



**UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
CHIMBORAZO**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE INGENIERÍA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL

ASIGNATURA: Estadística

DOCENTE: Ing. Lidia Castro M.Sc



UNIDAD 2 → PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

OBJETIVO DE LA UNIDAD

Calcular probabilidades aplicando definiciones y propiedades axiomáticas de la teoría de probabilidad.

Aplicar la teoría de distribuciones discretas y continuas de probabilidad en el campo de la Ingeniería Civil.



1. Aspectos básicos de la probabilidad.



2. Propiedades y Teoremas de la probabilidad.



3. Distribuciones continuas.



4. Distribuciones discretas.



5. Aplicación Informática.

Distribuciones de probabilidad discreta

La distribución de probabilidad de X indica cómo está distribuida (asignada) la probabilidad total de 1 entre los varios posibles valores de X .

La distribución de probabilidad o función masa de probabilidad (fmp) de una variable discreta se define para cada número x como $p(x) = P(X = x) = P(\text{todas las } s \in \mathcal{S}: X(s) = x)$.

Función masa de probabilidad (para variable discreta)

Definición:

Para cada valor posible x de la variable aleatoria, la función masa de probabilidad especifica la probabilidad de observar dicho valor cuando se realiza el experimento.

Condiciones:

- $p(x) \geq 0$
- $\sum_{\text{todas las } x \text{ posibles}} p(x) = 1$ de cualquier función masa de probabilidad.

Ejemplo 1

Seis lotes de componentes están listos para ser enviados por un proveedor. El número de componentes defectuosos en cada lote es como sigue:

<i>Lote</i>	1	2	3	4	5	6
<i>Número de defectuosos</i>	0	2	0	1	2	0

Uno de estos lotes tiene que ser seleccionado al azar para ser enviado a un cliente particular.

Calcule la probabilidad de cada uno de ellos.

Ejemplo 2

Una cierta gasolinería tiene seis bombas. Sea X el número de bombas que están en servicio a una hora particular del día. Suponga que la distribución de probabilidad de X es como se da en la tabla siguiente; la primera fila de la tabla contiene los posibles valores de X y la segunda da la probabilidad de dicho valor.

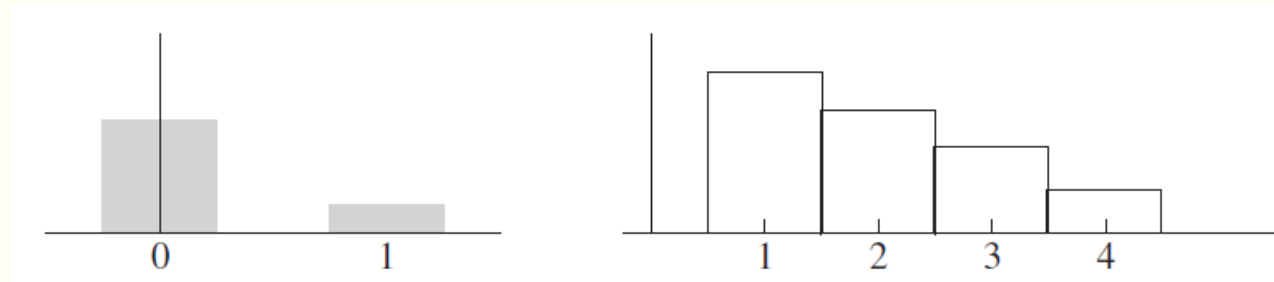
x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

1. La probabilidad de que cuando mucho dos bombas estén en servicio.
2. La probabilidad de que entre 2 y 5 bombas inclusive estén en servicio.
3. La probabilidad de que el número de bombas en servicio esté estrictamente entre 2 y 5.

Histograma de probabilidad

Otra representación pictórica útil de una función de masa de probabilidad, llamada histograma de probabilidad. Sobre cada y con $p(y) > 0$, se construye un rectángulo con su centro en y .

La altura de cada rectángulo es proporcional a $p(y)$ y la base es la misma para todos los rectángulos. Cuando los valores posibles están equidistantes, con frecuencia se selecciona la base como la distancia entre valores y sucesivos (aunque podría ser más pequeña). La figura 3.4 muestra dos histogramas de probabilidad.



Función de distribución acumulativa

La **función de distribución acumulativa** (fda) $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X con función masa de probabilidad $p(x)$ se define para cada número x c

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y: y \leq x} p(y) \quad (3.3)$$

Para cualquier número x , $F(x)$ es la probabilidad de que el valor observado de X será cuando mucho x .

Ejemplo 3

Si se tiene la función masa de probabilidad, calcula la función de distribución acumulativa $F(x)$.

$$p(x) = \begin{cases} 0.500 & x = 0 \\ 0.167 & x = 1 \\ 0.333 & x = 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Ejemplo 4

La función masa de probabilidad de Y (el número de determinaciones de tipo de sangre) es la siguiente, calcule la función de distribución acumulativa $F(y)$.

y	1	2	3	4
$p(y)$	0.4	0.3	0.2	0.1

PROPOSICIÓN

Para dos números cualesquiera a y b con $a \leq b$.

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$$

donde “ $a-$ ” representa el valor posible de X más grande que es estrictamente menor que a . En particular, si los únicos valores posibles son enteros y si a y b son enteros, entonces

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X = a \text{ o } a + 1 \text{ o } \dots \text{ o } b) \\ &= F(b) - F(a - 1) \end{aligned}$$

Con $a = b$ se obtiene $P(X = a) = F(a) - F(a - 1)$ en este caso.

Ejemplo 5

Sea X el número de días de ausencia por enfermedad tomados por un empleado seleccionado al azar de una gran compañía durante un año particular.

Si el número máximo de días de ausencia por enfermedad permisibles al año es de 14, los valores posibles de X son $0, 1, \dots, 14$. Con:

$F(0)=0.58$	$F(1)=0.72$	$F(2) =0.76$	$F(3)=0.81$	$F(4)=0.88$	$F(5)=0.94$
-------------	-------------	--------------	-------------	-------------	-------------

Calcule la probabilidad de $p(2 \leq x \leq 5)$ y la $p(x = 3)$.

Valores esperados

DEFINICIÓN

Sea X una variable aleatoria discreta con un conjunto de valores posibles D y una función masa de probabilidad $p(x)$. El valor esperado o valor medio de X , denotado por $E(X)$ o μ_X , es

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in D} x \cdot p(x)$$

Ejemplo 6

Exactamente después de nacer, cada niño recién nacido es evaluado en una escala llamada escala de Apgar. Las evaluaciones posibles son 0, 1, . . . , 10, con la evaluación del niño determinada por color, tono muscular, esfuerzo para respirar, ritmo cardiaco e irritabilidad refleja (la mejor evaluación posible es 10). Sea X la evaluación Apgar de un niño seleccionado al azar nacido en cierto hospital durante el siguiente año y supóngase que la función masa de probabilidad de X es, encuentre su valor esperado.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	0.002	0.001	0.002	0.005	0.02	0.04	0.18	0.37	0.25	0.12	0.01

Ejemplo 7

X es el número de entrevistas que un estudiante sostiene antes de conseguir un trabajo y tiene la función masa de probabilidad, encuentre el valor esperado.

$$p(x) = \begin{cases} k/x^2 & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Valor esperado de una función

A menudo interesará el valor esperado de alguna función $h(X)$ en lugar de X propiamente dicha.

Ejemplo 8: Suponga que una librería adquiere diez ejemplares de un libro a \$6.00 cada uno para venderlos a \$12.00 en el entendimiento de que al final de un periodo de 3 meses cualquier ejemplar no vendido puede ser compensado por \$2.00. ¿Cuál es el ingreso neto?

Si la variable aleatoria X tiene un conjunto de posibles valores D y una función masa de probabilidad $p(x)$, entonces el valor esperado de cualquier función $h(X)$, denotada por $E[h(X)]$ o $\mu_{h(X)}$, se calcula con

$$E[h(X)] = \sum_D h(x) \cdot p(x)$$

Ejemplo 9

Una tienda de computadoras adquirió tres computadoras de un tipo a \$500 cada una. Las venderá a \$1000 cada una. El fabricante se comprometió a readquirir cualquier computadora que no se haya vendido después de un periodo especificado a \$200 cada una.

Sea X el número de computadoras vendidas y suponga que $p(0)=0.1$, $p(1)=0.2$, $p(2)=0.3$ y $p(3)=0.4$. Con $h(X)$ denotando la utilidad asociada con la venta de X unidades. Calcule el valor esperado.

Reglas de valor esperado

La función de interés $h(X)$ con bastante frecuencia es una función lineal $aX+b$. En este caso, $E[h(X)]$ es fácil de calcular a partir de $E(X)$.

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

(O, con notación alternativa, $\mu_{aX+b} = \alpha \cdot \mu_X + b$.)

1. Con cualquier constante a , $E(aX) = a \cdot E(X)$ (considérese $b = 0$). (3.12)
2. Con cualquier constante b , $E(X + b) = E(X) + b$ (considérese $a = 1$).

Varianza de X

El valor esperado de X describe dónde está centrada la distribución de probabilidad. Utilizando la analogía física de colocar una masa puntual $p(x)$ en el valor x sobre un eje unidimensional, si el eje estuviera entonces soportado por un fulcro colocado en μ , el eje no tendería a ladearse.

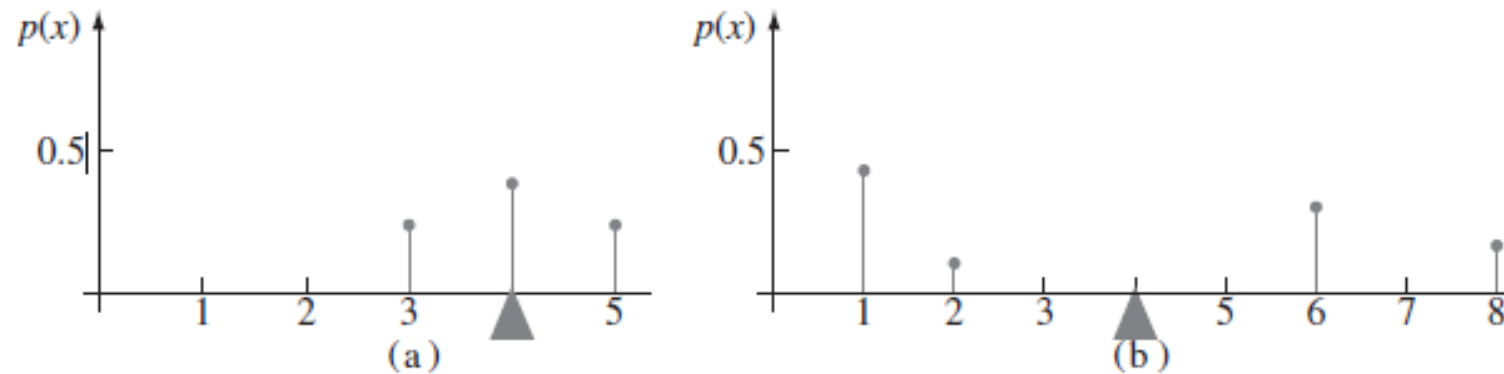


Figura 3.7 Dos distribuciones de probabilidad diferentes con $\mu = 4$.

Definición

Sea $p(x)$ la función masa de probabilidad de X y μ su valor esperado. En ese caso la varianza de X , denotada por $V(X)$ o σ_X^2 o simplemente σ^2 , es

$$V(X) = \sum_D (x - \mu)^2 \cdot p(x) = E[(X - \mu)^2]$$

La desviación estándar (DE) de X es

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Ejemplo 10

Si X es el número de cilindros del siguiente carro que va a ser afinado en un taller de servicio, con la función masa de probabilidad dada $p(4)=0.5$, $p(6)=0.3$, $p(8)=0.2$, calcule la varianza y la desviación estándar.

Fórmula alternativa

$$V(X) = \sigma^2 = \left[\sum_D x^2 \cdot p(x) \right] - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Calcule el ejemplo anterior con la fórmula alternativa.

¡GRACIAS!

