- La Representación del Conocimiento es la representación formal de las relaciones existentes entre objetos (y entre los objetos y sus propiedades):
- Los modelos lógicos clásicos más conocidos son:

La Lógica Proposicional

La Lógica de Predicados

Básicamente, se diferencian en que la primera no admite argumentos en los predicados mientras que la segunda sí.

La lógica proposicional

- asume que el mundo tiene **hechos**

La lógica de predicados

- asume que el mundo contiene:
  - **Objetos**: personas, casas
  - **Relaciones**: hermano de, mayor que, parte de, entre, …
  - **Funciones**: suma, ..

Lógica de Predicados

Hasta ahora hemos solamente trabajado con la lógica de predicados de forma natural, intentando interpretar de forma intuitiva las oraciones que nos encontramos.

Comencemos entonces a formalizar los conceptos que hemos visto hasta ahora.

Representando individuos

Constantes

Las **constantes** representan a los individuos de nuestro universo

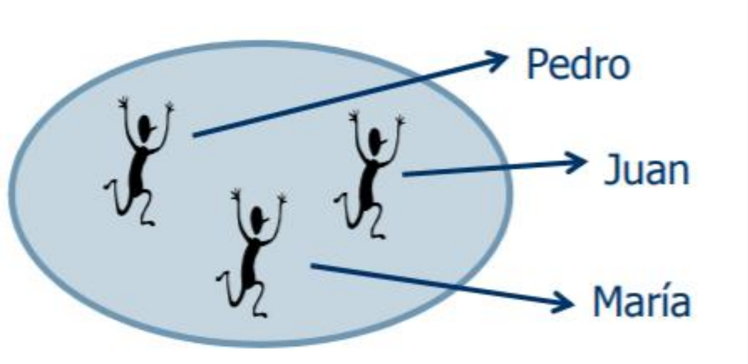
En la bibliografía se denotan en general con letras minúsculas, donde la letra suele estar relacionada con el individuo al que representa (Ej. j = Juan , m = María)

Vamos a tener una constante para cada individuo del universo que podamos (o mejor dicho, que necesitemos) nombrar.

- Mediante símbolos nombramos objetos

  p.ej. juan, pedro, maría…

- El conjunto de todos esos símbolos se denomina **dominio de discurso.**



Sintaxis: Términos

- Una constante es un término.
- Una variable es un término.
- Si f es una función n-aria y t1 ... tn son términos, entonces f(t1 , ... , tn) es un término.

En general,

los términos son los argumentos de los predicados.

p.ej.

Juan, padre(juan), padre(x), quiere(juan, padre(juan))

Funciones

Las funciones son una forma de denotar a un individuo sin hacer una referencia directa al mismo.

Una función debe ser aplicada a uno o más constantes (individuos) y expresará un y solo un individuo. Actúan como una función en matemática.

El ejemplo más fácil de entender sería la función sucesor . Esta función, dado un número, devuelve ese número sumado en uno. Así por ejemplo:

sucesor(0) = 1 sucesor(1) = 2

...

sucesor(n) = n+1

Una función puede estar expresada en lenguaje formal, como en el caso de “sucesor” que usa lenguaje matemático, o puede usar lenguaje coloquial

Pero las funciones no son solo para números. Por ejemplo, la función vecino(x) , que dado una persona, devuelve el vecino de esa persona.

Como definimos quien es vecino de quien es ambiguo, y no va a estar dado por un lenguaje formal. En todo caso, tenemos que tratar de definir que significa en un lenguaje no ambiguo. Por ejemplo, para cada persona del universo, decir exactamente quien es el vecino, armando una lista.

Las funciones se suelen representar en la bibliografía con una letra minúscula, de forma similar a una constante.

Aridad

Las funciones toman parámetros. Es decir, esperan ser aplicadas a una cantidad específica de individuos. Esto se conoce como aridad

La aridad es la cantidad de parámetros que espera la función. Si una función espera un solo parámetro, se dice que tiene aridad 1, si espera dos parámetros, se dice que tiene aridad 2, etc.

Por ejemplo, la función sucesor(x) tiene aridad 1. La función suma(x, y) tiene aridad 2.

Al formalizarlo se vuelve sencillo expresar que nombre le ponemos al parámetro, es decir al individuo al que le aplicamos primero la función. En este caso, el primer individuo se llama x , y el segundo y . Pero si formalizamos la función como suma(a, b) , es la misma función, pero llamamos a y b a nuestros parámetros. Es simplemente el nombre que le ponemos al individuo para hablar de él cuando definimos que significa “suma”.

Aplicación

Cuando aplicamos una función, en lugar de colocar el nombre del parámetro colocamos el nombre del individuo al cual le aplicamos la misma (Es decir, nuestra constante).

Así por ejemplo, si lo que queremos es obtener el vecino de Juan, diremos "vecino(j)" , donde "j" es la constante que representa a Juan, y "vecino(x)" es la función que denota a un vecino de x.

Ejemplo

j = Juan

vecino (x) = el vecino de x

vecino (juan)

Las primeras dos líneas definen el diccionario, mientras que la última define lo que queremos expresar, en este caso “el vecino de Juan”.

Note como la x se reemplaza por la palabra juan para pasar a ser “el vecino de juan ”.

Sintaxis: Funciones

"Devuelven" un valor del dominio y podemos interpretarlas como una forma avanzada de nombrar objetos.

- **p.ej.**

quiere(Juan, "el padre de Juan")

⇓

quiere(Juan, padre(Juan))

Resúmen

Podemos representar los individuos de nuestro universo de dos formas:

- Mediante constantes
- Mediante funciones que se aplican a una o más constantes

Denotamos a los individuos con letras minúsculas, ya sea una constante o una función.

Para ser más expresivos podemos usar nombres en minúscula, por ejemplo, “juan” puede ser una constante, y “vecino” una función.

Predicados

Hasta ahora vimos como representar individuos, pero no las propiedades y las relaciones sobre ellos.

Las propiedades y relaciones se representan mediante **predicados**

Un predicado es una función que se aplica a uno o más individuos y que al hacerlo expresa un valor de verdad, ya sea VERDADERO o FALSO .

Los predicados también tienen aridad. Un predicado de aridad uno se corresponde con una propiedad del individuo. Un predicado de aridad dos se corresponde a una relación entre individuos. Un predicado de mayor aridad se corresponde a relaciones entre múltiples individuos.

Sintaxis: Predicados

- Mediante símbolos representamos relaciones entre objetos (y entre objetos y sus propiedades):

  p.ej. esHombre/1 **/1 ≡ 1 argumento**

  quiere/2 **/2 ≡ 2 argumentos**

- **Los predicados reciben términos como argumentos:**

  p.ej. **esHombre**(Juan)

  quiere(*Juan, María*)

Aplicación

Los predicados se aplican de la misma forma que las funciones. Es decir, reemplazamos el parámetro por la constante que representa al individuo al cual queremos aplicar el predicado.

Así podemos tener el siguiente ejemplo.

j = Juan

m = María

Enamorado (x , y) = x está enamorado de y

Enamorado (juan, maria) Esta expresión nos dice "Juan está enamorado de María" .

Note que "Enamorado (juan , maría)" no es lo mismo que "Enamorado (maria, juan)" . Mientras el primero indica que "Juan está enamorado de María" , el segundo nos dice que "María está enamorada de Juan" .

El orden en el que ponemos nuestras constantes es relevante, y nos indica quien debería ser tomado por x y quien por y .

Uniendo predicados

Como un predicado aplicado representa un valor de verdad, podemos unir varios predicados usando conectivas lógicas. El valor de verdad final de toda la fórmula será el resultado de evaluar los predicados aplicados y luego usar las reglas vistas en la lógica proposicional para obtener el valor de aplicar las conectivas.

Por ejemplo en el siguiente ejemplo:

$Enamorado\ (juan\ ,\ maria) \land Enamorado\ (maria,\ juan\ )$

Estamos diciendo que Juan y María están enamorados uno del otro.

En el siguiente:

$Enamorado\ (juan\ ,\ maria) \land \neg Enamorado\ (maria,\ juan\ )$

Estamos diciendo que Juan ama a María pero María no le corresponde.

Átomos y Conectivos Lógicos

Si P es un símbolo de predicado y t1 ... tn son términos, entonces **P(t1, ... , tn)** es un **átomo.**

Los átomos corresponden a los datos de nuestra base de conocimiento (la forma de representar hechos en Lógica de Predicados).

Los conectivos lógicos **(∧, ∨, ¬, →, ↔)** nos permitirán conectar predicados para representar las reglas de nuestra base de conocimiento.

En el siguiente:

Enamorado (j , m) ∧ ¬Enamorado (m, j)

Estamos diciendo que Juan ama a María pero María no le corresponde.

Por ejemplo en el siguiente ejemplo:

Enamorado (j , m) ∧ Enamorado (m, j)

Estamos diciendo que Juan y María están enamorados uno del otro.

Cuantificadores

Lo último que nos falta ver es como representar oraciones que contienen las palabras “Todos”, “Alguno” y “Ninguno”.

Para representar esto surge la idea de cuantificador

Un cuantificador es una expresión que indica la cantidad de veces que un predicado es VERDADERO si se aplica el mismo a cada uno de los individuos del universo .

Vamos a ver el cuantificador universal , el cuantificador existencial.

Para entender mejor el concepto supongamos que en nuestro universo tenemos n individuos (donde n es un número cualquiera).

Tendremos entonces las siguientes constantes representando a dichos individuos.

$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$

Supongamos también que contamos con un predicado P(x).

Cuantificador Universal

El Cuantificador Universal se utiliza para afirmar que todos los individuos cumplen el predicado.

Es decir, que si aplicamos el predicado a cada uno de los individuos del universo, este debe dar VERDADERO en todos los casos.

El cuantificador universal se representa con el símbolo ∀.

Si queremos decir que “Todos los individuos cumplen el predicado P” escribimos:

$\forall x\ .P(x)$

En nuestro ejemplo, esto es equivalente a decir:

$\forall x\ .P(x) = P(c_1) \land P(c_2) \land P(c_3) \land \ldots \land P(c_{n-1}) \land P(c_n)$

Variables

Pero, ¿Qué significa ∀x ?, o mejor dicho, ¿De donde sale esa x ?

La x es una variable . Una variable representa, de forma similar a un parámetro, a un individuo. Pero ¿A qué individuo? La respuesta es, a todos.

La idea es, el cuantificador dice, “Para todo individuo del universo, llamémoslo x , ese x cumple el siguiente predicado” .

¿Por qué es importante ponerle un nombre al individuo? Porque podemos cuantificar más de un individuo. Por ejemplo, “Para todo par de numero, llamemos al primero x y al segundo y , se cumple ...” .

Eso podemos formalizarlo como: ∀x .∀y .... . Otra forma de representar lo mismo es ∀x , y .... .

Sintaxis: Variables

Las variables se usarán como comodines que pueden ser sustituidos por objetos del dominio.

p.ej.

x, y…

Por ahora, sólo consideraremos que son símbolos que forman parte de la sintaxis de la Lógica de Predicados.

Cuantificador Existencial

El cuantificador existencial es para indicar que existe algún elemento (o más de uno) que cumplen el predicado.

Es decir, nos indica que si aplicamos el predicado a cada individuo del universo, habrá al menos uno para el cual el predicado evaluará a VERDADERO .

El cuantificador existencial se representa con el símbolo " $\exists$" .

Si queremos decir que "Algún individuo cumple el predicado P" escribimos:

$\exists x\, .P(x)$

En nuestro ejemplo, esto es equivalente a decir:

$\exists x\, .P(x) = P(c_1) \vee P(c_2) \vee P(c_3) \vee \ldots \vee P(c_{n-1}) \vee P(c_n)$

Cuantificación Universal y Existencial

$\forall$x esHombre(x)

- Será verdad cuando todos los objetos del dominio de discurso satisfagan el predicado esHombre.
- Si en nuestro dominio de discurso hay objetos “no hombres” (p.ej. Gatos), será falso.

$\exists$x esHombre(x)

- Será verdad cuando exista algún objeto del dominio de discurso que satisfaga el predicado esHombre.
- Con tener un hombre en el dominio de discurso, será cierto, aunque también haya gatos…

Ámbito de los cuantificadores

- El ámbito de un cuantificador es la fórmula sobre la que se aplica, p.ej.

$$\underbrace{\underbrace{(\forall x)\ (\ (\forall y)P(x,y)}_{\text{ámbito de y}} \quad \vee \quad \underbrace{(\exists z)R(x,z)\ )}_{\text{ámbito de z}}}_{\text{ámbito de x}}$$

SINTAXIS (Resúmen)

- Constantes: John, 2, Inglaterra,...
- Predicados: Hermano, >,...
- Funciones: RaízCuadrada, PiernaIzquierdaDe,...
- Variables: x, y, a, b,...
- Conectores: $\neg, \Rightarrow, \wedge, \vee, \Leftrightarrow$
- Igualdad: $=$
- Cuantificadores: $\forall, \exists$

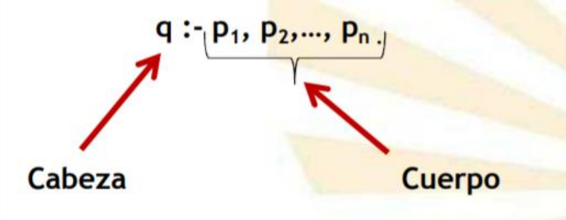
Cláusulas de Horn

Cláusulas de Horn

Las bases de conocimiento en el mundo real a menudo contiene solo cláusulas, de un tipo restringido, denominadas cláusulas de Horn.

Cláusula de Horn: Se caracterizan por tener uno **y sólo un átomo afirmado** y **cualquier número de átomos negados**.

Disyunción de literales negados, excepto uno: ¬ p1 V ¬ p2 V … ¬ pn V q



. El literal positivo se denomina cabeza, y la disyunción de literales negativos cuerpo de la cláusula.

Las cláusulas de Las cláusulas de Horn nos permiten representar hechos o reglas con un único consecuente.

A este tipo de cláusula positiva que no tiene literales negativos se le denomina hecho.

Estas forman la base de la PROGRAMACIÓN LÓGICA.

Equivalencias lógicas (≡)

En las siguientes expresiones, se supone que P, Q contienen la variable x en alguno de sus argumentos:

- $\forall x\, \neg P \equiv \neg \exists x\, P$
- $\forall x\, P \equiv \neg \exists x\, \neg P$
- $\neg P \wedge \neg Q \equiv \neg (P \vee Q)$
- $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$

$\neg \forall x\, P \equiv \exists x\, \neg P$

$\exists x\, P \equiv \neg \forall x\, \neg P$

$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

Equivalencias lógicas (≡)

- $\neg(\neg p) \equiv p$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

$p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

$(\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \equiv p)$

Ejemplo: Si la figura posee cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales entonces la figura es un cuadrado

Variables proposicionales

p1 = la figura posee cuatro lados iguales

p2 = la figura posee cuatro ángulos iguales

q = la figura es un cuadrado

Significado

Si se verifican p1 y p2 entonces se verifica q

q se verifica si se verifican p1 y p2

- **Lógica Proposicional**
- $p1 \land p2 \rightarrow q$
- $\neg(p1 \land p2) \lor q$
- $\neg p1 \lor \neg p2 \lor q$ **Cláusula de Horn**

Ejemplo: Todos los hombres son mortales

- **Predicados**
  - p (x) = hombre(x)= x es un hombre
  - q (x) = mortal (x) = x es mortal
- ∀x (hombre(x) → mortal (x))
- **Significado**
- si se verifica hombre (x) entonces se verifica mortal (x)
- mortal (x) si se verifica hombre (x)
- **Lógica de predicados**
- ∀x (hombre(x) → mortal (x))
- hombre(x) → mortal (x)
- **Cláusula de Horn: ¬ hombre (x) ∨ mortal (x)**