DERIVACION IMPLICITA

Sean las funciones

a) $x^3 - y^5 + 3x^2 - 6y = 1$ b) $x^3 + y^3 = 3xy$ c) $5x^3 + 2y^5 = \ln(xy)$

Están expresadas en forma implícita.

Regla General para la Derivación Implícita

Para encontrar la derivada de una función implícita, puedes seguir estos pasos:

1. **Derivar ambos lados** de la igualdad, aplicando las mismas fórmulas.
2. Escribir en el **lado izquierdo** de la igualdad todos los términos que contengan a la **derivada** y del **lado derecho** todos los términos que **no la contengan**.
3. **Factorizar** $\frac{dy}{dx}$ o y' por el lado izquierdo.
4. **Despejar** $\frac{dy}{dx}$ o y' , dividiendo en el lado derecho el factor que le multiplica.

O, utilizar la forma general: $y' = \frac{-F'_x}{F'_y}$ siempre y cuando $F(x, y) = 0$

Ejemplo 1.- Derivar la función: $x^3 - y^5 + 3x^2 - 6y = 1$ es decir encontrar y'

$$x^3 - y^5 + 3x^2 - 6y - 1 = 0$$

METODO 1

Paso 1.- $3x^2 - 5y^4y' + 6x - 6y' = 0$ *pues se debe añadir y' a cada termino que contienen y*

Paso 2.- $-5y^4y' - 6y' = -3x^2 - 6x$ (multiplicamos por -1)

Paso 3.- $(5y^4 + 6)y' = 3x^2 + 6x$

Paso 4.- $y' = \frac{3x^2+6x}{(5y^4+6)}$ **Solución:** $y' = \frac{3x^2+6x}{5y^4+6}$

METODO 2.- APLICACIÓN DE LA FORMULA $y' = \frac{-F'_x}{F'_y}$

La función Igualamos a cero $x^3 - y^5 + 3x^2 - 6y - 1 = 0$

Para encontrar F'_x

Derivamos la función con respecto a x : $x^3 - y^5 + 3x^2 - 6y - 1 = 0$

Las derivadas de y^5 y de $6y$ y 1 son igual a 0 porque no dependen de x por lo que se pueden considerar términos independientes de x en otras palabras se los consideran constantes. Entonces la derivada de la función con respecto a x será: $3x^2 + 6x$

Para encontrar F'_y

Derivamos la función con respecto a y : $x^3 - y^5 + 3x^2 - 6y - 1 = 0$

Las derivadas de x^3 y de $3x^2$ y 1 son igual a 0 porque no dependen de y por lo que se pueden considerar términos independientes de y en otras palabras se los consideran constantes. Entonces la derivada de la función con respecto a y será: $-5y^4 - 6 = -(5y^4 + 6)$

con respecto a y será: $-5y^4 - 6 = -(5y^4 + 6)$

Entonces aplicando $y' = \frac{-F'_x}{F'_y}$ la derivada será $y' = \frac{-(3x^2+6x)}{-(5y^4+6)} = \frac{3x^2+6x}{5y^4+6}$

DERIVACION LOGARITMICA

ENCONTRAR LAS DERIVADAS DE

- a) $y = x^x$
- b) $y = \frac{x(x^2+1)^3}{\sqrt{3x^2-1}}$
- c) $y = \text{sen}(x)^{\cos(x)}$

EL MÉTODO SE BASA EN LOS SIGUIENTES PASOS:

- 1) Tomar logaritmos a ambos miembros, antes de derivar
- 2) Aplicar propiedades de los logaritmos.
- 3) Derivar implícitamente.
- 4) Despejar la derivada.
- 5) Sustituir y por su definición

Derivadas de funciones complicadas que aparecen productos, cocientes o potencias combinadas

Ejemplo resuelto por pasos

Encuentrar dy/dx siguiendo los pasos de derivación logarítmica.

$$y = x^4(x - 1)^2\sqrt{x + 1}$$

Solución

P1) Tome logaritmos a ambos miembros.

P1)

$$\ln(y) = \ln(x^4(x - 1)^2\sqrt{x + 1})$$

P2) Aplique propiedades de los logaritmos en el lado derecho hasta que ningún logaritmo sea un producto, cociente o potencia.

P2)

$$\ln(y) = \ln(x^4) + \ln((x - 1)^2) + \ln((x + 1)^{1/2})$$

Falta aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia

$$\ln(y) = 4 \ln(x) + 2 \ln(x - 1) + \frac{1}{2} \ln(x + 1)$$

P3) Derive implícitamente.

P3)

$$\frac{1}{y} y' = 4 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$$

Recuerde que y' representa la derivada de y con respecto a

$$x, \frac{dy}{dx}$$

P4) Despeje y' .

P4)

$$y' = y \left(\frac{4}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} \right)$$

P5) Sustituya y por su definición.

P5)

$$y' = x^4(x-1)^2 \sqrt{x+1} \left(\frac{4}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} \right)$$

Ejemplo Encontrar la derivada de

$$y = \frac{(2x + 1)(2 - 3x)^2 e^{4x}}{4\sqrt{3x - 1}}$$

Solución Tenemos un cociente, el numerador un producto.

Usamos derivación logarítmica, pues es conveniente en este caso

P1 Tomar logaritmos a ambos miembros

$$\ln y = \ln \left(\frac{(2x + 1)(2 - 3x)^2 e^{4x}}{4(3x - 1)^{1/2}} \right)$$

Aprovechamos para escribir el radical como una potencia

P2 Aplicar propiedades de los logaritmos hasta que ningún argumento sea producto, cociente o potencia.

$$\ln y = \ln \left(\frac{(2x + 1)(2 - 3x)^2 e^{4x}}{4(3x - 1)^{1/2}} \right)$$

Logaritmo de un cociente $\ln\left(\frac{-}{-}\right)$
Es la diferencia de los logaritmos $\ln(\quad) - \ln(\quad)$

$$= \ln((2x + 1)(2 - 3x)^2 e^{4x}) - \ln(4(3x - 1)^{1/2})$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un producto en ambos términos

$$= \ln(2x + 1) + \ln(2 - 3x)^2 + \ln(e^{4x}) - (\ln 4 + \ln(3x - 1)^{1/2})$$

$$= \ln(2x + 1) + \ln(2 - 3x)^2 + \ln(e^{4x}) - \ln 4 - \ln(3x - 1)^{1/2}$$

Se puede derivar sin aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia, pero es preferible aplicar la propiedad para que las derivadas queden más sencillas.

$$\ln y = \ln(2x + 1) + 2\ln(2 - 3x) + 4x \ln(e) - \ln 4 - \frac{1}{2} \ln(3x - 1)$$

Finalmente, como $\ln e = 1$, se tiene que

$$\ln y = \ln(2x + 1) + 2\ln(2 - 3x) + 4x - \ln 4 - \frac{1}{2} \ln(3x - 1)$$

P3 Derivar implícitamente

$\ln(4)$ es una constante,
su derivada es 0

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2x + 1} \cdot 2 + \frac{1}{2 - 3x} \cdot (-3) + 4 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3x - 1} \cdot 3$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x + 1} - \frac{2 \cdot 3}{2 - 3x} + 4 - \frac{3}{2(3x - 1)}$$

Multiplicar
La resta se deja indicada

P4 Despeja y'

$$y' = y \left(\frac{2}{2x + 1} - \frac{6}{2 - 3x} + 4 + \frac{3}{2(3x - 1)} \right)$$

P5 Sustituir y

$$y' = \frac{(2x + 1)(2 - 3x)^2 e^{4x}}{4\sqrt{3x - 1}} \left(\frac{2}{2x + 1} - \frac{6}{2 - 3x} + 4 + \frac{3}{2(3x - 1)} \right)$$

Derivada de función elevada a función, $y = f(x)^{g(x)}$

Este método de derivación se usa como procedimiento alternativo para obtener la derivada de función elevada a función.

Ejemplo Para $y = (x + 1)^{x^2}$, encontrar dy/dx

P1) Tomar logaritmos a ambos miembros

$$\ln(y) = \ln\left((x + 1)^{x^2}\right)$$

P2) Aplicar propiedades de los logaritmos.

El argumento en el lado derecho es una potencia. Se aplica la propiedad.

$$\ln(y) = x^2 \ln((x + 1))$$

P3) Derivar implícitamente. En el lado derecho se aplica la propiedad de la derivada de un producto.

$$\frac{1}{y}y' = 2x \ln(x + 1) + x^2 \cdot \frac{1}{x + 1}$$

$$\frac{1}{y}y' = 2x \ln(x + 1) + \frac{x^2}{x + 1}$$

P4) Despejar y'

$$y' = y \left(2x \ln(x + 1) + \frac{x^2}{x + 1} \right)$$

P5) Sustituir y

$$y' = (x + 1)^{x^2} \left(2x \ln(x + 1) + \frac{x^2}{x + 1} \right)$$

EJEMPLO $y = (2x)^{x/2}$;

a) $y = (2x)^{x/2}$

Tanto en la base como en el exponente está la variable. La derivación logarítmica es uno de los métodos recomendados.

P1 Tomar logaritmos a ambos miembros

$$\ln y = \ln\left((2x)^{x/2}\right)$$

P2 Desarrollar los logaritmos

$$\ln y = \frac{x}{2} \ln(2x)$$

Podemos dejarlo hasta aquí, pero también podemos seguir, aplicando la propiedad del logaritmo de un producto.

$$\ln y = \frac{x}{2} (\ln 2 + \ln x)$$

P3 Derivar implícitamente

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln x) + \frac{x}{2} \left(\frac{1}{x} \right)$$

En el lado derecho se uso la regla del producto.
Simplificando queda

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln x + 1)$$

P4 Despejar y'

$$y' = y \left(\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln x + 1) \right)$$

P5 Sustituir y

$$y' = \frac{(2x)^{x/2}}{2}(\ln 2 + \ln x + 1)$$