$4)\ EIv(x) = \frac{AX^3}{6} + \frac{BX^2}{2} + CX + D$$

Efecto de θ_1 en la ordenada de la elástica

Donde A, B, C y D son constantes de integración las mismas que se obtienen al aplicar las condiciones de borde en las ecuaciones 3 y 4.

Al reemplazar las dos primeras condiciones de borde, en las ecuaciones 3 y 4, se encuentran los valores de las constantes de integración D y C. Estas son:

Reemplazando la primera condición de borde en la ecuación 4:

$$D = 0$$

Reemplazando la segunda condición de borde en la ecuación 3:

$$C = EI * \theta_1$$

Efecto de θ_1 en la ordenada de la elástica

Ahora al reemplazar las otras dos condiciones en las ecuaciones 3 y 4

Reemplazando la tercera condición de borde en la ecuación 4:

$$0 = \frac{AL^3}{6} + \frac{BL^2}{2} + CL + D$$

Reemplazando la cuarta condición de borde en la ecuación 3:

$$0 = \frac{AL^2}{2} + BL + C$$

Efecto de θ_1 en la ordenada de la elástica

La solución del sistema de ecuaciones reporta luego de reemplazar C y D.

$$A = \frac{6EI}{L^2}\theta_1$$

$$B = -\frac{4EI}{L}\theta_1$$

Al reemplazar A, B, C y D en la expresión 4 se tiene:

$$EIv(x) = \frac{6EI}{L^2}\theta_1 * \frac{X^3}{6} - \frac{4EI}{L}\theta_1\frac{X^2}{2} + EI * \theta_1 * X$$

De donde, luego de simplificar EI, se halla

$$v(x) = \theta_1\left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}\right)$$

Efecto de θ_1 en la ordenada de la elástica

Se denomina función de forma $\phi_3(x)$ a la expresión encerrada en el paréntesis.

$$\phi_3(x) = \left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2} \right)$$

Luego:

$$v(x) = \theta_1 \phi_3(x)$$

Resumen de funciones de forma para sección constante

En base a los cálculos realizados, por inducción, se puede observar que las ecuaciones que definen las ordenadas de la elástica, cuando no existe carga en los elementos, son:

$$u(x) = u_1 * \phi_1(x) + u_2 * \phi_4(x)$$

$$v(x) = v_1 * \phi_2(x) + \theta_1 * \phi_3(x) + v_2 * \phi_5(x) + \theta_2 * \phi_6(x)$$

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = v'(x)$$

Resumen de funciones de forma para sección constante

Donde $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x), \phi_5(x), \phi_6(x)$son las funciones de forma o de interpolación asociadas a: $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$.

Las funciones de forma para un elemento de sección constante son:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L}$$

$$\phi_2(x) = \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)$$

$$\phi_3(x) = \left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}\right)$$

$$\phi_4(x) = \frac{X}{L}$$

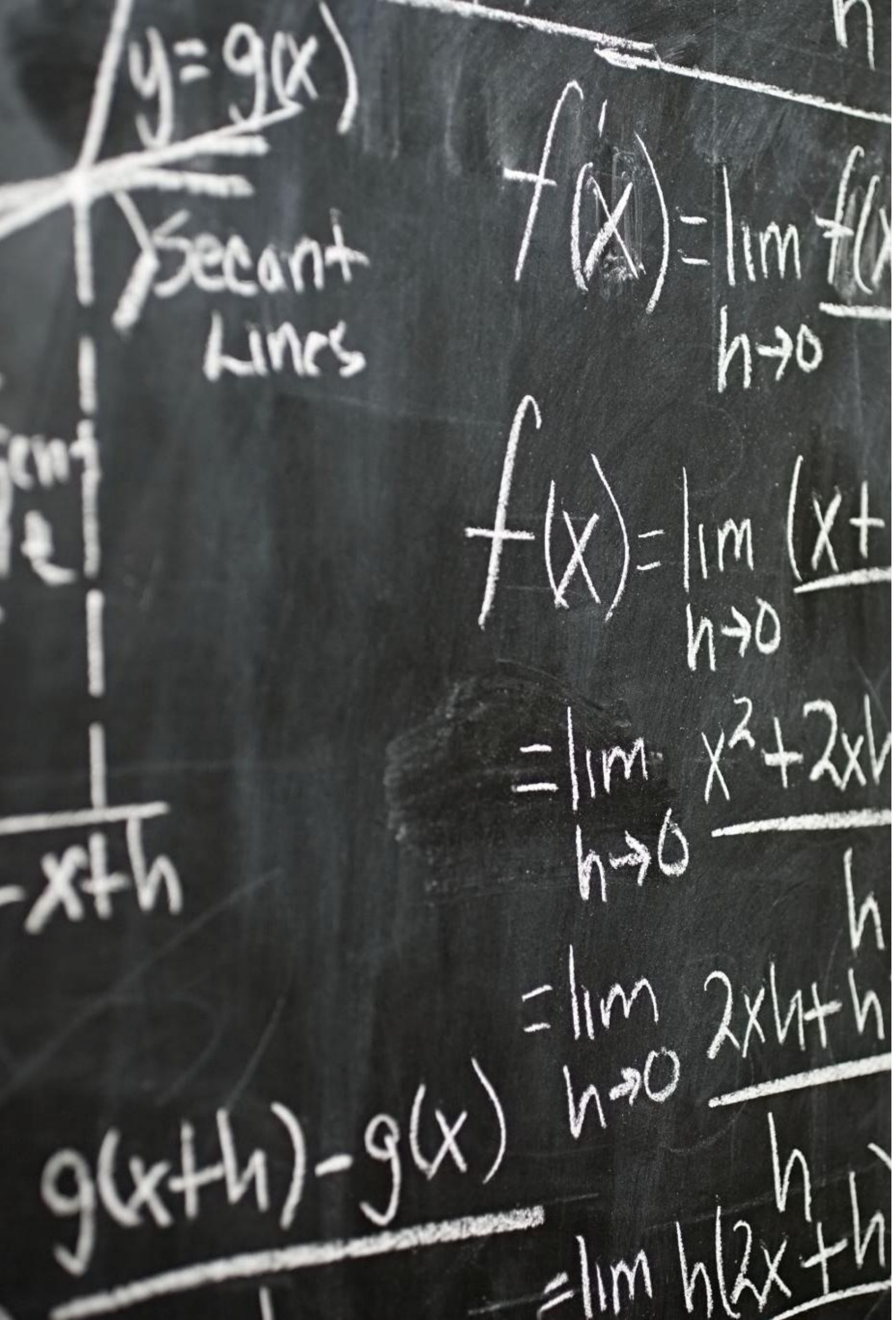
$$\phi_5(x) = \frac{X^2}{L^2}\left(3 - \frac{2X}{L}\right)$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

Resumen de funciones de forma para sección constante

Relaciones fundamentales:

$$\phi_1(x) + \phi_4(x) = 1$$
$$\phi_2(x) + \phi_5(x) = 1$$
$$\phi_3(x) + L\phi_5(x) + \phi_6(x) = X$$



SEGUNDA FORMA DE CÁLCULO: INTERPOLACIÓN

Problema axial: Cálculo de $\phi_1(x)$

En este apartado se obtiene $\phi_1(x)$, para ello se recuerda que solo existe un desplazamiento axial en el nudo inicial $u1$ y todo lo demás es cero. Entonces para encontrar $u(x)$ se debe encontrar una ecuación que pasa por dos puntos dados, con las condiciones de contorno presentadas en la siguiente tabla:

PUNTO	X	$u(x)$
1	0	$u1$
2	L	0

Problema axial: Cálculo de $\phi_1(x)$

La pendiente m de la recta, es:

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{0 - u1}{L - 0} = -\frac{u1}{L}$$

Luego de la ecuación de la recta, que pasa por un punto dado y se conoce su pendiente es:

$$y - y1 = m * (x - x1)$$

$$u(x) - u1 = -\frac{u1}{L} * (X - 0)$$

$$u(x) = u1 - \frac{u1}{L}X$$

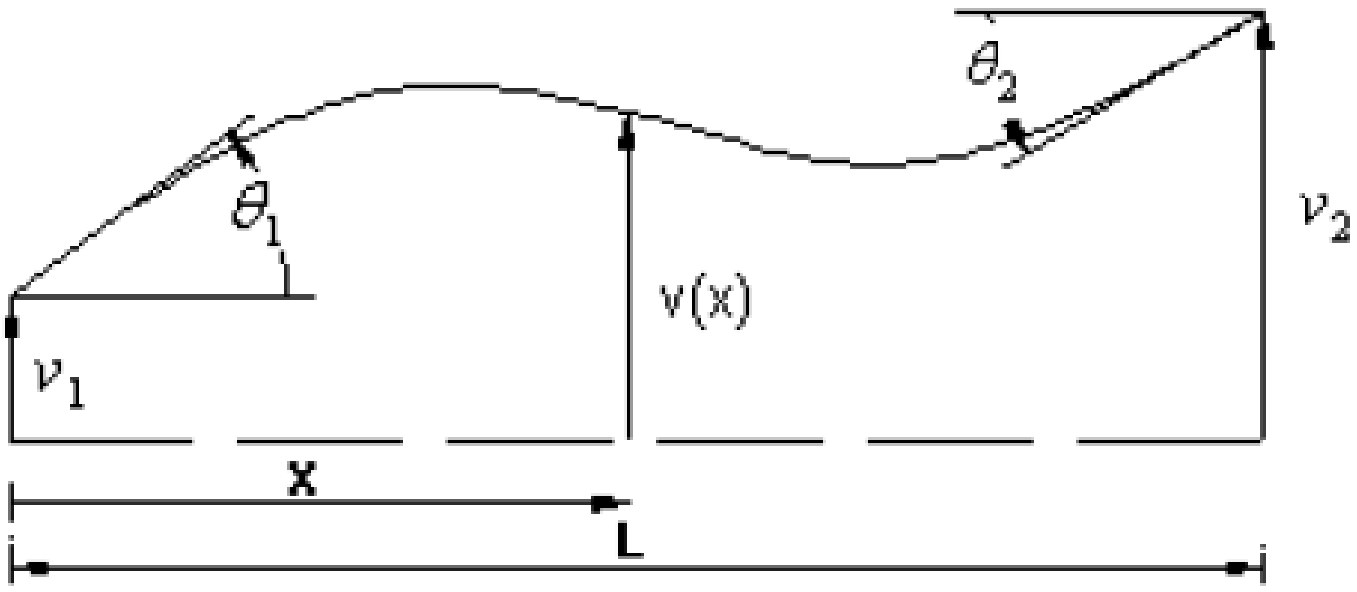
$$u(x) = u1\left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

$$u(x) = u1\phi_1(x)$$

Problema de flexión: Forma clásica

Ahora se desea encontrar la ordenada de la elástica $v(x)$ para las condiciones de borde indicadas en la tabla siguiente. Se denomina forma clásica cuando para el problema de flexión se tienen las cuatro condiciones indicadas en la tabla y en la figura siguientes:

Punto i	Cond 1	Cond 2
X_i	0	L
$v(x)$	v_1	v_2
$\theta(x)$	θ_1	θ_2



Problema de flexión: Forma clásica

Problema de flexión: Forma clásica

Al tener cuatro condiciones se debe trabajar con un polinomio cúbico:

$$v(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$\theta(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

Al aplicar las condiciones de contorno para el punto inicial, $X = 0$, se obtienen las constantes de integración D y C.

$$D = v_1$$
$$C = \theta_1$$

Al reemplazar las condiciones de borde del punto final, $X = L$, y los valores de C y D se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$AL^3 + BL^2 = v_2 - v_1 - \theta_1 L$$
$$3AL^2 + 2BL = \theta_2 - \theta_1$$

Problema de flexión: Forma clásica

La solución del sistema de ecuaciones lineales reporta:

$$A = -\frac{2}{L^3} * (v_2 - v_1 - \theta_1 L) + \frac{1}{L^2} * (\theta_2 - \theta_1)$$

$$B = -\frac{1}{L} * (\theta_2 - \theta_1) + \frac{3}{L^2} * (v_2 - v_1 - \theta_1 L)$$

Al reemplazar el valor de las constantes que definen el polinomio cúbico, se encuentra, luego de agrupar términos:

$$v(x) = \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right) v_1 + \left(\frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3}\right) v_2 + X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 \theta_1 - \frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right) \theta_2$$

Problema de flexión: Forma clásica

Por lo tanto, las funciones de forma son las siguientes:

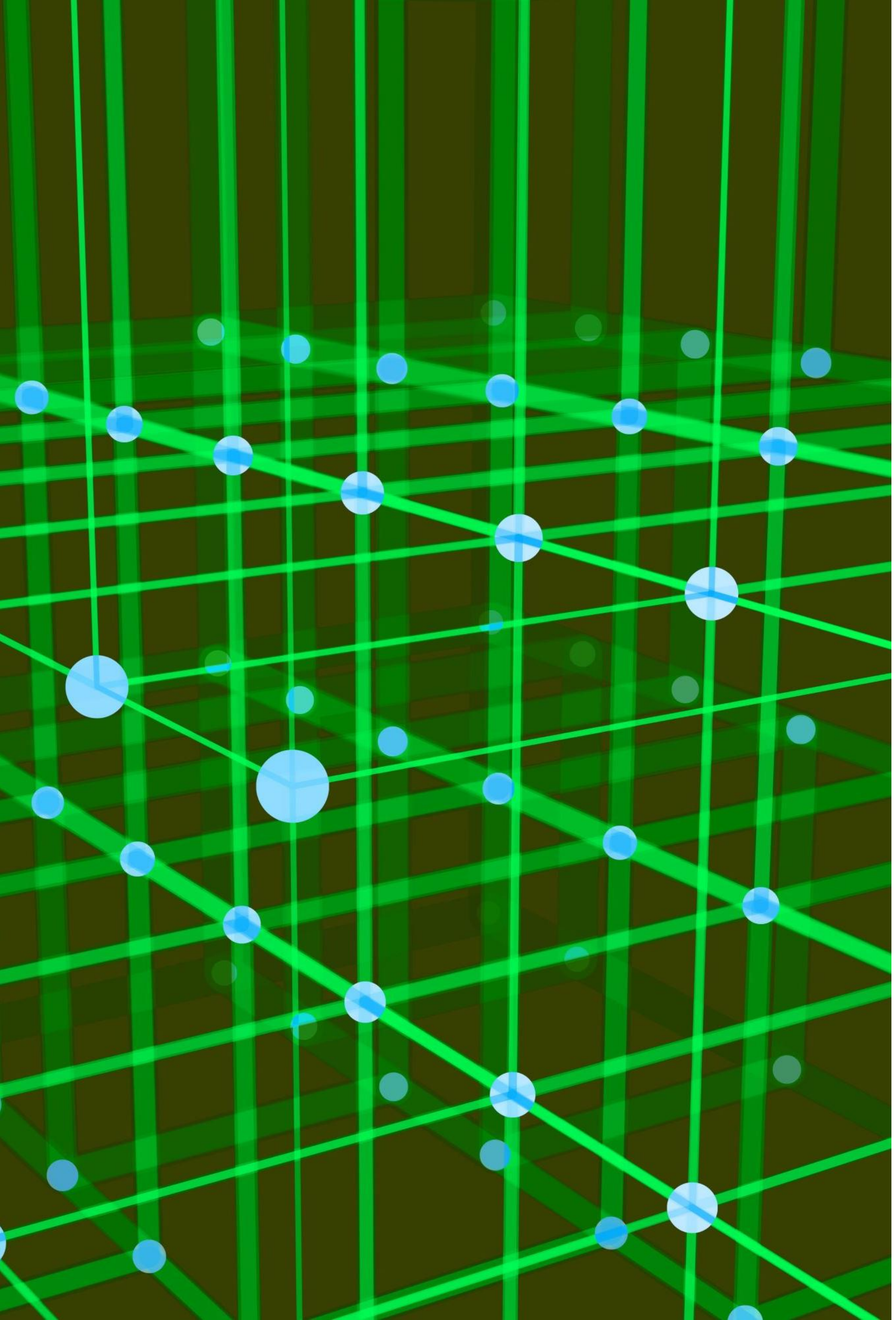
$$\phi_2(x) = \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)$$

$$\phi_3(x) = \left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}\right)$$

$$\phi_5(x) = \frac{X^2}{L^2}\left(3 - \frac{2X}{L}\right)$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

$$v(x) = v_1 * \phi_2(x) + \theta_1 * \phi_3(x) + v_2 * \phi_5(x) + \theta_2 * \phi_6(x)$$



Matriz de rigidez en coordenadas locales

Matriz de rigidez en coordenadas locales

De la Resistencia de Materiales se conoce que el Momento, M se obtiene a partir de la segunda derivada de la elástica y que el Corte, V derivando tres veces $v(x)$, con las siguientes ecuaciones:

$$M = EI * \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$V = EI * \frac{d^3v}{dx^3}$$

Al derivar la ecuación que define la ordenada de la elástica $v(x)$ dos y tres veces se obtiene:

$$M = EI\left[v_1\left(-\frac{6}{L^2}+\frac{12X}{L^3}\right)+\theta_1\left(-\frac{4}{L}+\frac{6X}{L^2}\right)+v_2\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12X}{L^3}\right)+\theta_2\left(-\frac{2}{L}+\frac{6X}{L^2}\right)\right]$$

$$V = EI\left[v_1\left(\frac{12}{L^3}\right)+\theta_1\left(\frac{6}{L^2}\right)-v_2\left(\frac{12}{L^3}\right)+\theta_2\left(\frac{6}{L^2}\right)\right]$$

Matriz de rigidez en coordenadas locales

Sea M, M', el momento en el nudo inicial y final respectivamente y V, V', el corte en el nudo inicial y final. Al encontrar estos momentos y cortantes con las ecuaciones obtenidas y al escribir en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} V \\ M \\ V' \\ M' \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} * \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

De donde, la matriz de rigidez de un elemento de sección constante $\boldsymbol{K}$, es:

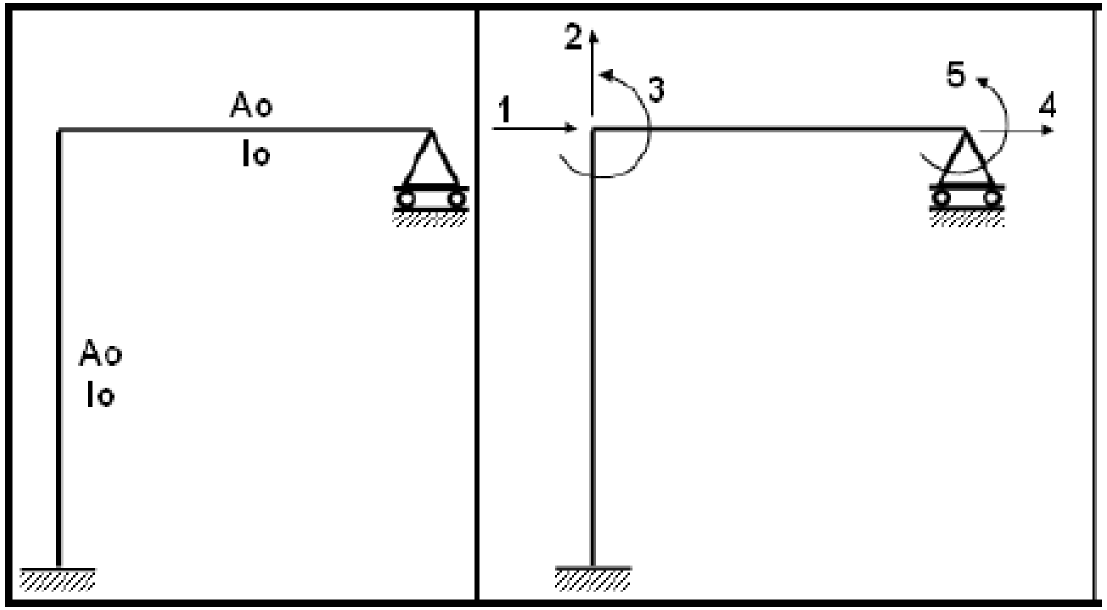
$$\boldsymbol{k} = \frac{EI}{L^3} * \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

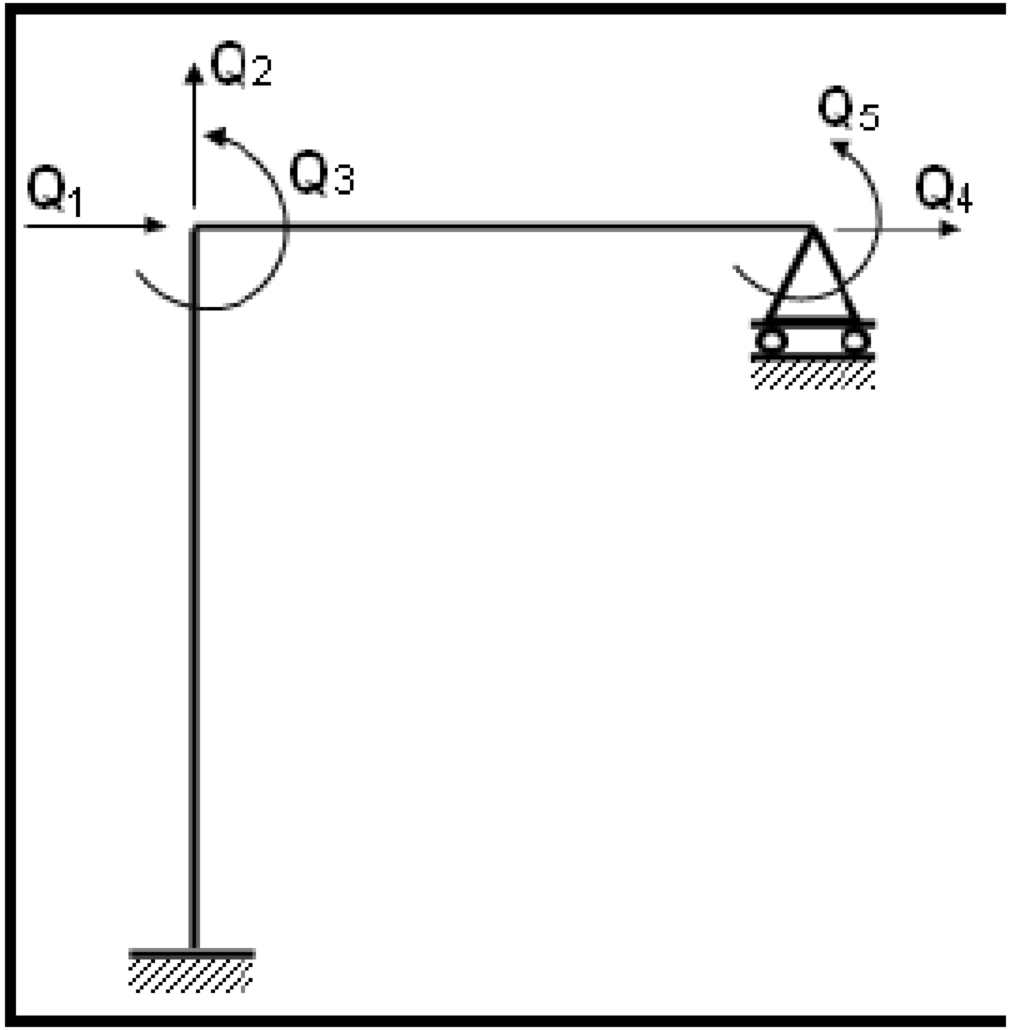
CARGAS GENERALIZADAS DE UNA ESTRUCTURA

Hipótesis considerada

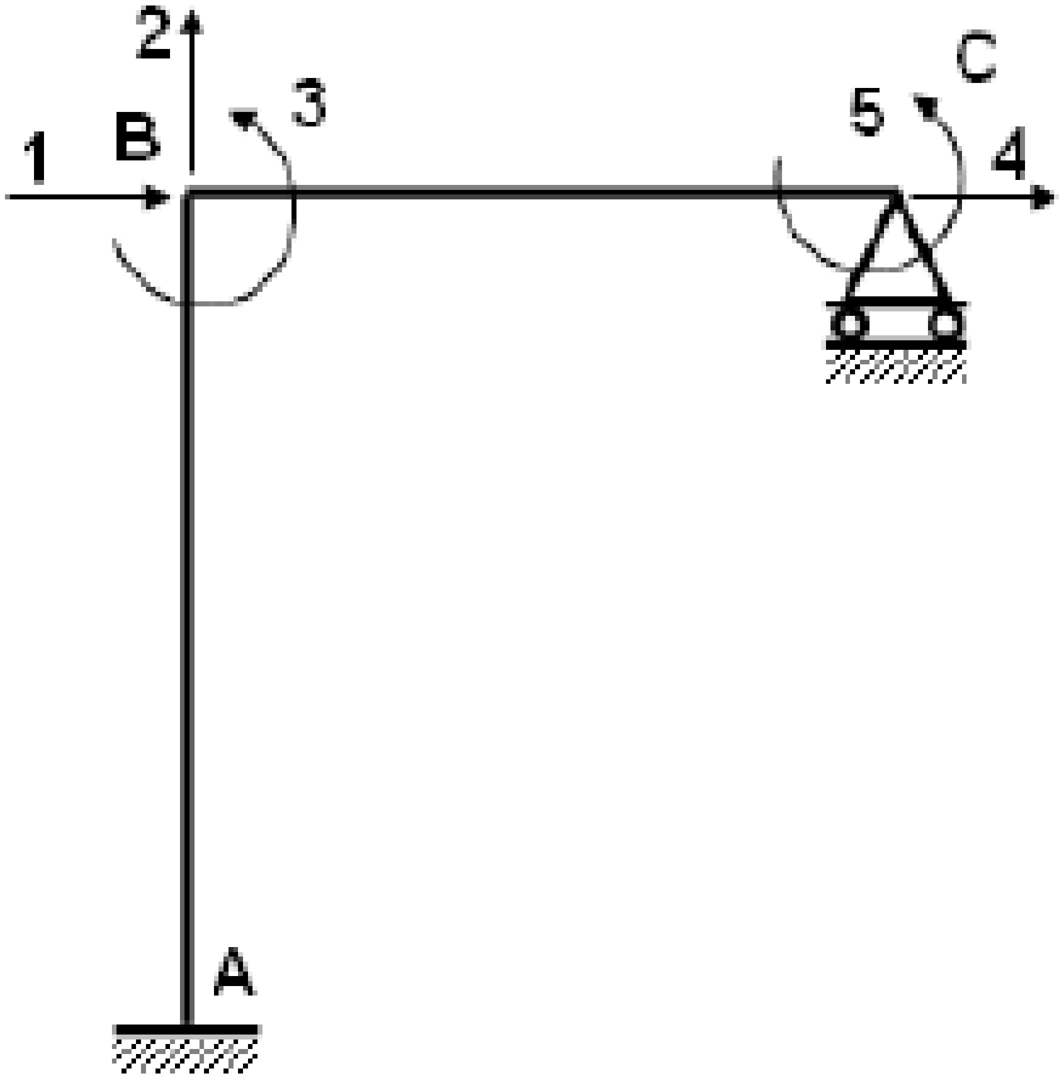
Se considera que las cargas actúan únicamente sobre las juntas y en la dirección que se han definido las coordenadas generalizadas.

Se entiende por cargas a las fuerzas o momentos externos que actúan sobre la estructura y se les conoce también con el nombre de acción o fuerza generalizada. El sentido positivo de las cargas será el que coincida con los sentidos definidos de las coordenadas generalizadas.





$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

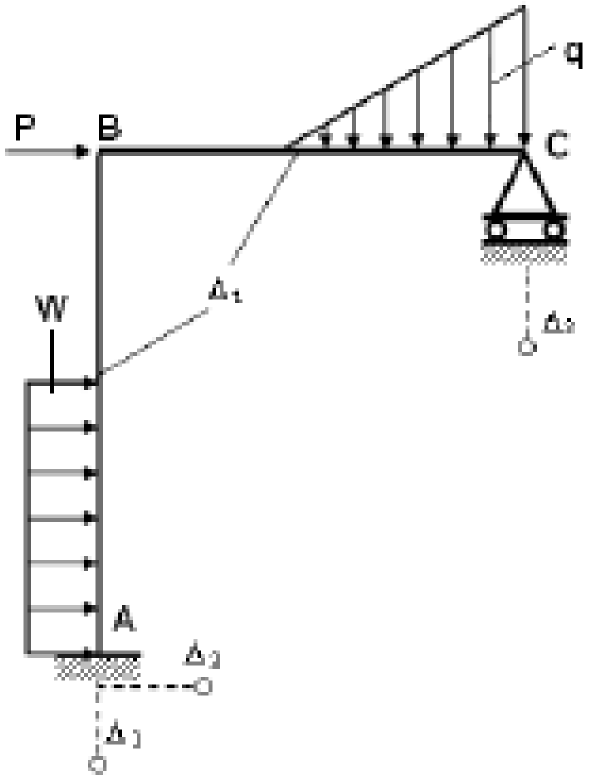


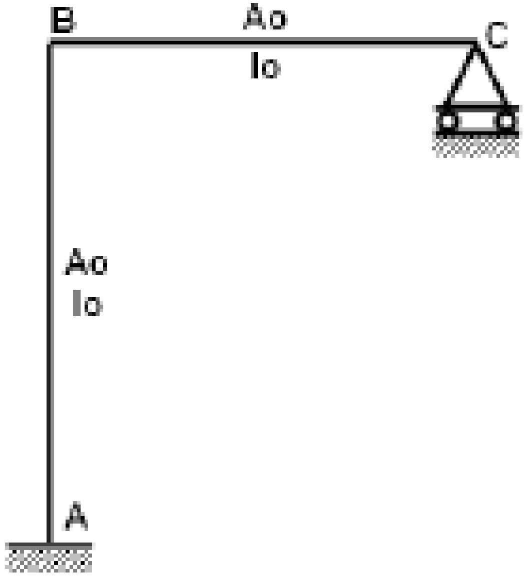
Sistema Q-q

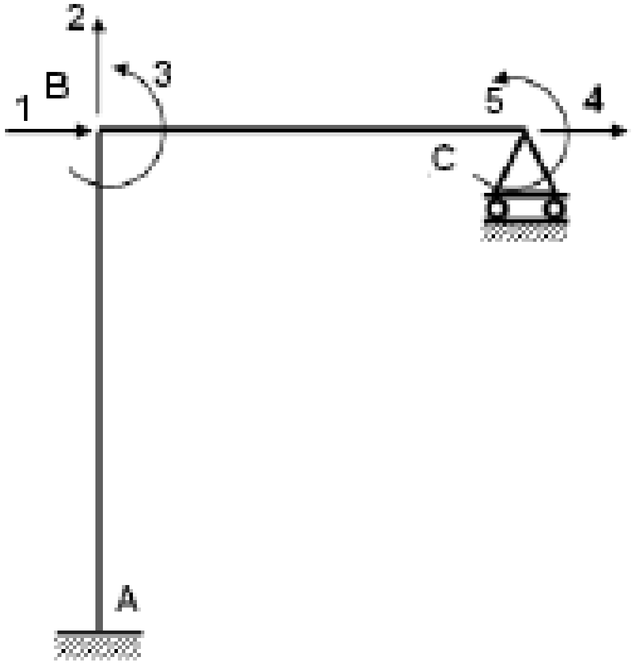
“Q” y “q” comparten el mismo sistema de coordenadas por lo que se puede dibujar simbólicamente cargas generalizadas y coordenadas generalizadas en un solo sistema al que se denomina “sistema Q-q” o solamente Q-q.

La fuerza es positiva si va de izquierda a derecha, o de abajo hacia arriba y el momento es positivo si es anti horario

Solución general del problema







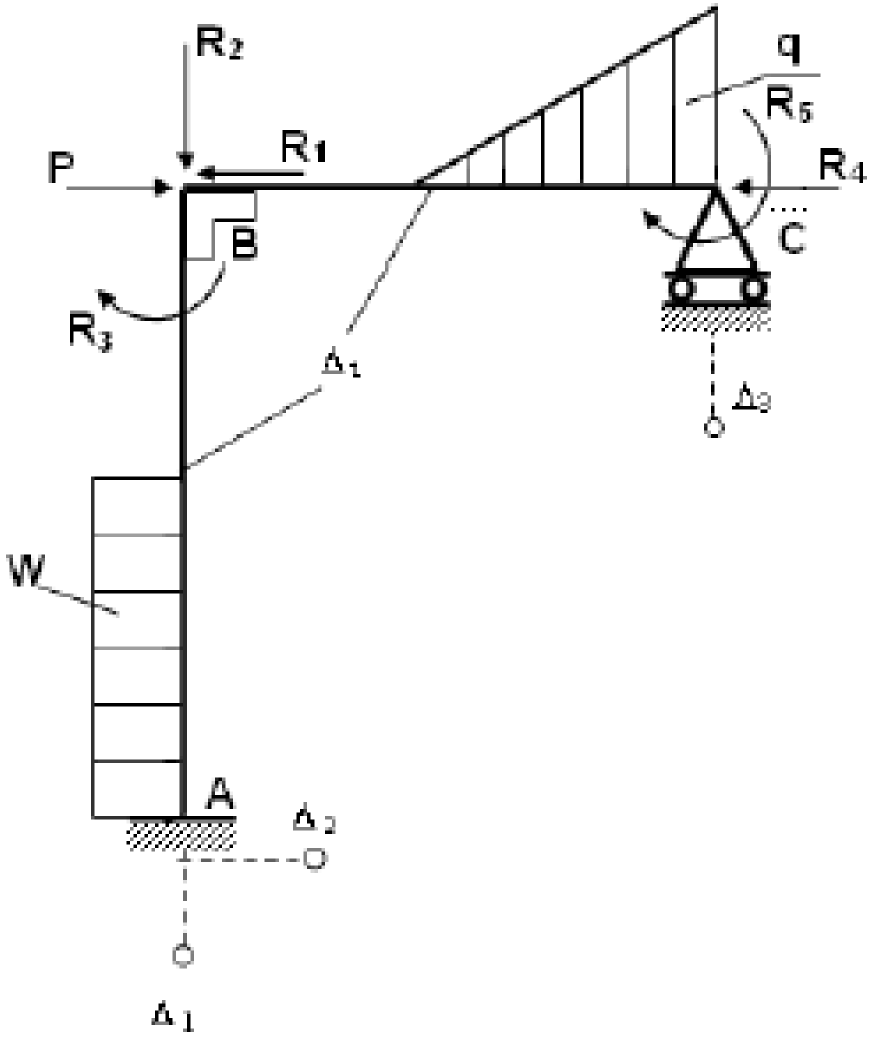
Solución general del problema

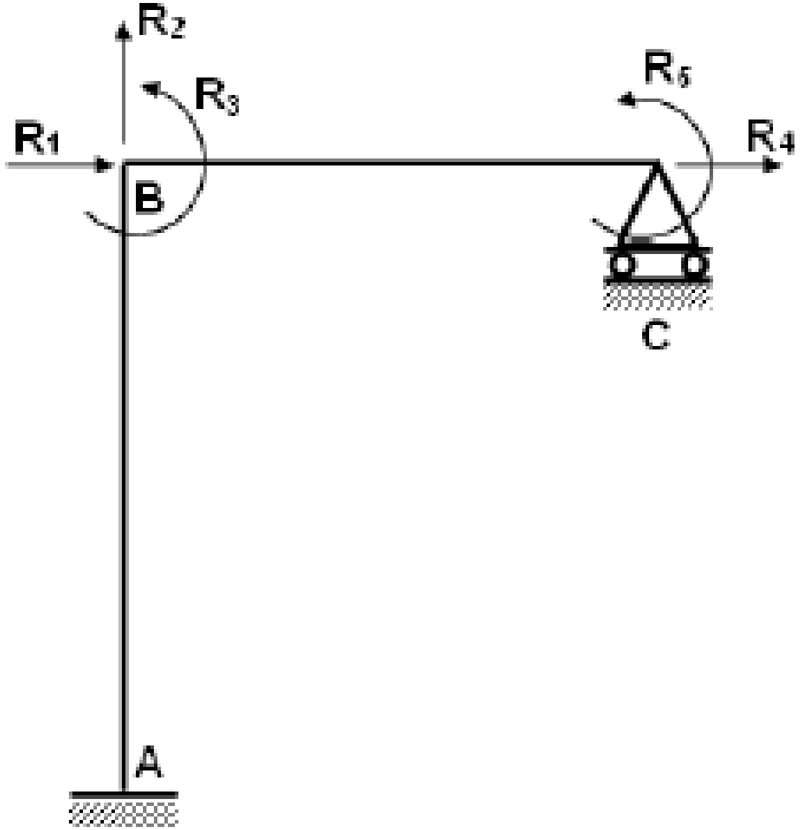
PROBLEMA PRIMARIO

Es aquel en el que actúan todas las cargas, asentamientos de apoyo, incrementos de temperatura, etc., todo lo que produce deformaciones. Pero el vector de coordenadas generalizadas “q” es nulo.

PROBLEMA COMPLEMENTARIO

En el problema complementario las fuerzas actúan con sentido contrario en el nudo, es decir se tiene ya la hipótesis considerada, de tener cargas y momentos concentrados en las juntas o nudos.





$$Q = \begin{bmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ R5 \end{bmatrix}$$

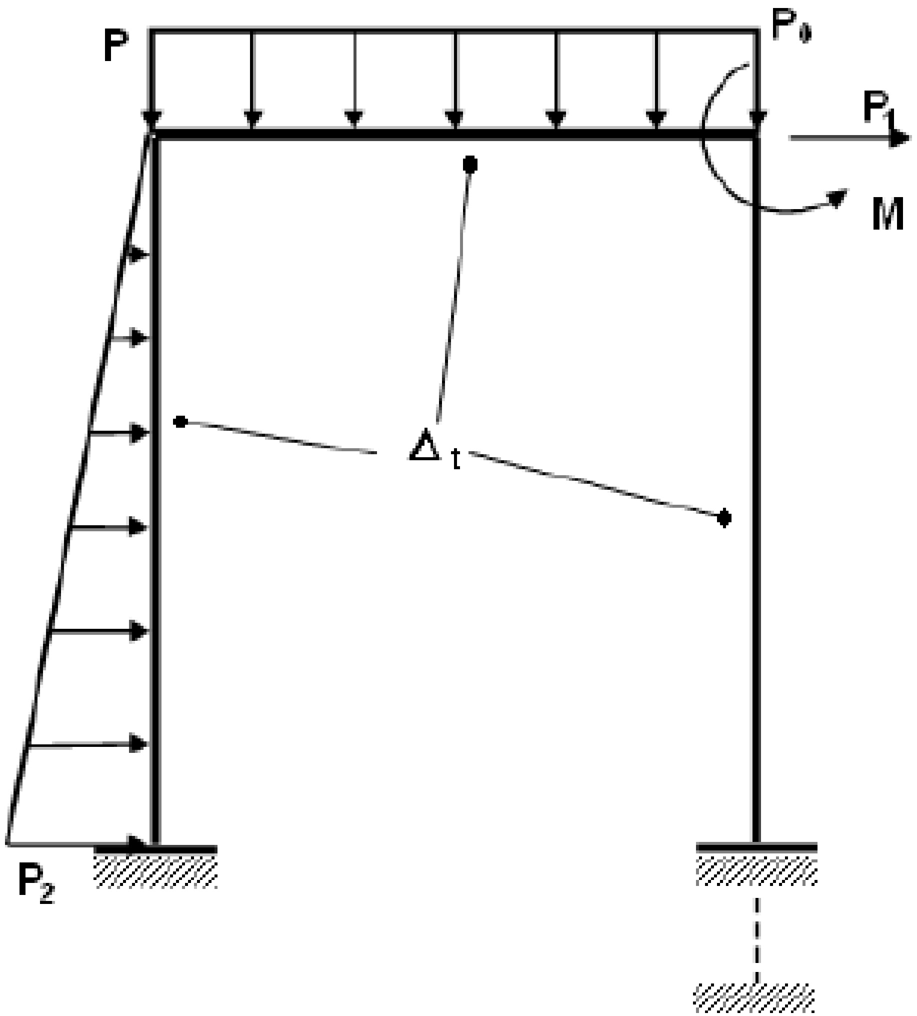
Vector de Cargas Generalizadas Q

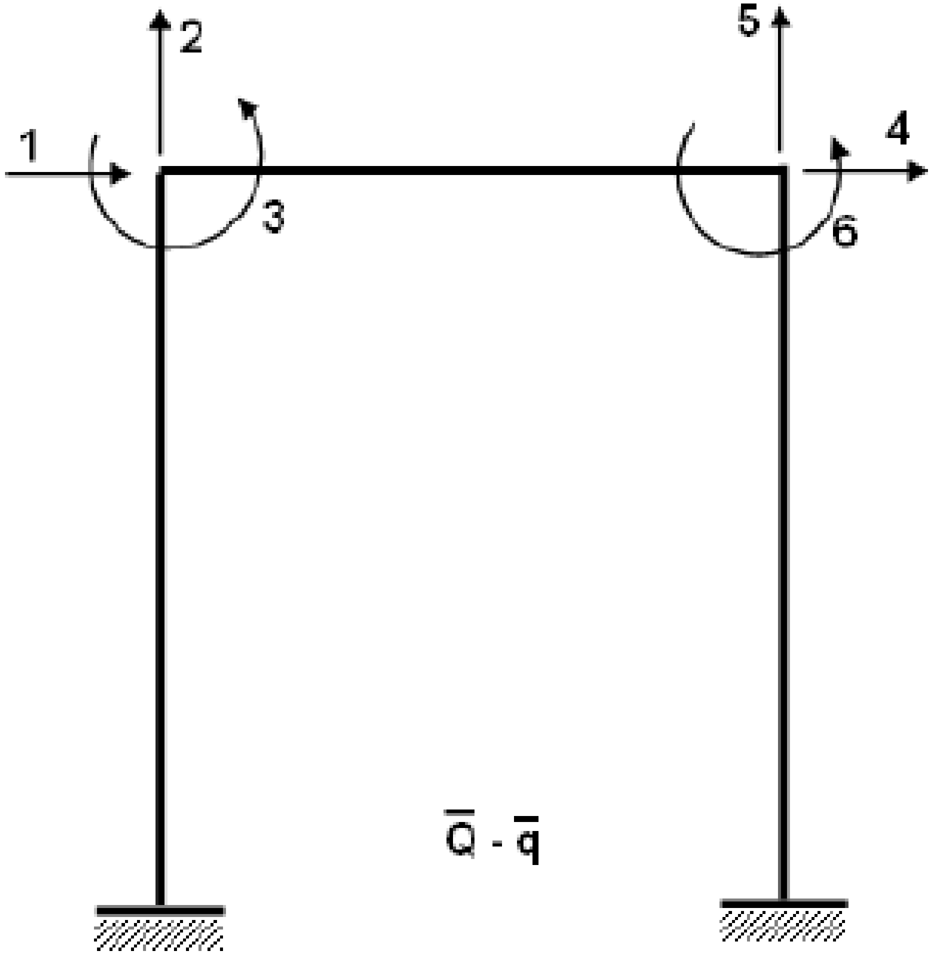
Problema Primario

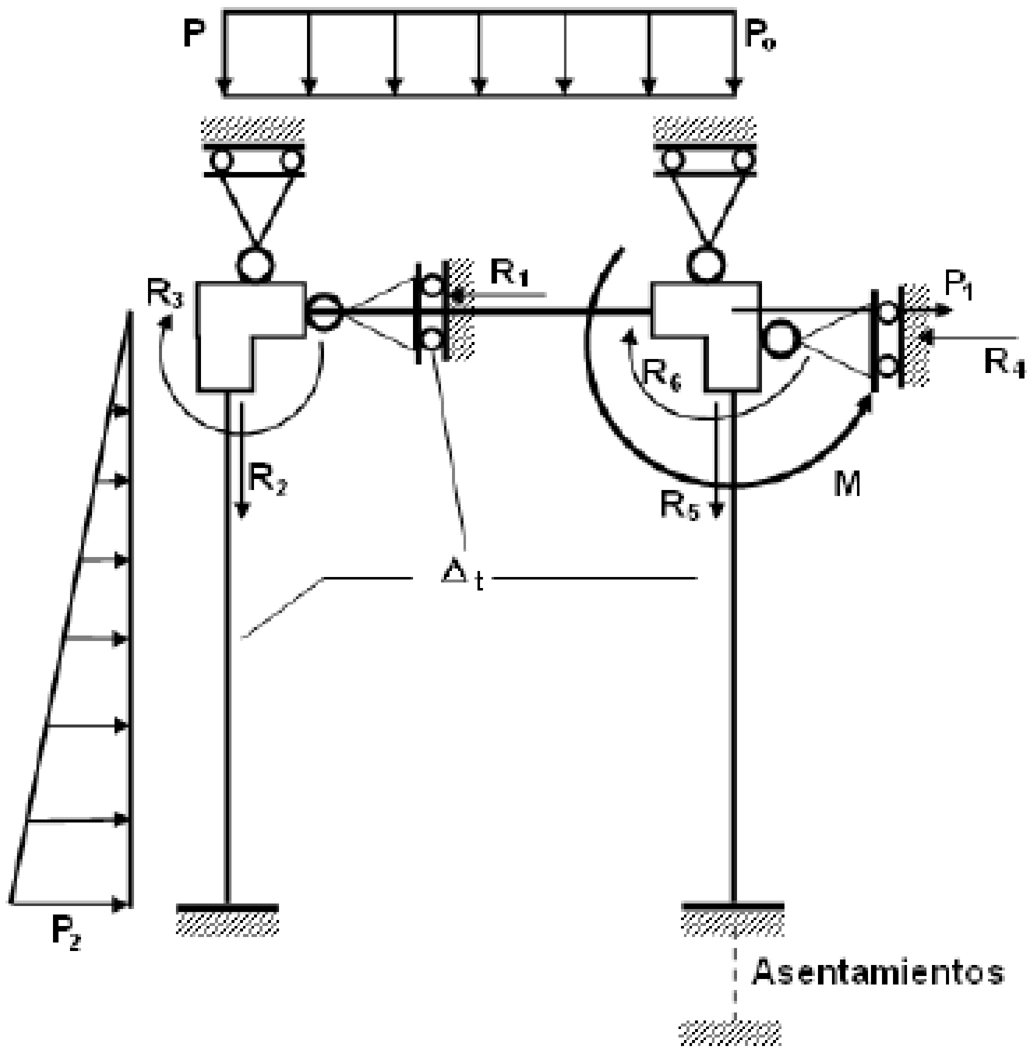
Es aquel en el cual actúa todas las cargas con la condición de que el vector “q” sea nulo. Esto se consigue colocando vínculos adicionales en las direcciones de los desplazamientos definidos por las coordenadas generalizadas, como consecuencia de estos vínculos se van a generar cargas de fijación que se los designa con la letra “R”.

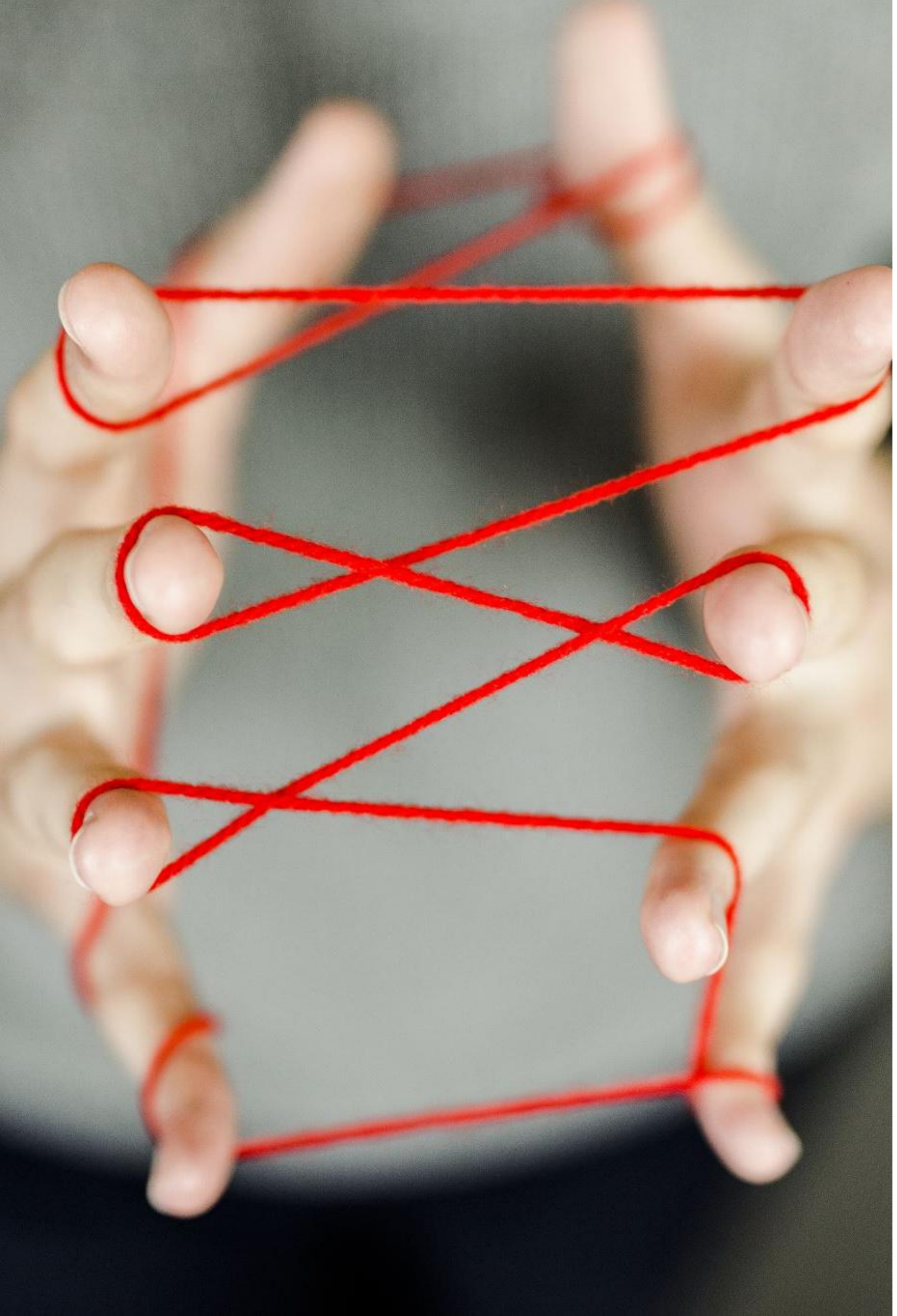
Por la condición de que el vector “q” es nulo, cada uno de los elementos de la estructura se encuentra empotrado-empotrado, independiente de la forma de los vínculos.

El Problema Primario tiene dos partes, que son: Equilibrio de Elementos y Equilibrio de Nudos y finaliza con el cálculo de las fuerzas de fijación Ri


P
P0
P1
M
Δ t
P2

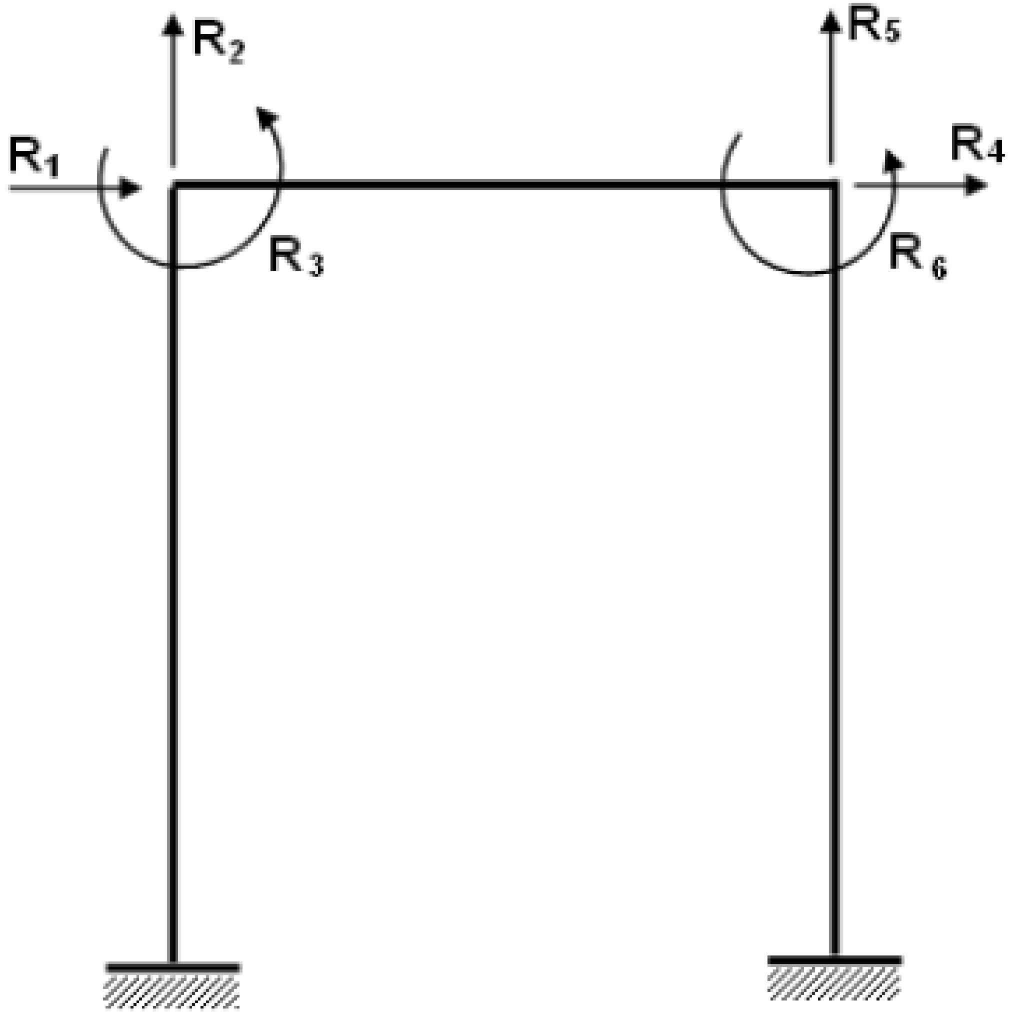

1
2
3
4
5
6
Q̄ - q̄


P
Po
R1
R3
P1
R4
R6
R2
R5
M
Δt
P2
Asentamientos



Problema Complementario

Ahora en la estructura solamente actúan las fuerzas de fijación Ri pero con sentido contrario al que tuvieron en el Problema Primario. Al actuar de esta manera se generan los desplazamientos y giros que tiene la estructura, los mismos que se consideran nulos en el Problema Primario.



$$Q = \begin{bmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ R5 \\ R6 \end{bmatrix}$$