ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior

Una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* se puede expresar generalmente como:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

La teoría que se utiliza para demostrar la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden puede extenderse a ecuaciones diferenciales de orden superior. Aquí te presento los conceptos básicos y resultados clave relacionados con este tema.

Reducción a un Sistema de Primer Orden

Para analizar la existencia y unicidad de soluciones, es común reducir la ecuación de orden superior a un sistema de ecuaciones de primer orden. Definimos nuevas variables: $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$

Entonces, la ecuación original se puede reescribir como el sistema de ecuaciones de primer orden:

SOLUCIÓN ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

En las ecuaciones diferenciales de orden superior consideraremos dos tipos especiales

1° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma: $\boxed{\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)}$ **... (1)**

donde f (x) es una función sólo de x.

La solución de la ecuación (1) se obtiene por integración sucesivas, es decir:

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int f(x)\,dx + c_1$$

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int [\int f(x)\,dx + c_1]dx + c_2$$

.

.

.

$$y = \int\int [\ldots \int f(x)dx + c_1 \ldots]dx + c_n$$

2° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma: $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=g(y)}$ ... **(2)**

donde g es una función solo de y.

para obtener la solución de la ecuación (2) se hace del modo siguiente:

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}.\frac{dy}{dx}=y'\frac{dy'}{dy}$, pero como

$\frac{d^2y}{dx^2}=g(y)$ entonces $y'\frac{dy'}{dy}=g(y)$, de donde

$y'dy'=g(y)dy$ integrando se tiene: $\int y'dy'=\int g(y)dy+c_1 \Rightarrow \frac{y'^2}{2}\int g(y)dy+c_1$

$y'=\sqrt{2[\int g(y)dy+c_1]}$ separando las variables

$dy=\sqrt{2[\int g(y)dy+c_1]}dx$, de donde $\int \frac{dy}{\sqrt{2[\int g(y)dy+c_1]}}=\int dx+c_2$

en forma similar si se tiene $\frac{d^3y}{dx^3}=g(y)$

se deduce que $\frac{d^3y}{dx^3}=y'[y'\frac{d^2y'}{d^2y}+(\frac{dy'}{dy})^2]$

3° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma. $\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}) = 0}$ **... (3)**

donde la ecuación (3) no contiene a y, se puede rebajar el orden de la ecuación tomando como nueva función incógnita la derivada de orden inferior de la ecuación dada, ó sea $y^{(k)} = z$. Obteniéndose la ecuación $F(x, z, z',..., z^{(n-k)}) = 0$

Ejemplos.- Resolver las siguientes diferenciales.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$$

<u>**Solución**</u>

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x dx + c_1 = xe^x - e^x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \int (xe^x - e^x + c_1)dx + c_2 = xe^x - 2e^x + c_1x + c_2$$

$$y = \int (xe^x - 2e^x + c_1x + c_2)dx + c_3 \quad \Rightarrow \quad y = xe^x - 3e^x + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3$$

2 $$\frac{d^2y}{dx^2}+ay=0$$

Solución

Como $\frac{d^2y}{dx^2}=y'\frac{dy'}{dy} \Rightarrow y'\frac{dy'}{dy}+ay=0 \Rightarrow y'dy'+ay\,dy=0$, integrando se tiene:

$$\int y'dy'+\int a^2y\,dy=c_1 \Rightarrow \frac{y'^2}{2}+a^2\frac{y^2}{2}=c_1$$

$$y'=\sqrt{2c_1-a^2y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2c_1-a^2y^2}}=dx$$

$$\frac{1}{a}\operatorname{arcsen}\frac{ay}{\sqrt{2c_1}}=x+x_2 \Rightarrow \operatorname{arcsen}(\frac{ay}{\sqrt{2c_1}})=ax+ac_2$$

$$\frac{ay}{\sqrt{2c_1}}=\operatorname{sen}(ax+ac_2) \Rightarrow y=K_1\operatorname{sen}ax+K_2\cos ax$$

$$xy'' = y'\ln(\frac{y'}{x})$$

Solución

$$y' = z \Rightarrow xz' = z\ln(\frac{z}{x}) \Rightarrow z' = \frac{z}{x}\ln\frac{z}{x}$$

es una ecuación homogénea z = ux de donde dz = udx + xdu entonces

$$dz = \frac{z}{x}\ln(\frac{z}{x})dx \Rightarrow \text{u dx + x du = u ln u dx}$$

x du = (u ln y u – u) dx, separando la variable.

$$\frac{du}{u\ln u - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(\ln u - 1) = \ln cx \Rightarrow \ln u - 1 = cx \Rightarrow \ln u = 1 + cx$$

$$u = e^{1-cx} \Rightarrow \frac{z}{x} = e^{1+cx} \Rightarrow z = xe^{1+cx}$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{1+cx} \Rightarrow dy = xe^{1+cx}dx \quad \text{integrando} \quad y = \frac{x}{c}e^{1+cx} - \frac{1}{c^2}e^{1+cx} + k$$

Ejemplos.- Resolver las siguientes diferenciales.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ay = 0$$

$$xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$$

$$y' = z$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' = (2y+3) - 2y'^2 = 0$$

$$y = y'\operatorname{tg} x - (y')^2 \sec^2 x$$

$$z = \operatorname{sen} x$$

$$xy'(yy'' - (y')^2 - y(y')^2) = x^4y^3$$

$$y = e^{\int Z(x)dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^{-x} \to \frac{dy}{dx} = \int \overset{u}{x}\,\overset{dv}{e^{-x}dx} + C_1 = -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$= -xe^{-x} - (-e^{-x}) \to \frac{dy}{dx} = -xe^{-x} + e^{-x} + C_1$$

$$y = \int (-xe^{-x} + e^{-x} + C_1)\,dx + C_2$$

$$y = -\int \overset{u}{x}\,\overset{dv}{e^{-x}dx} + \int e^{-x}dx + \int C_1\,dx + C_2$$

$$y = -[-xe^{-x} + e^{-x}] - e^{-x} + C_1x + C_2$$

$$y = xe^{-x} - e^{-x} - e^{-x} + C_1x + C_2$$

$$y = xe^{-x} - 2^{-x} + C_1x + C_2$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Rpta: $y = (x+2)e^{-x} + x - 1$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \cos^2 x, \quad y(0) = \frac{1}{32}, \quad y'(0), \quad y''(0) = \frac{1}{8}, \quad y'''(0) = 0$$

Rpta: $y = \dfrac{x^4}{48} + \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{\cos 2x}{32}$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n

Las ecuaciones diferenciales lineales de orden n son de la forma siguiente:

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_0(x)y=R(x)} \qquad \dots (1)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y R son funciones solo de x ó constante.

La ecuación diferencial (1) se puede escribir en la forma:

$$\boxed{F(x, y', y'', \dots, y^{(n)})=0} \qquad \dots (2)$$

La ecuación (2) nos indica que están relacionadas, la variable independiente x, la variable dependiente y, y las derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$

Si en la ecuación (1) la función R(x) = 0, se obtiene:

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\dots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0} \qquad \dots (3)$$

A la ecuación diferencial (3) se denomina ecuación diferencial lineal homogénea.

Si en la ecuación (1), la función R (x) ≠ 0, la ecuación diferencial (1) se denomina ecuación diferencial lineal no homogénea.

Si y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial (3) y si c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, entonces $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es una solución de la ecuación (3).

Como y_1, y_2 son soluciones de la ecuación (3) entonces:

$$a_n(x)y_1^{(n)}+a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)y'_1+a_0(x)y_1=0$$

$$a_n(x)y_2^{(n)}+a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)y'_2+a_0(x)y_2=0$$

sumando y agrupando se tiene:

$$a_n(x)(c_1y_1^{(n)}+c_2y_2^{(n)})+a_{n-1}(x)(c_1y_1^{(n-1)}+c_2y_2^{(n-1)})+a_0(x)(c_1y_1+c_2y_2)=0$$

$$a_n(x)(c_1y_1+c_2y_2)^{(n)}+a_{n-1}(x)(c_1y_1+c_2y_2)^{(n-1)}+a_0(x)(c_1y_1+c_2y_2)=0$$

entonces $c_1y_1+c_2y_2$ es una solución de la ecuación diferencial (3)

En general si, y_i, i = 1, 2,..., n son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de (3) y si c_i, i = 1, 2,..., n son constantes, entonces $y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$, es una solución de la ecuación diferencial (3).

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes son de la forma:

$$\boxed{a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0} \qquad \ldots (1)$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales, primero consideramos el polinomio característico de la forma siguiente:

$$\boxed{P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0}$$

Como el polinomio característico P(r) = 0 es de grado n entonces se puede obtener las siguientes raíces $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ los cuales pueden ser, reales distintos, reales de multiplicidad o números complejos.

3°Caso Cuando las raíces de la ecuación polinómica P(r) = 0 alguna de estas raíces son complejas: $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1,\ r_2 = \alpha_1 - i\beta_1,\ r_3 = \alpha_2 + i\beta_2,\ r_4 = \alpha_2 - i\beta_2$

y las demás raíces supongamos que sean reales y distintas.

Luego el sistema fundamental de soluciones son de la forma siguiente:

$$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ e^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}\beta_1 x,\ e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x,\ e^{\alpha_2 x}\operatorname{sen}\beta_2 x,\ e^{r_5 x},\ldots,e^{r_n x}$$

y la solución general de la ecuación diferencial (1) es:

$$\boxed{y_g = c_1 e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + c_2 e^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}\beta_1 x + c_3 e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x + c_4 e^{\alpha_2 x}\operatorname{sen}\beta_2 x + c_5 e^{r_5 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}}$$

a. Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$$

Solución

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$ es $P(r) = r^2 - 1 = 0$, y sus raíces $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, de donde el sistema fundamental de soluciones es: $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$ es decir e^{x}, e^{-x} y la solución general es: $y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$(r-1)(r-2) = 0$$

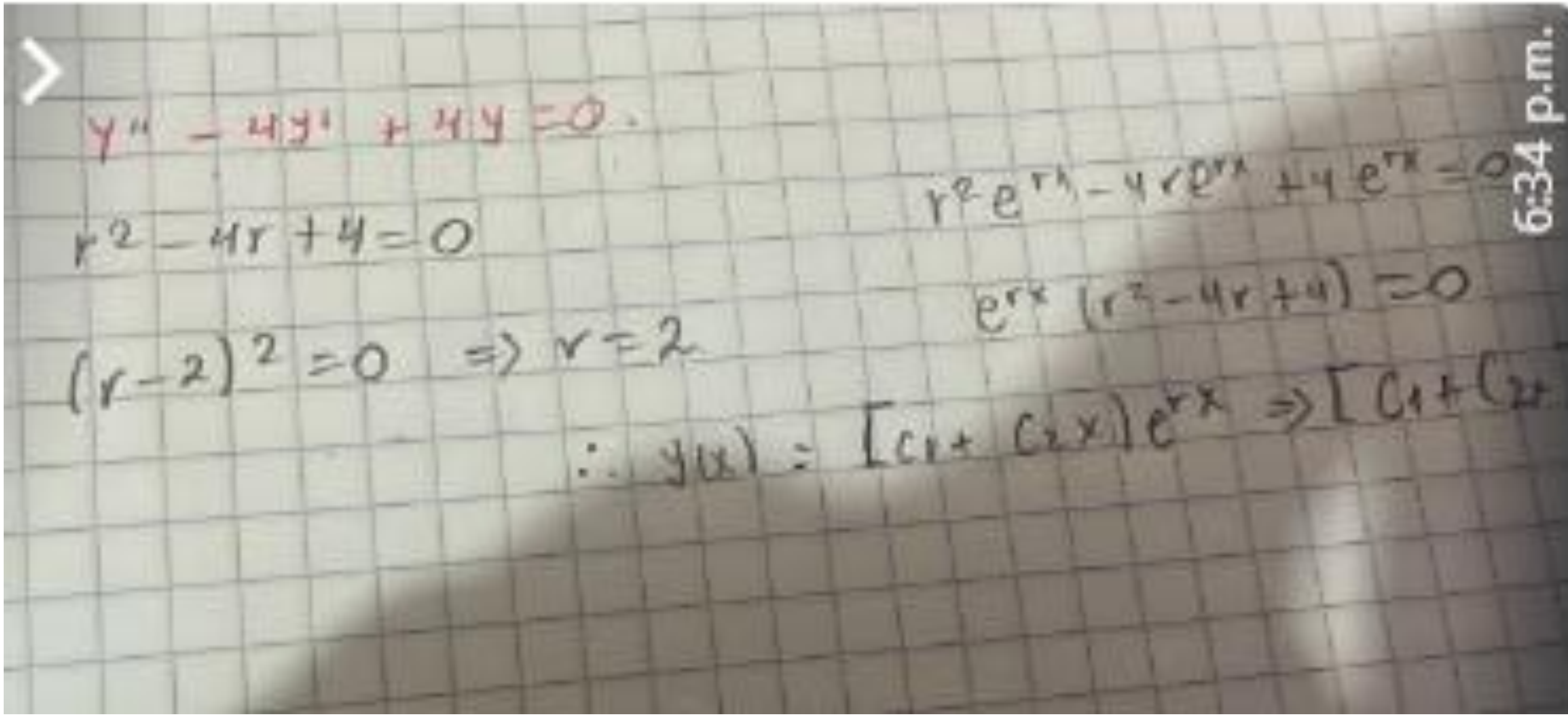
$$r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = 2$$

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

a

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$



$y'' - 4y' + 4y = 0.$

$r^2 - 4r + 4 = 0$

$(r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$

$r^2 e^{rx} - 4r e^{rx} + 4e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 - 4r + 4) = 0$

$\therefore y(x) = [c_1 + c_2 x] e^{rx} \Rightarrow [C_1 + C_2 x$

$$y'' + y = 0$$

- $y'' + y = 0$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 = -1$$

$$r = \pm\sqrt{-1}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

$$y(x) = \cancel{e^{0\cdot x}}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

$$y'' + y' + y = 0$$

Solución

$\bullet\ y'' + y' + y = 0$

$P(r) = r^2 + r + 1 = 0$

$r_1 = -0{,}5 + 0{,}866\,i$

$r_2 = -0{,}5 - 0{,}866\,i$

$\Rightarrow y_g = C_1 e^{-0{,}5x} \cos(0{,}866x) + C_2 e^{-0{,}5x} + \operatorname{sen}(0{,}866x)$

Luego el sistema de solución es: $e \cos \frac{\ }{2} x,\ e \operatorname{sen} \frac{\ }{2} x$ y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$y'''-2y''-y'+2y=0$$

• $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$

$r^3 - 2r^2 - r + 2 = (r-1)(r^2 - r - 2)$

$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$

$(r-1)(r-2)(r+1) = 0$

$r_1 = 1 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = 1$

$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}$

El p… uego

$P(r$…

el sis… n general es:

$y_g =$

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0.$

$(r+1)^3 = r^3 + 3r^2 + 3r + 1.$

$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 =$

$(r+1)^3 = 0 \qquad r = -1.$

$r^3 e^{rx} + 3r^2 e^{rx} + 3r e^{rx} + e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^3 + 3r^2 + 3r + 1) = 0$

$y(x) = [\,(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{-x}$

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$$ **Rpta:** $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0$$ **Rpta:** $y=e^{2x}(c_1x+c_2)$

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$ **Rpta:** $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes son de la forma siguiente:

$$\boxed{a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = R(x)} \quad \dots (1)$$

Para obtener la solución general de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes, primero se determina la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea Y_g, y después se busca una solución particular cualquiera de la ecuación diferencial no homogénea Y_p, y la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea es igual a la suma de la solución general de la ecuación diferencial homogénea más la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, es decir:

$$Y = Y_g + Y_p$$

Es decir que el problema se reduce a encontrar una solución particular Y_p de la ecuación diferencial lineal no homogénea. Cuando la función R(x) de la ecuación (1) tiene la forma:

$$R(x) = e^{\alpha x}[(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\operatorname{sen}(\beta x)]$$

donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de grado n y m respectivamente, entonces la solución particular Y_p de la ecuación (1) es de la forma:

$$\boxed{Y_p = x^s e^{\alpha x}[\tilde{P}_K(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_K(x)\operatorname{sen}(\beta x)]}$$

donde K = máx {n,m} y s es el orden de multiplicidad de la raíz $r = \alpha \pm i\beta$; $\tilde{P}_K(x)$ y $\tilde{Q}_K(x)$ son polinomios en x de grado K, de coeficientes indeterminados, para determinar la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

1° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = P_n(x)$ entonces:

a) Si r = 0, no es raíz de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular es:

$$\boxed{Y_p = \tilde{P}_n(x)}$$

b) Si r = 0, es raíz de la ecuación característica **P(r)** = 0 entonces la solución particular es:

$$\boxed{Y_p = x^s \tilde{P}_n(x)}$$

donde s es la multiplicidad de r = 0

2° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ donde α es real, entonces:

a) Si r = α no es raíz de la ecuación característica P(r) = 0 entonces la solución particular es:

$$\boxed{Y_p = e^{\alpha x} \bar{P}_n(x)}$$

b) Si r = α es raíz de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular es:

$$\boxed{Y_p = x^x e^{\alpha x} \tilde{P}_n(x)}$$

donde s es la multiplicidad de r = α

3° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\operatorname{sen}\beta x$ donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son funciones polinómicas de grado n y m respectivamente, entonces:

a) Si $r = \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{Y_p = \tilde{P}_K(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_K(x)\operatorname{sen}(\beta x)}$$

donde $K = \text{máx}\ \{n,m\}$

b) Si $r = \pm\ i\beta$ es raíz de la ecuación característica $P(r) = 0$, entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{Y_p = x^s\left[(\tilde{P}_K(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_K(x)\operatorname{sen}\beta x)\right]}$$

donde $K = \text{máx}\ \{n,m\}$ y s es la multiplicidad de $r = \pm i\beta$

4° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\operatorname{sen}\beta x]]$ donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son funciones polinómicas de grado n y m respectivamente, entonces:

a) Si $r = \alpha \pm i\beta$ no es raíz de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{Y_p = e^{\alpha x}[(\tilde{P}_K(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_K(x)\operatorname{sen}\beta x)]}$$

donde $K = \text{máx}\ \{n,m\}$

b) Si $r = \alpha \pm i\beta$ es raíz de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular de la ecuación diferencial es.

$$\boxed{Y_p = x^s e^{\alpha x}[(\tilde{P}_K(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_K(x)\operatorname{sen}\beta x)]}$$

donde $K = \text{máx}\ \{n,m\}$ y s es la multiplicidad de $r = \alpha \pm i\beta$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=3$$

Solución

Sea $P(r)=r^2+3r=0$ la ecuación característica donde $r_1=0$, $r_2=-3$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$Y_g=c_1+c_2\ e^{-3x}$$

para la solución particular se obtiene de acuerdo a la parte b) del 1° Caso, es decir: $Y_p=Ax$

Como $Y_p=Ax \Rightarrow Y_p'=A \Rightarrow Y_p''=0$, reemplazando en la ecuación

de donde $0+3A=3 \Rightarrow A=1$, por lo tanto $Y_p=x$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es: $Y=Y_g+Y_p$

es decir: $y=c_1+c_2e^{-3x}+x$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-15y=-(15x^2+4x+13)$$

Sea $P(r)=r^2-2r-15=0$ el polinomio característico, de donde: $r_1=-3$ y $r_2=5$, luego la solución complementaria o solución general de la ecuación diferencial homogénea es: $y_g=c_1e^{-3x}+c_2e^{5x}$

Para la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, se obtiene de acuerdo a la primera parte del primer caso es decir: $y_p=Ax^2+Bx+C$

de donde $y_p'=2Ax+B \Rightarrow y_p''=2A$, que reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$2A-4Ax-2B-15Ax^2-15Bx-15C=-(15x^2+4x+13)$$

$$-15Ax^2-(4A+15B)x+2A-2B-15C=-(15x^2+4x+13)$$

de donde por identidad se tiene:

$$\begin{cases} -15A = -15 \\ -(4A + 15B) = -4 \\ 2A - 2B - 15C = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}. \quad \text{Luego:} \quad y_p = x^2 + 1$$

por lo tanto la solución general de la ecuación es: $y = y_g + y_p$

es decir: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{5x} + x^2 + 1$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 3\frac{d^2 y}{dx^2} - 4y = -4x^5 + 390x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = -4x^5 + 390x$$

Solución

El polinomio característico es: $P(r) = r^4 - 3r^2 - 4 = 0$ de donde:

$r_1 = -2$, $r_2 = 2$, $r_3 = i$ y $r_4 = -i$

y la solución complementaria o solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$$

Para la solución particular se debe tener en cuenta la primera parte del 1° Caso de donde se tiene: $y_p = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$, de donde derivando y reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}-4A=-4\\ -4B=0\\ -60A-4C=0\\ -36B-4D=0\\ 120A-18C-4E=390\\ 24B-12D-4F=0\end{array}\right\} \text{ de donde } \left\{\begin{array}{l}A=1\\ C=-15\\ B=D=E=F=0\end{array}\right.$$

Luego $y_p = x^5 - 15x^3$ y la solución general es:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + x^5 - 15x^3$$

$$y'' + 3y' = e^x$$

Solución

El polinomio característico es $P(r) = r^2 + 3r = 0$, de donde $r_1 = 0$, $r_2 = -3$, luego la solución complementaria de la ecuación diferencial homogénea es:

$y_g = c_1 + c_2 e^{-3x}$ y de acuerdo a la parte a, del segundo caso la solución particular es:

$y_p = Ae^x$ de donde $y_p' = Ae^x \Rightarrow y_p'' = Ae^x$

como $y'' + 3y' = e^x \Rightarrow Ae^x + 3Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

Luego la solución particular $y_p = \frac{e^x}{4}$ y la solución general de la ecuación no homogénea es: $y = y_g + y_p$ es decir: $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{e^x}{4}$

1. $$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^2$$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 e^{x} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 5y = 5x$$ **Rpta:** $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} - x + \dfrac{4}{5}$

3. $$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} = x + 1$$ **Rpta:** $y = c_1 + c_2 e^{x} - c_3 e^{-x} - \dfrac{x^2}{2} - x$

$$y'' - 4y' = xe^{4x}$$

Solución

El polinomio característico es: $P(r) = r^2 - 4r = 0$ de donde $r_1 = 0$, $r_2 = 4$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es: $y_g = c_1 + c_2 e^{4x}$ y de acuerdo a la parte b, del segundo caso se tiene la solución particular de la forma:

$$y_p = x(Ax + B)e^{4x}$$

Es decir: $y_p = (Ax^2 + Bx)e^{4x}$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es: $y = y_g + y_p$

$$y = \frac{x^2 e^{4x}}{8} - \frac{x e^{4x}}{16} + C e^{4x} + C_1$$

$$y'' + y = \sin(x)$$

$y'' + y = \text{sen } x - \cos x$

Solución

El polinomio característico es: $P(r) = r^2 + 1 = 0$, de donde: $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Luego la solución complementaria de la ecuación diferencial homogénea es: $y_g = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x$

La solución particular de acuerdo a la parte b, del 3er. caso es de la forma:

$$y_p = x(A \cos x + B \text{ sen } x)$$

Es decir: $y_p = Ax \cos x + Bx \text{ sen } x$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es: $y = y_g + y_p$ es decir: $y = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x + Ax \cos x + Bx \text{ sen } x$

$$y = -\frac{x \text{ sen}(x)}{2} + C_1 \text{ sen}(x) - \frac{x \cos(x)}{2} + C \cos(x)$$

$$y'' + y = \sin(4x) + \cos(2x)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^x \sin(3x)$$

$$y'' + y = 2\sin(5x) + 3\cos(3x)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE EULER.

Las ecuaciones diferenciales de Euler son de la forma:

$$\boxed{a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0} \qquad \dots (\alpha)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son constantes.

Para resolver la ecuación diferencial (α) se transforma a una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes, mediante la sustitución.

$x = e^t \;\Rightarrow\;$ t = ln x, además $\frac{dx}{dt} = e^t$

también $\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$ de donde $\boxed{\frac{dy}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=e^{-t}\frac{dy'}{dt}=e^{-t}\frac{d}{dt}(e^{-t}\frac{dy}{dt})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}(e^{-t}\frac{dy}{dt}+e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2})$$ de donde $$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})}$$

en la misma forma se hace los cálculos si la ecuación diferencial es de orden 3, 4, etc.

También son ecuaciones diferenciales de Euler las ecuaciones de la forma siguiente:

$$\boxed{a_n(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_1(ax+b)\frac{dy}{dx}+a_0y=0} \quad \dots(\beta)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (β) se transforma en forma similar al caso anterior mediante la sustitución:

$ax+b=e^t \Rightarrow t=\ln(ax+b)$. Además $\frac{dx}{dt}=\frac{e^t}{a}$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=ae^{-t}\frac{dy}{dt}$$ de donde se tiene $\boxed{\frac{dy}{dt}=ae^{-t}\frac{dy}{dt}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=ae^{-t}\frac{dy'}{dt}=ae^{-t}\frac{d}{dt}(ae^{-t}\frac{dy}{dt})=a^2e^{-t}(e^{-t}\frac{dy}{dt}+e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2})$$

de donde: $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=a^2e^{-2t}[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}]}$

Las ecuaciones diferenciales no homogéneas de Euler son de la forma:

$$\boxed{a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y=x^{\alpha}P_m(\ln(x))} \quad \dots(\gamma)$$

donde m es el grado de $P_m(\ln(x))$

a. Ejemplos.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$$

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx, además $\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$

reemplazando en la ecuación diferencial.

$$e^{2t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}-y=0$$, simplificando

$$\frac{d^2y}{dt^2}-y=0$$, ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes.

Sea $P(r)=r^2-1=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=-1$.

Luego la solución es $y(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$, de donde $y=c_1x+\frac{c_2}{x}$

$$(x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$$

Solución

Sea $x+2 = e^t \Rightarrow$ t = ln (x + 2) además: $\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$; $\frac{d^2y}{dt^2} = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$e^{2t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + 3e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

de donde al simplificar se tiene: $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, que es una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes:

Sea $P(r) = r^2 + 2r - 3 = 0$, de donde: $r_1 = -3$, $r_2 = 1$

Luego la solución es: $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t$ $\therefore\ y = \frac{c_1}{(x+2)^3} + c_2(x+2)$

$$x^2 y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$$

Solución

Sea $x = e^t \Rightarrow t = \ln(x)$ además: $\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$; $\frac{d^2y}{dt^2} = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$e^{2t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt} + y = e^t(6-t)$, al simplificar se tiene:

$\frac{d^2y}{dt^2} + y = (6-t)e^t$, ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constantes:

Sea $P(r)=r^2+1=0$, de donde: $r_1=i$, $r_2=-i$

Luego la solución complementaria es:

$y_g=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t$ y la solución particular es:

$$y_p=(At+B)e^t \Rightarrow y_p'=Ae^t+(At+B)e^t \Rightarrow y_p''=2Ae^t+(At+B)e^t$$

como $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=(6-t)e^t$ entonces $2Ae^t+2(At+B)e^t+(At+B)e^t=(6-t)e^t$

$$2At+2A+2B=6-t \Rightarrow A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{7}{2}$$

Luego $y_p=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{7}{2}$, y la solución general es: $y(t)=y_g+y_p=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t-\dfrac{t}{2}+\dfrac{7}{2}$

$$\therefore \qquad y=c_1\cos(\ln x)+c_2\operatorname{sen}(\ln x)-\frac{1}{2}(\ln x-7)$$

$$x^2y'' + 3xy' - 4y = 0$$

$$4x^2y'' - 2xy' + y = 0$$

$4x^2y''-8xy'+9y=0$ **Rpta:** $y=c_1x^{\frac{3}{2}}+c_2x^{\frac{3}{2}}\ln x$

$x^2y''-3xy'+7y=0$ **Rpta:** $y=c_1x^2\cos\sqrt{3}\ln x+c_2x^2\operatorname{sen}\sqrt{3}\ln x$

$x^2y''-4xy'+6y=x$ **Rpta:** $y=c_1x^3+c_2x^2+\dfrac{x}{2}$

$(1+x)^2y''+3(1+x)y'+4y=(1+x)^3$ **Rpta:** $y=(x+1)^2[c_1+c_2\ln(x+1)]+(x+1)^2$

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en las funciones incógnitas. $x_1 = \psi_1(t)$, $x_2 = \psi_2(t), \ldots, x_n = \psi_n(t)$ es de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

NOTACIÓN VECTORIAL

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V_n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$

donde $x_1 = \psi_1(t), \ldots, x_n = \psi_n(t)$ son diferenciables y con derivadas continuas en (a,b) llamadas solución del sistema.

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de "n" funciones incógnitas se puede escribir en la forma: $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}(t) + b_i(t);$

Si $b_i(t) = 0$, el sistema se llama homogénea y si $b_i(t) \neq 0$ el sistema se llama no homogénea. Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales existen los siguientes métodos:

MÉTODO: Reducción de un Sistema a una Ecuación Diferencial de n-Esimo Orden.-

Consideremos un sistema de dos ecuaciones:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) & \dots (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) & \dots (2) \end{cases}}$$

donde a, b, c ,d, son constantes f(t), g(t) son funciones conocidas: x(t), y(t) son funciones incógnitas de la ecuación (1) despejamos $y = \frac{1}{b}(\frac{dx}{dt} - ax - f(t))$

reemplazando y en (2) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{b}(\frac{dx}{dt} - ax - f(t))] = cx + \frac{d}{b}(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)) + g(t)$$

$$\frac{1}{b}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{adx}{dt} - \frac{d}{dt}(f(t)) - cx - \frac{d}{b}(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)) - g(t) = 0$$

simplificando se tiene: $\boxed{A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + cx = R(t)}$

Resolver: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y & \textbf{... (1)} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y & \textbf{... (2)} \end{cases}$

Solución

De (1) se tiene $y = \frac{1}{2}(x - \frac{dx}{dt})$ reemplazando en (2)

$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(x - \frac{dx}{dt})] = x + \frac{3}{2}(x - \frac{dx}{dt})$, calculando la derivada

$\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\frac{dx}{dt}$, al simplificar se tiene: $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$

El polinomio característico es $P(r) = r^2 - 4r + 5 = 0$ de donde $r_1 = 2 + i$, $r_2 = 2 - i$

La solución general es: $x_g = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$

es decir: $x_g = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \operatorname{sen} x$

Resolver: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0 & \text{...(1)} \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0 & \text{...(2)} \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1$

de (2) despejamos **x** es decir $x = y + \dfrac{dy}{dt}$, **reemplazando en (1)**

$\dfrac{d}{dt}(y + \dfrac{dy}{dt}) + 3(y + \dfrac{dy}{dt}) + y = 0$, **efectuando la derivada se tiene:** $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$

Polinomio característico $P(r) = r^2 + 4r + 4 = 0$, de donde r = -2 de multiplicidad 2.

$x = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$, $x(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$, **remplazando en (1)**

$-2c_1 e^{-2t} - 2c_2 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t} + 3c_1 e^{-2t} + 3c_2 t e^{-2t} + y(t) = 0$

$c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t} + y(t) = 0$

$e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t} + 1 = 0 \Rightarrow 1 + c_2 + 1 = 0 \Rightarrow c_2 = -2$

la solución es $x = e^{-2t} - 2te^{-2t}$, **análogamente para** $y = e^{-2t}(1 + 2t)$

$$x' = 4x + 6y,\ x(0) = 1$$
$$y' = -3x - 5y,\ y(0) = 0$$

$$y = \frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x$$
$$y' = \frac{1}{6}x'' - \frac{4}{6}x'$$

$$\frac{1}{6}x'' - \frac{4}{6}x' = -3x - 5\left(\frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x\right)$$
$$x'' + x' - 2x = 0$$

$$r^2 + r - 2 = 0$$
$$r_1 = 1, r_2 = -2$$

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t}$$

$$y = \frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x$$
$$= \frac{1}{6}(C_1e^t - 2C_2e^{-2t}) - \frac{4}{6}(C_1e^t + C_2e^{-2t})$$
$$= -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t}$$

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t}$$
$$y = -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t}$$

$$C_1 = 2 \text{ y } C_2 = -1$$

$$x = 2e^t - e^{-2t}$$
$$y = -e^t + e^{-2t}$$

$$x' = 4x + 6y + 1, \qquad x(0) = 1$$
$$y' = -3x - 5y + t, \qquad y(0) = 0$$

$$y = \frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x - \frac{1}{6}$$

$$y' = \frac{1}{6}x'' - \frac{4}{6}x'$$

$$\frac{1}{6}x'' - \frac{4}{6}x' = -3x - 5\left(\frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x - \frac{1}{6}\right) + t$$

$$x'' + x' - 2x = 6t + 5$$

$r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -2$ $\qquad x = C_1e^t + C_2e^{-2t}$

$x = At + B.$

0+A-2(At+B)=6t+5
-2A=6 y A-2B=5

e igualando los coeficientes de cada potencia de *t* en cada lado, obtenemos *A* =-3 y *B*=-4. Por tanto, la solución part es:

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t} - 3t - 4$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}(C_1e^t - 2C_2e^{-2t} - 3) - \frac{4}{6}(C_1e^t + C_2e^{-2t} - 3t - 4) - \frac{1}{6} \\
&= -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} + 2t + 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= C_1e^t + C_2e^{-2t} - 3t - 4 \\
y &= -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} + 2t + 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= C_1e^t + C_2e^{-2t} - 3t - 4 \\
y &= -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} + 2t + 2
\end{aligned}
$$

Resultan $C_1 = 6$ y $C_2 = -1$.

$$
\begin{aligned}
x &= 6e^t - e^{-2t} - 3t - 4 \\
y &= -3e^t + e^{-2t} + 2t + 2
\end{aligned}
$$

Resolver : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3 - 2y & \textbf{...(1)} \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2t & \textbf{...(2)} \end{cases}$

<u>Solución</u>

De (1) se tiene $y = \frac{1}{2}(3 - \frac{dx}{dt})$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}) = 2x - 2t \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = 2x - 2t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t$$

es una ecuación no homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es: $r^2+4=0 \Rightarrow r_1=2i,\ r_2=-2i.$

La solución general de la ecuación homogénea es: $x_g = c_1\cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t.$

La solución particular es: $x_p = At + B$

$$\dot{x}_p = A \Rightarrow \ddot{x}_p = 0 \Rightarrow 0 + 4(At+B) = 4t$$

$$4A = A \Rightarrow A = 1, B = 0 \Rightarrow x_p = t$$

La solución general de la ecuación no homogénea es: $x = x_g + x_p = c_1\cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + t$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y + t + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y + 3te^t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$$

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Considerando la aceleración en el MAS, se puede asociar a la fuerza dada por F=ma. $a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \alpha) = -\omega^2 x,$

La fuerza que actuará sobre la partícula será la de recuperación del muelle, si se aplica el principio de Newton por el cual el sumatorios de fuerzas es igual a la masa por la aceleración.

$$F = -m\omega^2 x = -kx,$$

$$F = -kx$$ Ley de Hooke $$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Esta es una ecuación diferencial, la ecuación del movimiento armónico simple (MAS) $x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$

Es una solución válida, puesto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$ con: $$w^2 = \frac{k}{m}$$

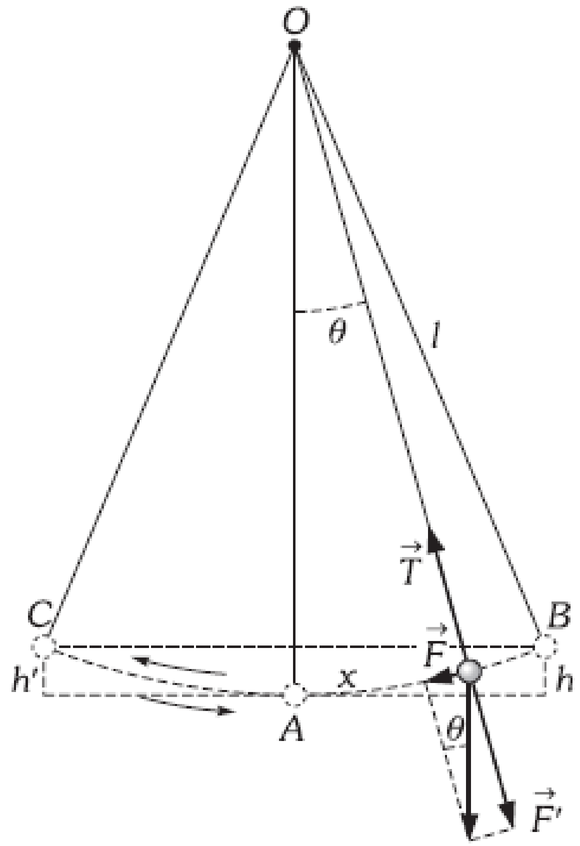
PÉNDULO SIMPLE

Es un punto material que oscila suspendido en un hilo inextensible, sin peso y sin rozamiento.

La fuerza del peso mg, se puede descomponer en dos componentes, según la dirección radial y la tangencial. La componente radia se neutraliza con la tensión del hilo y la componente tangencial valor :

$$F = -\ mg \operatorname{sen} \theta$$

siendo θ igual al ángulo que forma el hilo con la vertical.



El signo menos indica que la fuerza es contraria al movimiento. La fuerza F es proporcional al ángulo θ

Si el ángulo es pequeño, entonces sen θ , se puede sustituir por θ
Por lo tanto:

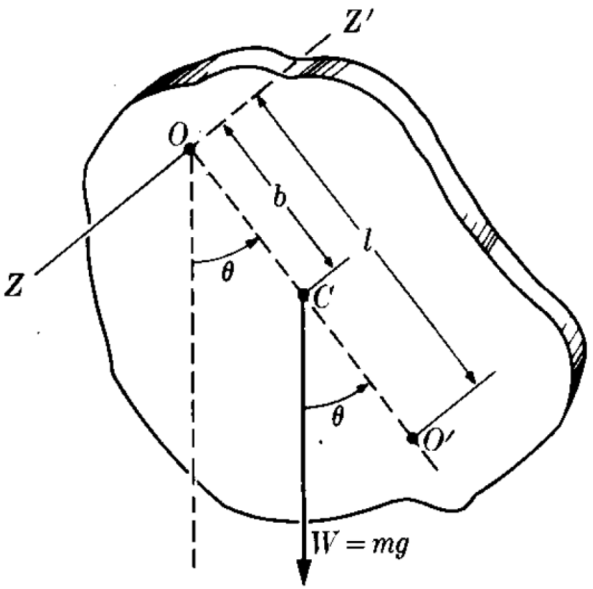
F= - mg θ, siendo θ = x/l se obtiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0 \qquad \operatorname{sen} \theta \sim \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

PÉNDULO RÍGIDO O SÓLIDO

Cualquier cuerpo sólido que pueda oscilar



$$\tau_z = -mgb \operatorname{sen} \theta,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgb}{I}\theta \qquad I = mK^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gb}{K^2}\theta = 0$$

$$\omega^2 = gb/K^2$$

$$r^2 + w^2 = 0$$

r= $\pm$ iw

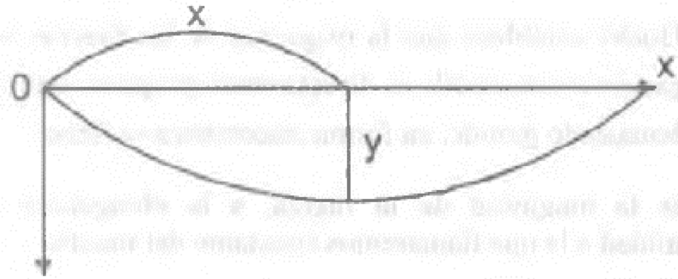
$$\theta = \text{A Sen }(\text{wt} + \varphi)$$

$$\text{T} = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{K^2/_{gb}}$$

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/compuesto/compuesto.html

CALCULO DE DEFLEXIÓN DE UNA VIGA

Consideremos una viga horizontal apoyada en dos puntos en sus extremos, esta viga se va a flexionar, para esto tomemos el eje de la viga como eje de las x y llamemos y la desnivelación vertical de la viga en un punto cualquiera, es decir la flexión.



Si se considera:

I = momento de inercia de la sección de la viga con respecto a su centro de gravedad.

E = el módulo de elasticidad del metal.

M = suma de los momentos de todas las fuerzas situadas a la derecha (o a la izquierda) de la sección considera a la distancia x, comprendido los momentos debidos a la reacciones de los puntos de apoyo.

P = radio de curvatura de la viga, en un punto cualquiera de la abscisa x.

Se tiene la misma fórmula que en el caso de la viga sujeta: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{M}{E\ I}$

cuya solución da la flexión y en un punto cualquiera.

$$y = \frac{M}{EI}x^2 + c_1x + c_2$$

Oscilaciones amortiguadas

En los movimientos vibratorios reales, los cuerpos oscilan en el seno de un fluído (gas, líquido, ..) que ofrecen resistencia al movimiento. Esta resistencia que ofrecen los fluídos, se llama VISCOSIDAD (μ).

Por tanto, en movimientos vibratorios reales, además de la fuerza elástica aparece una fuerza viscosa de rozamiento que se opone a la velocidad .

$$\bar{F}' = -\lambda \bar{v},$$

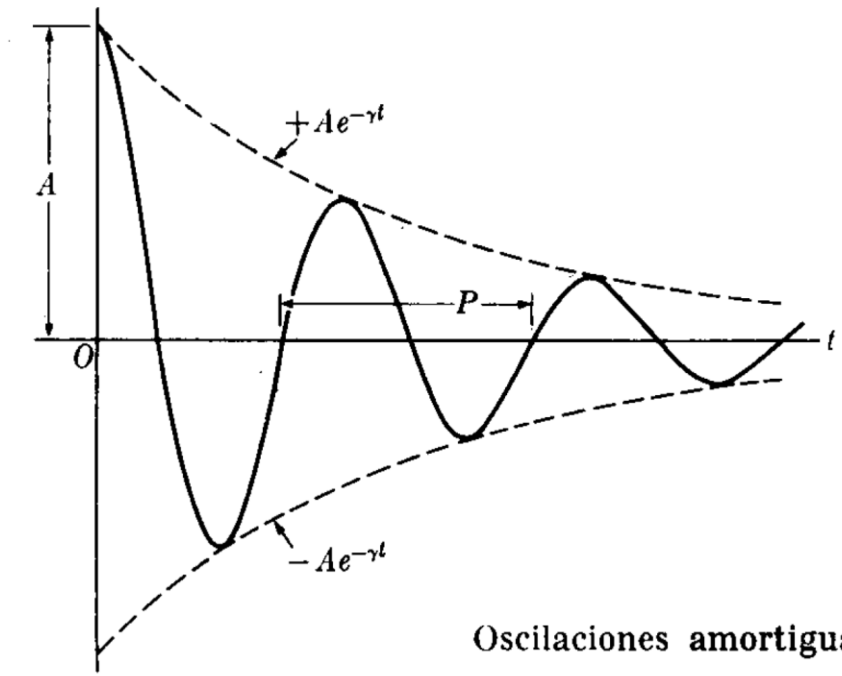
Por tanto, la ecuación del movimiento queda:

$$ma = -kx - \lambda v,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

donde $2\gamma = \lambda/m$ y $\omega_0^2 = k/m$



Oscilaciones amortiguadas.

https://www.geogebra.org/m/q7pKgNnC
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/amortiguadas/amortiguadas.html

Ecuación diferencial de esfuerzo una viga

$$EI\frac{d^4y(x)}{dx^4} = q_0$$

- E es el módulo de elasticidad del material de la viga,
- I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga,
- y(x) es la deflexión vertical de la viga en la posición x*x*,
- qo es la carga distribuida a lo largo de la viga.

TRABAJOS CONSULTA INVESTIGACIÓN FORMATIVA

Aplicar las ecuaciones diferenciales de orden superior en la ingeniería civil, describir el sistema, plantear la ecuación diferencial, identificar el tipo de ecuación diferencial, resolver analíticamente y usando un programa computacional.

1. **Análisis de estructuras:** Estas ecuaciones ayudan a predecir las deflexiones, las vibraciones y las frecuencias naturales de las estructuras.
2. **Estabilidad de taludes:** Modela el equilibrio de fuerzas y el comportamiento de los suelos en pendientes, y son utilizadas para predecir los deslizamientos de tierra y calcular los coeficientes de seguridad.
3. **Análisis de cimentaciones:** Estas ecuaciones ayudan a determinar los asentamientos y las presiones sobre el suelo, lo que es esencial para garantizar la estabilidad y seguridad de las estructuras.
4. **Vibraciones de estructuras**: Predece las frecuencias naturales, las amplitudes y los modos de vibración de las estructuras, lo que es crucial para evitar daños y asegurar la estabilidad.
5. **Mecánica del suelo**: Estas ecuaciones ayudan a entender y predecir la estabilidad de los taludes, la capacidad de carga de las cimentaciones y otros aspectos relacionados con la ingeniería geotécnica.
6. **Diseño de sistemas de drenaje:** Determinar la capacidad de los sistemas de drenaje, calcula las tasas de infiltración y dimensionar los elementos estructurales necesarios para un adecuado drenaje.
7. **Transporte de calor en materiales con efectos no lineales:** Modelar procesos de conducción de calor donde se consideran efectos de dispersión o efectos no lineales.
8. **Análisis de la estabilidad de un sistema de control con múltiples elementos:** Modela el comportamiento de sistemas de control en estructuras civiles, por ejemplo, en sistemas de aislamiento sísmico o en análisis de puentes con dispositivos de control activo.
9. **Modelo de clima y humedad en estructuras:** Modelar la variación de la humedad y temperatura en componentes de edificaciones o puentes, considerando efectos de difusión y conducción con fenómenos de dispersión.
10. **Dinámica de sistemas de puentes con múltiples modos de vibración:** Modelar la respuesta vibratoria y la estabilidad de puentes, especialmente en efectos dinámicos complejos donde participan varios modos de vibración.