DEBER IV

Demostrar que : $L\{t^2 \operatorname{sen} bt\} = \dfrac{6bs^2 - 2b^3}{(s^2+b^2)^3}$

Demostrar que: $L\{\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{s}$

Calcular $L\{F(t)\}$ sí:

a) $F(t) = e^{-3t}\displaystyle\int_0^t t \operatorname{sen} 2t\,dt$ **Rpta.** $F(s) = \dfrac{4}{(s^2+6s+13)^2}$

b) $F(t) = e^{-3t}\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{t}$ **Rpta.** $F(s) = \operatorname{arctg}(\dfrac{s+3}{2})$

Halla $L\{t^3 \cos t\}$ **Rpta.** $f(s) = \dfrac{6s^4 - 36s^2 + 6}{(s^2+1)^4}$

Halla $L\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 t.\cos t}{t}\}$ **Rpta.** $f(s) = \dfrac{1}{8}\ln(\dfrac{s^2+9}{s^2+1})$

Halla $L\{\operatorname{sen}(a+t)\}$ **Rpta.** $f(s) = \dfrac{\cos a + s.\operatorname{sen} a}{s^2+1}$

Calcula $L\{\cos^2 bt\}$ **Rpta.** $f(s) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{s} + \dfrac{s}{s^2+4b^2})$

Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}dt$ **Rpta.** $\ln 3$

Calcular la integral $\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen} at - \cos bt}{t}dt$ **Rpta.** $\ln(\dfrac{a}{b})$

Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^\infty t\,e^{-2t}\cos t\,dt$ **Rpta.** $\dfrac{3}{25}$

Hallar la Transformada Inversa de:

a) $L^{-1}\{\dfrac{2s-\pi}{s(s-\pi)}\}$ **b)** $L^{-1}\{\dfrac{s-a}{s(s+a)}\}$

c) $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^2-5} + \dfrac{1}{s^{5/2}}\}$ **d)** $L^{-1}\{\dfrac{2s+3}{s^2+9}\}$

Rpta. **a)** $F(t)=2e^{\pi t}-2e^{\frac{\pi}{2}t}\operatorname{senh}\frac{\pi}{2}t$ **b)** $F(t)=e^{-at}-2e^{-\frac{a}{2}t}\operatorname{senh}\frac{at}{2}$

c) $F(t)=\dfrac{\operatorname{senh}(\sqrt{5}t)}{\sqrt{5}}+\dfrac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$ **d)** $F(t)=2\cos 3t+\operatorname{sen}3t$

Mediante fracciones parciales, hallar la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\dfrac{s+3}{(s+1)(s-3)}\}$ **Rpta.** $F(t)=\dfrac{1}{2}(3e^{t}-e^{-t})$

b) $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^2(s+1)}\}$ **Rpta.** $F(t)=t-1+e^{-t}$

c) $L^{-1}\{\dfrac{s+1}{9s^2+6s+5}\}$ **Rpta.** $F(t)=\dfrac{1}{9}e^{-t/3}(\dfrac{\cos 2t}{3}+\dfrac{\operatorname{sen}2t}{3})$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $\dfrac{d^3y}{dt^3}+2\dfrac{d^2y}{dt^2}-11\dfrac{dy}{dt}-12y=4$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

Rpta. $y=\dfrac{e^{3t}}{21}-\dfrac{e^{-4t}}{21}+\dfrac{e^{-t}}{3}-\dfrac{1}{3}$

b) $t^2y''(t)-2y(t)=2$ **Rpta.** $y=-1-ct^2$

c) $y''(t)+2t\,y'(t)-4y(t)=6$, $y(0)=y'(0)=0$ **Rpta.** $y=3t^2$

d) $y''(t)-8t\,y'(t)+16y(t)=3$, $y(0)=y'(0)=0$ **Rpta.** $y=\dfrac{3}{2}t^2$

e) $y''(t)-4t\,y'(t)+4y(t)=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=10$ **Rpta.** $y = 10\,t$

f) $\dfrac{d^3y}{dt^3}+4\dfrac{d^2y}{dt^2}+5\dfrac{dy}{dt}+2y=10\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=3$

Rpta. $y=-e^{-2t}+2e^{-t}-2t\,e^{-t}-\cos t+2\operatorname{sen}t$

g) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=e^{-2t}\operatorname{sen}t$, $y(0)=y'(0)=0$

Rpta. $y=\dfrac{1}{8}(\operatorname{sen}t-\cos t)+\dfrac{e^{-2t}}{8}(\operatorname{sen}t+\cos t)$

Una viga horizontal de 2ℓ metros de longitud está apoyada en sus extremos. Hallar la ecuación de su curva y su máxima deformación vertical (flecha) cuando tiene una carga uniformemente distribuida de ω Kg/m.

Rpta: $y = \frac{\omega}{24EI}(4\ell x^3 - x^4 - 8\ell^3 x)$; $-y \ \max = \frac{5\omega\ell^4}{24EI}$

Una viga horizontal de ℓ metros de longitud está empotrada en un extremo y libre en el otro. Hallar la ecuación de su curva elástica y la flecha máxima si la carga uniformemente repartida es ω Kg/m. **Rpta:** $y = \frac{\omega}{24EI}(4\ell x^3 - 6\ell^2 x^2 - x^4)$; $-y \ \max = \frac{\omega\ell^4}{8EI}$

Una viga horizontal de ℓ metros de longitud está empotrada en ambos extremos. Hallar la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima si tiene una carga uniformemente distribuida de ω Kg/m. **Rpta:** $y = \frac{\omega x^2}{24EI}(2\ell x - \ell^2 - x^2)$, $-y \ \max = \frac{\omega\ell^4}{384EI}$

Resolver el problema 18) si además actúa un peso W Kg. en el punto medio de la viga.

Rpta: $y = \frac{\omega}{24EI}(2\ell x^3 - \ell^2 x^2 - x^4) + \frac{W}{48EI}(\ell^3 - 6\ell^2 x + 9\ell x^2 - 4x^3)$, $\frac{\ell}{2} \le x \le \ell$

$-y \ \max = \frac{1}{384EI}(\omega\ell^4 + 2W\ell^3)$

Se ha suspendido un peso de 7.26 Kg. cuya constante de rigidez es 7.44 Kg/m. se aplica una fuerza externa dada por F(t) = 10.9 sen10t, $t \ge 0$, se supone que actúa una fuerza de amortiguamiento que expresada en Kg. es numéricamente igual a 5.95 v, siendo v la velocidad instantánea del peso en m/seg. inicialmente el peso se encuentra en reposo en su posición de equilibrio. Halle la posición del peso en cualquier instante.

Rpta: $x = 0.2925e^{-1.55t} - 0.212e^{-6.45t} - 0.0915\,\text{sen}\,10t - 0.0813\cos 10t$

Se suspende un peso de 14.5 Kg. de un resorte vertical cuya constante de rigidez es 5.95 Kg/m. se aplica una fuerza F(t) = 7.26 sen2t, $t \ge 0$. Suponiendo que cuando t = 0 el cuerpo se encuentra en reposo en su posición de equilibrio y que la fuerza amortiguadora es despreciable, determine la posición y la velocidad del peso en cualquier instante. **Rpta:** x = 0.61 sen 2t – 1.22t cos 2t ; y = 2.44 sen 2t