Modelo General: Procesos de Nacimiento y Muerte

$N(t)$, estado sistema en el tiempo t

$\equiv$ Número de clientes en el sistema

Nacimiento: llegada de clientes el sistema

Muerte: salida de clientes una vez atendidos

Distribución de tiempos de llegadas $\rightarrow Exp(\lambda_n)$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$\lambda_n \rightarrow$ tasa de llegadas

Distribución de tiempos de servicio $\rightarrow Exp(\mu_n)$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$\mu_n \rightarrow$ tasa de salidas

Transición de estados $n(t)$ $n+1 \rightarrow$ nacimiento

$n-1 \rightarrow$ muerte

Proceso $\longrightarrow$ Cadena de Markov de tiempo continuo

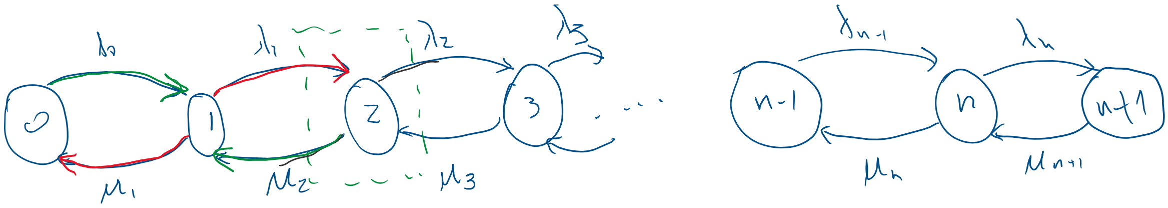
$\lambda_n, \mu_n \rightarrow$ tasas media en la distrib. exponencial pueden ser constantes

$n \equiv \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n-1} P_{n-1} \rightarrow$ tasa media de llegadas

$n \equiv \lambda_n P_n + \mu_n P_n \rightarrow$ tasa media de salidas

$P_n \rightarrow$ Probabilidad de que haya 'n' clientes en el sistema

$$\boxed{n(t)}$$



Estado 2

Ecuaciones de balance

$$\lambda_2 P_2 + \mu_2 P_2 = \lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3$$

$$\boxed{\lambda_n P_n + \mu_n P_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1}}$$

$n=0$: $\quad \mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 \longrightarrow P_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$

$n=1$: $\quad \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = \lambda_1 P_1 + \mu_1 P_1 \longrightarrow P_2 = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0$

$n=2$: $\quad \longrightarrow P_3 = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} P_0$

por recurrencia:

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_n \cdots \mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$P = \{P_0, P_1, P_2, \ldots P_n\}$$

Ejemplo:

En un puesto de mercado, se compran y venden bienes, los clientes entran según un proceso de Poisson de tasa 4 clientes/minuto y la permanencia en el puesto es un tiempo exponencial con un tiempo medio de 10 minutos. Suponiendo que la capacidad del puesto es infinita para recibir a clientes, se solicita:

a) Probabilidades de equilibrio

b) Número medio de clientes en el puesto del mercado

a) $X(t) \equiv$ número de personas en el mercado en el instante t

$\{X(t), t \geq 0\}$ proc. nac. muerte

$$\lambda_j = 4 \, cl/min \quad \forall j \geq 0$$

$$\mu_j = \frac{1}{10} j \, cl/min \quad \forall j \geq 0$$

$$\boxed{\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = \lambda_n P_n + \mu_n P_n}$$

$n = 0$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 = \frac{4}{1/10} P_0 = 40 P_0$$

$$P_n = \frac{1}{n!} 40^n P_0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 40^n P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 40^n} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} 40^n}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Desarrollo de Taylor} \\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\end{array}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} 40^n} = e^{-40}$$

$$e^{40} = 1 + \frac{40}{1!} + \frac{40^2}{2!} + \frac{40^3}{3!} + \dots + \frac{40^n}{n!} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 40^n$$

$$P_n = \frac{1}{n!} 40^n P_0 = \frac{40^n}{n!} e^{-40} , \quad n \geq 0$$

b) $\boxed{P = \{P_0, P_1, P_2, \dots P_n\}}$, $\sum P_n = 1$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

$$L = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n$$

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{40^n}{n!} e^{-40} \right)$$

$$= 40 e^{-40} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= 40 e^{-40} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{40^k}{k!}$$

$$L = 40 e^{-40} e^{40} = 40 \text{ clientes}$$

NOTACIÓN DEL MECANISMO DE SERVICIO

$\lambda_n \rightarrow$ Tasa media de llegadas cuando hay *n* clientes en el sistema, también número esperado de llegadas de clientes por unidad de tiempo cuando se encuentran *n* clientes en el sistema.

$\mu_n \rightarrow$ Tasa media de servicio en todo el sistema, esto es, número esperado de clientes que son despachados por unidad de tiempo por todos los servidores en su conjunto.

$s \rightarrow$ Número de servidores en el sistema de colas.

Muchas veces, el número de clientes en el sistema no afecta a la tasa media de llegadas y la tasa media de servicio. $\Rightarrow \lambda_n \rightarrow \lambda$

$\mu_n \rightarrow \mu \Rightarrow \mu_n = s\mu$

$\mu_s = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow$ Utilización promedio del sistema

$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$ (factor de utilización) = Congestión de un sistema

El factor de utilización da una idea de la capacidad del sistema que es utilizada por los clientes entrantes.

$\rho < 1 \Rightarrow \mu > \lambda$

$\rho > 1 \Rightarrow \lambda > \mu \rightarrow$ la cola crece con el tiempo

Probabilidad de que haya *n* clientes en el sistema en el instante *t*

$$P_n(t) = (1-\rho)\rho^n \quad , \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$N \equiv$ Número de clientes en el sistema en estado estable

$N(t) \equiv$ Número de clientes en el sistema en el instante t . $t \geq 0$

Longitud de la cola $= N(t) - s$

$L \equiv$ Número esperado de clientes en el sistema

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

el sumatorio de las probabilidades de cada estado por el número de clientes en su correspondiente estado

Longitud esperada de la cola (L_q)

se trata de una variable que es medida de los clientes esperando en cola excluidos aquellos que están recibiendo servicio, se expresa por la fórmula

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$$

$W \equiv$ Tiempo de espera en el sistema incluyendo el tiempo de servicio $\left(\frac{1}{\mu}\right)$ para cada cliente.

En condiciones de estabilidad, se utiliza la esperanza de la variable aleatoria: $W = E(w) = \frac{L}{\lambda}$

$W_q \equiv$ Tiempo de espera en la cola excluido el tiempo de servicio $\left(\frac{1}{\mu}\right)$ para cada cliente. En condiciones de estabilidad se tiene:

$$W_q = E(w_q) = \frac{L_q}{\lambda}$$

En un proceso de colas en estado estable, el número de clientes en el sitsema independientemente del tiempo transcurrido es igual a la tasa de llegadas por el tiempo de espera medio en el sistema, es decir:

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

$$L = L_s + L_q$$

$$T_{sis} = T_q + T_s \equiv W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Ejemplo:

En el mostrador de facturación de una aerolínea llega un promedio de 45 clientes por hora, cuando su capacidad media es de 60 clientes por hora. Si un cliente espera una media de 3 minutos en la cola, se pide calcular:

a) Tiempo medio que un cliente pasa en la facturación.

b) Número medio de clientes en la cola.

c) Número medio de clientes en el sistema en un momento dado.