

paralela y la hiperbólica o de Lobachevsky en la que existe más de una paralela.

Las nociones comunes son:

1. Si dos o más cosas son iguales a una tercera, entonces son iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, entonces los totales también son iguales.
3. Si a cosas iguales se quitan cosas iguales, entonces los restos son iguales.
4. Las cosas que son iguales entre sí son iguales entre sí
5. El todo es mayor que la parte.

Por cierto que en la primera parte de *El ingenioso hidalgo don Quijote de la Mancha*, concretamente en el capítulo XVIII, Cervantes utiliza una de estas nociones comunes en su trama cuando en la parte dedicada a la novela del *curioso impertinente*, dice Lotario a Anselmo que tiene su ingenio como el que tienen los moros *a los cuales no se les puede dar a entenderle error de su secta con las acotaciones de la Santa Escritura, ni con razones que consistan en especulación del entendimiento, ni que vayan fundadas en artículos de fe, sino que les han de traer ejemplos palpables, fáciles, inteligibles, demostrativos, indubitables, con demostraciones matemáticas que no se pueden negar, como cuando dicen: "Si de dos partes iguales quitamos partes iguales, las que quedan también son iguales"*. Es una de las tres ocasiones en las que Cervantes cita las matemáticas en su universal obra.

Historia sucinta de la Lógica.

Introducción.

En su libro, *Historia de la matemática*, Carl B. Boyer escribe lo siguiente:

La historia de la lógica se puede dividir, si nos permitimos en pequeño exceso de simplificación, en tres etapas: 1) la lógica griega; 2) la lógica escolástica y 3) la lógica matemática. En la primera etapa las fórmulas lógicas se enunciaban con palabras del lenguaje ordinario, sujetas naturalmente a las reglas sintácticas usuales. Durante la segunda etapa la lógica se abstrajo del lenguaje ordinario, caracterizándose por unas reglas sintácticas diferenciadas y unas funciones semánticas especiales. En la tercera etapa la lógica quedó marcada por el uso de un lenguaje artificial en el que los signos y palabras estaban regidos por una sintaxis exacta y tenían una función semántica estrechamente delimitada y definida también exactamente. Mientras en las dos primeras etapas los teoremas lógicos se derivaban del lenguaje usual, en la tercera etapa la lógica

procede al contrario: primero construye un sistema puramente formal, y solo más tarde busca una interpretación en el lenguaje diario.

En la antigüedad.

Aunque se considera a Aristóteles (384–322 a.C.) como el creador de la Lógica, sin embargo tiene sus precursores. La contribución más destacada de esta etapa previa se centra en el desarrollo y el cultivo de un tipo de discurso que incluía el uso de la inferencia y la prueba. Aparte del interés de los matemáticos por demostrar nuevos teoremas, principalmente los oradores y filósofos se veían obligados a encontrar modos de refutar las tesis propuestas por otros oradores y filósofos. Ese interés queda reflejado sobre todo en el *De Sophisticis Elenchis* de Aristóteles que es un tratado de falacias lógicas. Entre otros nombres cabe destacar a Parménides de Elea (nacido hacia el 530 a. C.), a Zenón de Elea, Meliso de Samos y sobre todo a Sócrates (470–399 a. C.) que aunque fue un gran practicante del arte de la argumentación con rigor e incluso Aristóteles le atribuye haber hecho uso de la inducción y de la definición universal, sin embargo, no llega a ninguna teoría lógica.

En el pensamiento de Platón (428 a. C./427 a. C. – 347 a. C) se pueden encontrar lo que llamamos proposiciones verdaderas y falsas. Afirmaba que una serie de nombres solos ni una serie de verbos solos constituyen una proposición. El método en el pensamiento de Platón no pasa de ser un programa que sería completado por Aristóteles y Euclides (325 – 265 a. C.).

Aristóteles.

Debido a su fundamentación de la lógica y a sus frecuentes alusiones a ideas y teoremas matemáticos a lo largo de su voluminosa obra, Aristóteles puede ser considerado como un importante promotor del desarrollo de la matemática.

Carl B. Boyer, *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 2007

Es manifiesta la importancia de este sabio de la antigua Grecia en la cultura occidental. En lo que se refiere a la lógica, su mayor mérito estriba en haber creado el primer sistema lógico. Es conocido como *Silogística* y constituye una parte elemental pero importante de la lógica de términos. Sus ideas están expuestas en varias obras que se recogieron mucho después de su muerte en un compendio titulado *Organon* que contiene los

tratados de: *Las Categorías, De Interpretaciones, Los segundos Analíticos, Los Tópicos y De Sophisticis Elenchis.*

Entre los términos que introduce podemos destacar:

- Variables
- Afirmación y negación.
- Oposición y conversión.
- Silogismo, que lo define como una expresión proposicional que consta de dos proposiciones como premisas de las que se sigue necesariamente otra como conclusión. De hecho, un silogismo es una proposición "si... entonces"

Sus estudios fueron continuados por sus discípulos Teofrasto, Eudemo y otros. El primero es el autor de algunos tratados sobre el tema que se han perdido. Se sabe de su existencia por las anotaciones y referencias que se encuentran en algunos comentarios a los escritos lógicos de Aristóteles. Se le atribuye el haber perfeccionado y desarrollado algunas de las ideas presentes en la obra de Aristóteles. Entre otras, una teoría del silogismo totalmente hipotético en la que tenemos tres figuras:

$$1.- [((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)] \vee [((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg A)]$$

$$2.- [((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C)] \vee [((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B)]$$

$$3.- [((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow \neg C)) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)] \vee [((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow \neg C)) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)]$$

En esta época clásica hay que destacar a los estoicos y especialmente a Crisipo de Soli (279-206 a. C.).

Galeno (129-199 d.C.), adquirió fama como médico pero fue también uno de los más destacados lógicos de su tiempo escribiendo tratados y ensayos sobre gran variedad de problemas lógicos.

En la época romana no se hicieron aportaciones significativas.

La Edad Media.

Boecio (480-524) es considerado como el último representante de la cultura romana y el primero de la etapa medieval. Se suele marcar el año 476 como el final de la Edad Antigua y comienzo de la Edad Media. Boecio pertenecía a una vieja familia patricia y se encontró en una difícil situación al ver cómo se desmoronaba el imperio romano de occidente. Fue el autor de varios libros de texto para cada una de las cuatro ramas matemáticas de las artes liberales. Son de un nivel muy elemental y se basaban en obras anteriores (una Geometría basada en Euclides, una Astronomía extraída del *Almagesto* de Ptolomeo, etc.). Lo que ocurrió es que estos

libros, con ciertos añadidos de otros autores desconocidos, se utilizaron profusamente en las escuelas monacales medievales y de ahí su popularidad. Boecio parece haber sido también un hombre de estado; se ha afirmado que fue cristiano lo que le pudo acarrear el enfrentamiento con el emperador arriano Teodorico. Lo cierto es que fue llevado a prisión y escribió allí su obra más famosa, *De consolacione philosophiae*, mientras esperaba a ser ejecutado.

En el programa educacional de las primeras escuelas medievales la lógica fue considerada como un "arte del lenguaje" estrechamente asociada a la gramática y a la retórica, útil para interpretar textos de la Biblia y para reconciliar contradicciones aparentes halladas en tales textos. No hubo progresos durante casi cinco siglos. Los escritos de Alcuino de York (735-804), por ejemplo, apenas van más allá de las teorías de los predicables y categorías. Otro que lo intentó fue Gerberto (940-1003); es un personaje que había nacido en Francia y se educó en España e Italia y que llegó a la dignidad de papa con el nombre de Silvestre II. En sus obras sigue la estela de Boecio y quizá lo más interesante es que se le adjudica ser el primero que enseñó el uso de la numeración hindú-árabe posiblemente aprendida en su paso por España. Sin embargo esto no tuvo mucha repercusión porque hasta dos siglos después el sistema apenas era conocido en Europa.

Hasta el siglo XII, en la Europa occidental, los avances en matemáticas y en ciencia en general fueron prácticamente nulos. En 1142 Adelardo de Bath (1075-1160) hace una traducción de *Los Elementos* de Euclides del árabe al latín. Pero es en lugares como la Escuela de traductores de Toledo donde se hace una inmensa labor de traducción de los textos antiguos. En el siglo siguiente, las obras de filosofía y de ciencia de Aristóteles ya se habían traducido y se enseñaba en las universidades y en las escuelas eclesiásticas.

Precisamente la *lógica medieval* (también conocida como *lógica escolástica*) es la forma en que se desarrolló la lógica aristotélica en la Europa occidental durante el periodo 1200-1600. Como ya se ha indicado, esta tarea comenzó tras las traducciones al latín de textos árabes sobre lógica aristotélica y la lógica de Avicena. Aunque la lógica de Avicena tuvo influencia en los primeros lógicos medievales europeos tales como Alberto Magno, realmente fue la tradición aristotélica la que se convirtió en la dominante debido a la importante influencia del averroísmo.

Tras esa fase inicial de traducciones, la tradición de la lógica medieval fue desarrollada en manuales como el *Tractatus*, un manual sobre lógica, escrito por un autor del que no se tienen datos (Petrus Hispanus) pero

que fue bien conocido en Europa porque su manual se mantuvo durante siglos. Con el franciscano Guillermo de Occam (1280-1349) se llega al periodo de madurez de la lógica medieval con su obra *Summa logicae*. Trabajó en cuestiones relacionadas con lo que conocemos como las leyes de De Morgan y la lógica ternaria que es un sistema lógico con tres valores de verdad que será tomado de nuevo por la lógica matemática de los siglos XIX y XX.

La lógica moderna.

La llamada lógica matemática se inició de manera rigurosa y sistemática con la lógica formal Augustus de Morgan (1806-1871) y con el análisis matemático de la lógica de George Boole (1815-1864), publicando además sus respectivas obras el mismo año de 1847.

Sin embargo, existe un buen número de escritores que aportaron ideas y teorías de los cuales hay cuatro destacables: Leibniz, Euler, Lambert y Bolzano.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) empezó desde muy pronto a investigar la silogística aristotélica y fue en el campo de la lógica en el que hizo sus aportaciones más importantes. En 1666 escribió una tesis sobre análisis combinatorio *De Ars combinatoria* y ya, en esa temprana fecha, tuvo sus primeras ideas de lo que podría ser una lógica formal simbólica.

Leibniz pretendía reducir todas las cosas a un orden, y así, para reducir todas las discusiones lógicas a una forma sistemática, quería desarrollar una característica universal que sirviera como una especie de álgebra de la lógica.

Carl B. Boyer, *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 2007

Pero no consiguió su objetivo. Encima Voltaire, un declarado admirador de Newton, lo satirizó con dureza en su *Candide* consiguiendo un cierto abandono de las ideas de Leibniz cuya idea del álgebra de la lógica revivió en el siglo XIX y jugó un importante papel en la matemática de ese siglo.

A Leonhard Euler (1707-1783) se lo considera el autor matemático más prolífico. En lógica es recordado por sus ilustraciones geométricas de la silogística conocidos como *diagramas o círculos de Euler* (1768). Se trata de curvas cerradas en el plano que utilizó para representar conjuntos. Las relaciones entre distintos conjuntos vienen representadas por la

superposición, la contención o la separación de las superficies cerradas en estas curvas. Es evidente su relación con los diagramas de Venn.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) fue matemático y astrónomo pero dedicó una serie de ensayos a la empresa de hacer un cálculo de la lógica. Realizó aportaciones en teoría del conocimiento como se refleja en su obra *Nuevo Organon, o pensamientos sobre la investigación y designación de lo verdadero*, publicado en 1764. Se le considera representante del racionalismo y un importante predecesor de Immanuel Kant (1724-1804) quien mantuvo una viva correspondencia. Junto con Leibniz, se les tiene como precursores de la lógica simbólica. Y ya que se nombra a Kant, debemos indicar que, en su opinión, la lógica que creara Aristóteles era un conocimiento completo en el sentido de que, posteriormente, ni se había refutado nada ni se habían hecho aportaciones significativas.

Bernard Bolzano (1781-1848) es un cura checo que, por un lado tuvo unas ideas teológicas que fueron rechazadas por la iglesia y, de otro, su obra matemática fue ignorada por sus contemporáneos de forma inmerecida.

En 1837 publicó una obra (*Wissenschaftslehre*), que es un intento de elaborar una teoría del conocimiento y de la ciencia completa. Pretendió proporcionar fundamentos lógicos a todas las ciencias, construidas partiendo de abstracciones, de objetos abstractos, de atributos, de construcciones de demostraciones, vínculos... Aquí se acerca a la filosofía de las matemáticas. Para Bolzano, no tenemos ninguna certeza en cuanto a las verdades, o a las supuestas como tales, de la naturaleza o de las matemáticas, y precisamente el papel de las ciencias, tanto puras como aplicadas es hallar una justificación de las verdades (o de las leyes) fundamentales, que con frecuencia contradicen nuestras intuiciones. Muchos estudiosos, consideran este texto la primera obra importante sobre lógica y problemas de conocimiento tras la de Leibniz. En su obra *Grössenlehre*, tratará de reinterpretar toda la matemática bajo bases lógicas. Sólo llegó a publicar una parte.

Periodo Booleano

Los estudiosos de la lógica que hemos visto eran todos continentales. El empirismo británico no produjo ninguno sino que, más bien al contrario, atacaron la lógica formal por considerarla trivial. Fue Richard Whately (1787-1863) quien la sacó de esa situación.

Parte del ímpetu que tomó la lógica una vez rescatada se le debe al filósofo escocés Sir William Hamilton (1788-1856). La cuantificación total del predicado, aunque no era original suya, fue su más conocida aportación en este campo. (No confundir a este filósofo con el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)).

Pero será otro matemático inglés quien haga la más importante aportación. Se trata de George Boole, un matemático autodidacta de procedencia humilde. Consideraba que la lógica debería estar asociada a la matemática más que a la metafísica, como sostenía el escocés Hamilton. Señaló la analogía entre los símbolos del álgebra y lo que se podría hacer para representar formas lógicas y silogismos. Propuso que las proposiciones lógicas deberían expresarse en forma de ecuaciones algebraicas.

La *An Investigation of the Laws of Thought* de Boole, de 1854, es ya una obra clásica en la historia de la matemática, porque en ella extendió y clarificó las ideas presentadas en 1847, construyendo tanto la lógica formal como un nuevo tipo de álgebra, que hoy conocemos como “álgebra de Boole”, y que es a la vez el álgebra de los conjuntos y el álgebra de la lógica.

Carl B. Boyer, *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 2007

Augustus De Morgan se encuentra entre los que continuaron la obra de Boole después de su muerte. Encontró la que se suele denominar como ley de dualidad de De Morgan: para toda proposición en la que intervengan la suma y la multiplicación lógicas, hay otra proposición correspondiente a ella en la que están intercambiadas la suma y la multiplicación. En particular está la que se llama fórmula de De Morgan para conjuntos.

El norteamericano Charles Sanders Peirce (1839-1914) hizo también interesantes contribuciones pues aunque fue un filósofo sistemático en el sentido tradicional de la palabra, su obra aborda los problemas modernos de la ciencia, la verdad y el conocimiento a partir de su propia experiencia como lógico y científico experimental que trabajaba en el seno de una comunidad internacional de científicos y pensadores. Realizó importantes contribuciones a la lógica deductiva y estaba principalmente interesado en la lógica de la ciencia.