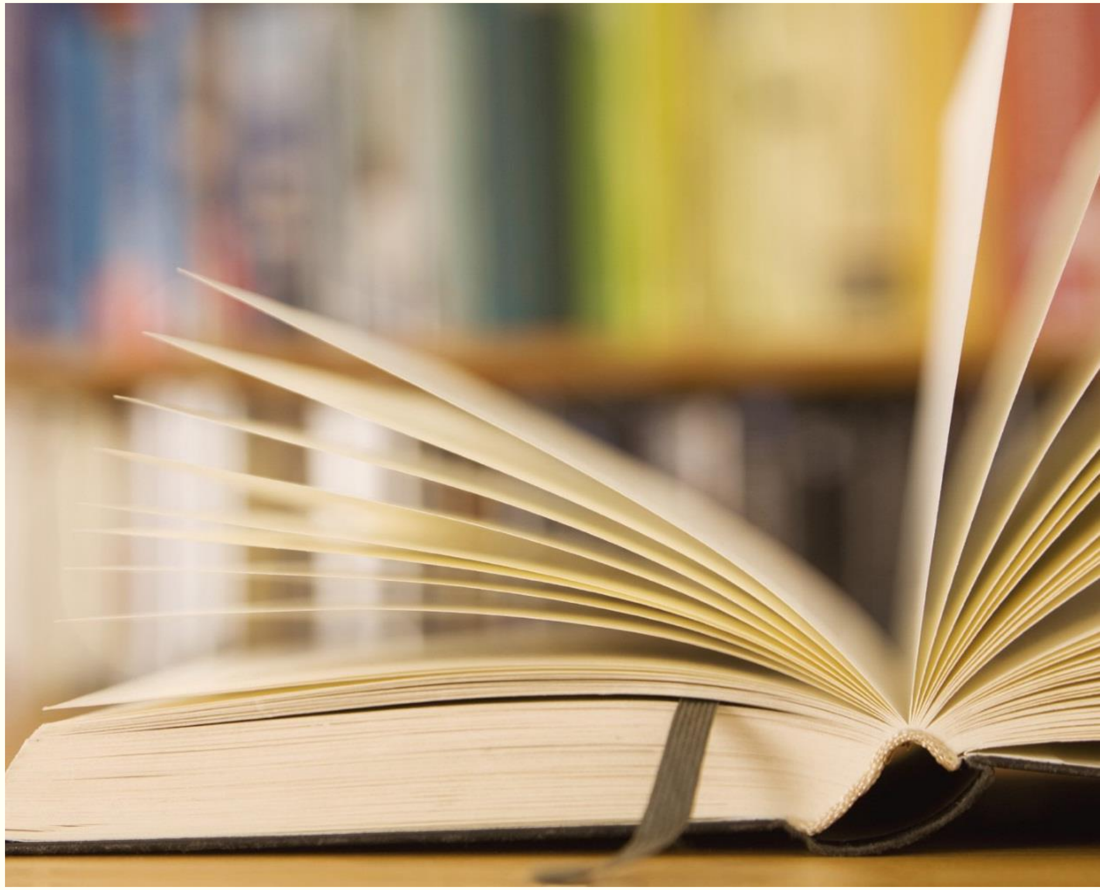
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL

ASIGNATURA: Estadística

DOCENTE: Ing. Lidia Castro M.Sc



UNIDAD 2 → PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

OBJETIVO DE LA UNIDAD

Calcular probabilidades aplicando definiciones y propiedades axiomáticas de la teoría de probabilidad.

Aplicar la teoría de distribuciones discretas y continuas de probabilidad en el campo de la Ingeniería Civil.

1. Aspectos básicos de la probabilidad.
2. Propiedades y Teoremas de la probabilidad.
3. Distribuciones continuas.
4. Distribuciones discretas.
5. Aplicación Informática.

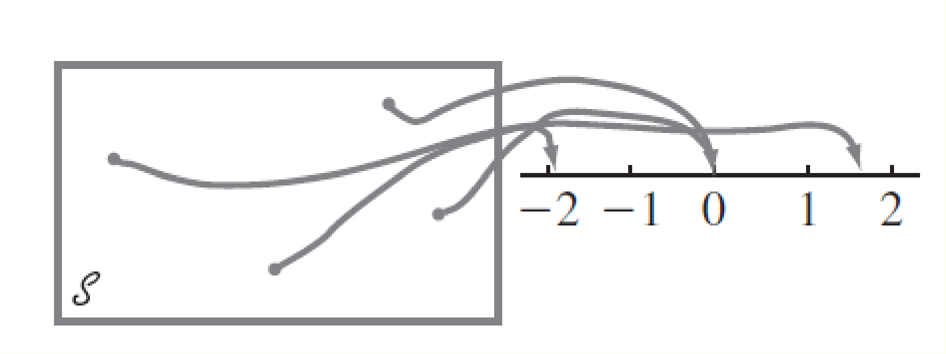
Introducción

- Ya sea que un experimento produzca resultados cualitativos o cuantitativos, los métodos de análisis estadístico requieren enfocarse en ciertos aspectos numéricos de los datos.
- El concepto de **variable aleatoria** permite pasar de los **resultados experimentales** a la **función numérica de los resultados**.
- Existen dos tipos fundamentalmente diferentes de variables aleatorias: **las variables aleatorias discretas** y **las variables aleatorias continuas**. En este tema, se examinan las propiedades básicas y se discuten los ejemplos más importantes de variables discretas y continuas

Variables aleatorias

- En cualquier experimento, existen numerosas características que pueden ser observadas o medidas, pero en la mayoría de los casos un experimentador se enfoca en algún aspecto específico o aspectos de una muestra.

- *Variable aleatoria,* variable porque diferentes valores numéricos son posibles y aleatoria porque el valor observado depende de cuál de los posibles resultados experimentales resulte.



Definición

Para un espacio muestral dado $\mathcal{S}$ de algún experimento, una **variable aleatoria** (**va, o rv**, por sus siglas en inglés) es cualquier regla que asocia un número con cada resultado en $\mathcal{S}$. En lenguaje matemático, una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestral y cuyo rango es el conjunto de números reales.

Se acostumbra a denotar las variables aleatorias con letras mayúsculas, tales como X y Y

Cualquier variable aleatoria cuyos únicos valores posibles son 0 y 1 se llama **variable aleatoria de Bernoulli**.

Dos tipos de variables aleatorias

Una variable aleatoria **discreta** es una variable aleatoria cuyos valores posibles o constituyen un conjunto finito o bien pueden ser puestos en lista en una secuencia infinita en la cual existe un primer elemento, un segundo elemento, y así sucesivamente ("contablemente" infinita).

Una variable aleatoria es **continua** si *ambas* de las siguientes condiciones aplican:

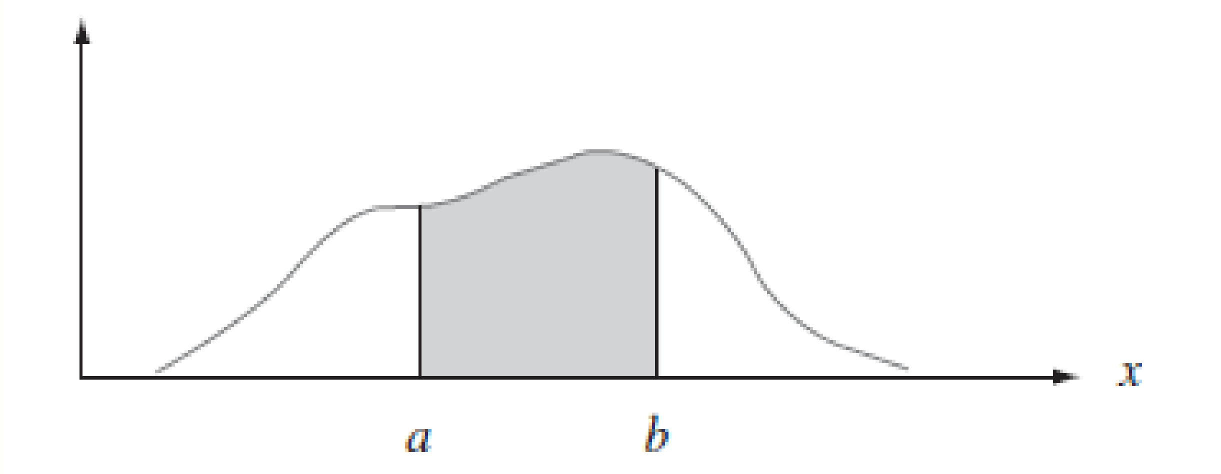
1. Su conjunto de valores posibles se compone de o todos los números que hay en un solo intervalo sobre la línea de numeración (posiblemente de extensión infinita, es decir, desde $-\infty$ hasta ∞) o todos los números en una unión excluyente de dichos intervalos (p. ej., $[0, 10] \cup [20, 30]$).

2. Ningún valor posible de la variable aleatoria tiene probabilidad positiva, esto es, $P(X = c) = 0$ con cualquier valor posible de c.

Variables aleatorias continuas y distribuciones de probabilidad

FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

- Una variable aleatoria cuyo conjunto de valores posibles es un intervalo completo de números no es discreta.



Funciones de densidad de probabilidad

Una variable aleatoria X es continua si

1) Sus valores posibles comprenden un solo intervalo sobre la línea de numeración (para alguna $A < B$, cualquier número x entre A y B es un valor posible) o una unión de intervalos disjuntos.

2) $P(X=c)=0$ para cualquier número c que sea un valor posible de X.

EJEMPLO

En el estudio de la ecología de un lago, se mide la profundidad en lugares seleccionados, entonces ***X=la profundidad en ese lugar*** es una variable aleatoria continua. En este caso A es la profundidad mínima en la región muestreada y B es la profundidad máxima.

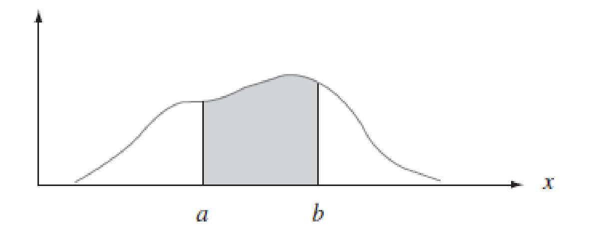
Distribuciones de probabilidad de variables continuas

DEFINICIÓN

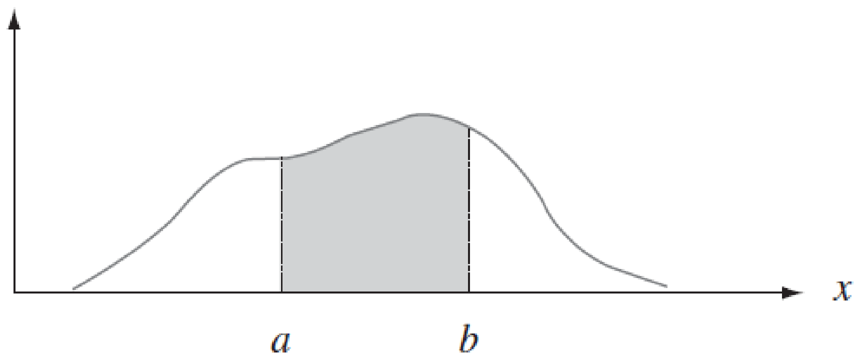
Sea X una variable aleatoria continua. Entonces, una **distribución de probabilidad** o **función de densidad de probabilidad** (fdp) de X es una función $f(x)$ tal que para dos números cualesquiera a y b con $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

La probabilidad de que X asuma un valor en el intervalo [a, b] es el área sobre este intervalo y bajo la gráfica de la función de densidad, como se ilustra en la figura



Condiciones



$P(a \leq X \leq b)$ = el área debajo de la curva de densidad entre *a* y *b*.

Para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad legítima, debe satisfacer las dos siguientes condiciones:

1. $f(x) \geq 0$ con todas las x

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx =$ área bajo la curva $f(x)$
$= 1$

Ejemplo

Considérese la línea de referencia que conecta el vástago de la válvula de un neumático con su punto central y sea X el ángulo medido en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a la ubicación de una imperfección.

Una posible función de densidad de probabilidad de X es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{360} & 0 \leq x < 360 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

- Calcule la probabilidad de que el ángulo esté entre 90° y 180°

Aclaración

La probabilidad de que X quede en algún intervalo entre a y b no depende de si el límite inferior a o el límite superior b está incluido en el cálculo de probabilidad:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

Ejemplo: "Intervalo de tiempo" en el flujo de tránsito es el tiempo transcurrido entre el tiempo en que un carro termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente carro comienza a pasar por ese punto. Sea X el intervalo de tiempo de dos carros consecutivos seleccionados al azar en una autopista durante un periodo de tráfico intenso. La siguiente función de densidad de probabilidad de X es en esencia el sugerido en "The Statistical Properties of Freeway Traffic". Demostrar la segunda condición.

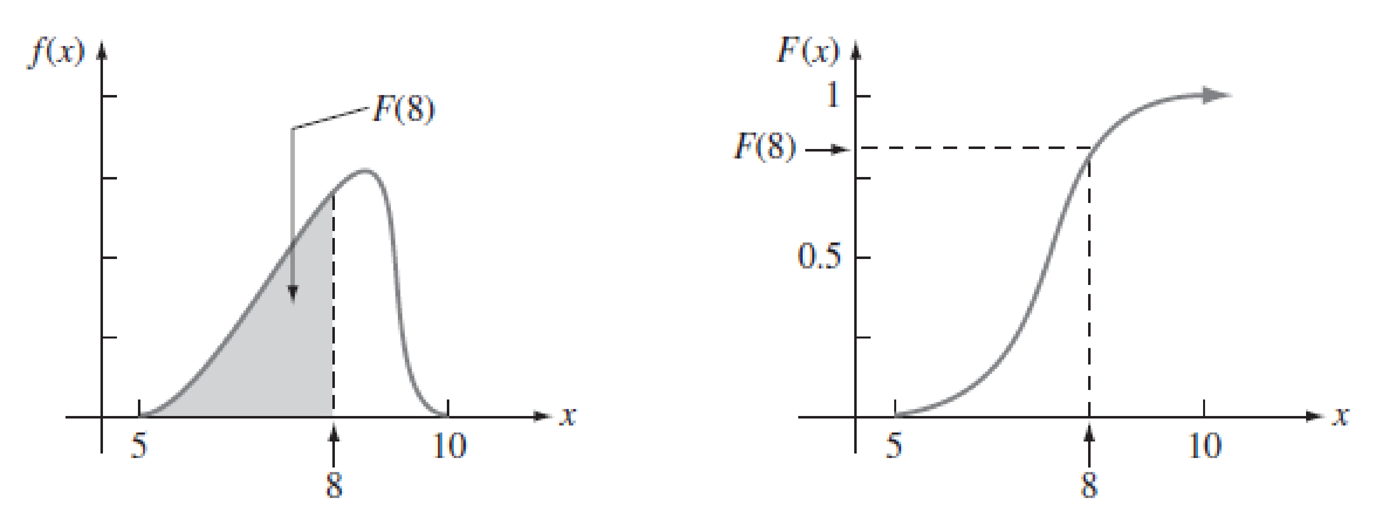
$$f(x) = \begin{cases} 0.15e^{-0.15(x-0.5)} & x \geq 0.5 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Funciones de distribución acumulativa y valores esperados

- Función de distribución acumulativa

La **función de distribución acumulativa** $F(x)$ de una variable aleatoria continua X se define para todo número x como

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$



Utilización de F(x) para calcular probabilidades

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y función de distribución acumulativa $F(x)$. Entonces con cualquier número a,

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

y para dos números cualesquiera a y b con $a < b$.

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Ejemplo

Suponga que la función de densidad de probabilidad de la magnitud X de una carga dinámica sobre un puente (en newtons) está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

- Calcule F(x) y la probabilidad de que la carga esté entre 1 y 1.5.

Obtención de f(x) a partir de F(x)

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y función de distribución acumulativa $F(x)$, entonces con cada x hace posible que la derivada $F'(x)$ exista, $F'(x) = f(x)$.

Percentiles de una distribución continua

Sea p un número entere 0 y 1. El **$(100p)$° percentil** de la distribución de una variable aleatoria continua X, denotada por $\eta(p)$, se define como

$$p = F(\eta(p)) = \int_{-\infty}^{\eta(p)} f(y)\, dy$$

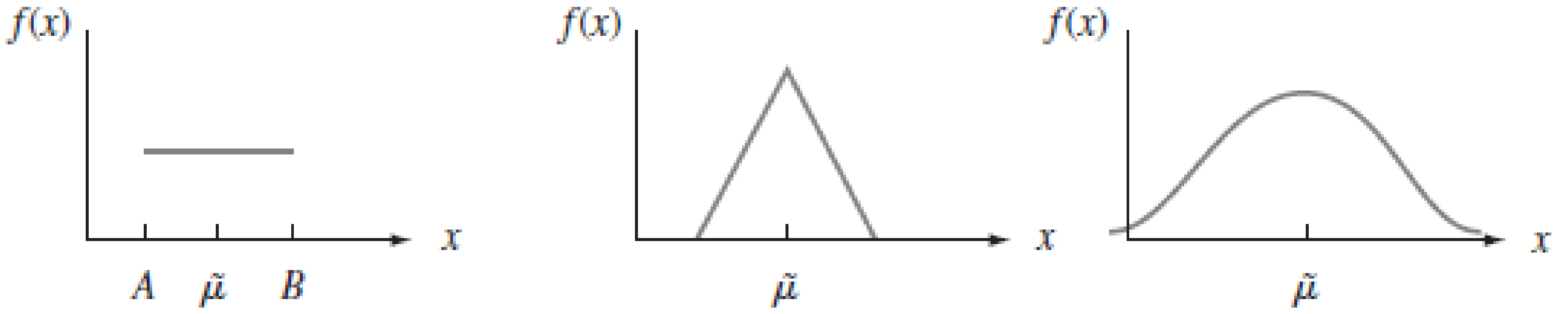
Ejemplo

La distribución de la cantidad de grava (en toneladas) vendida por una compañía de materiales para la construcción particular en una semana dada es una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad. Calcule su percentil 50.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Mediana

La **mediana** de una distribución continua, denotada por $\tilde{\mu}$, es el 50º percentil, así que $\tilde{\mu}$ satisface $0.5 = F(\tilde{\mu})$. Es decir, la mitad del área bajo la curva de densidad se encuentra a la izquierda de $\tilde{\mu}$ y la mitad a la derecha de $\tilde{\mu}$.



Valores esperados

El **valor esperado** o **valor medio** de una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f(x)$ es

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Ejemplo: La función de densidad de probabilidad de las ventas semanales de grava X, calcule su valor esperado.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Varianza

La **varianza** de una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y valor medio μ es

$$\sigma_X^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx = E[(X-\mu)^2]$$

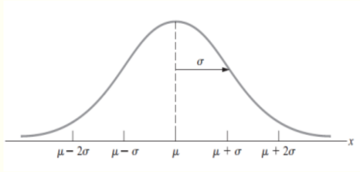
La **desviación estándar** (DE) de X es $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

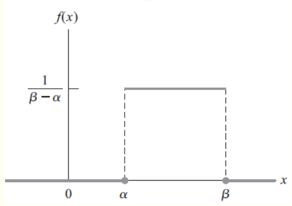
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

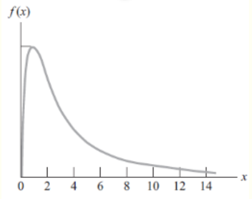
Distribuciones de Probabilidad Continuas

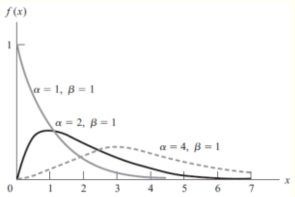
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

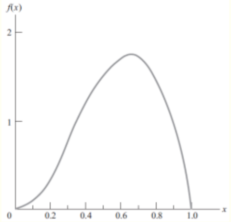
- NORMAL
- UNIFORME
- LOGARÍTMICA NORMAL
- GAMMA
- BETA
- DE WEIBULL

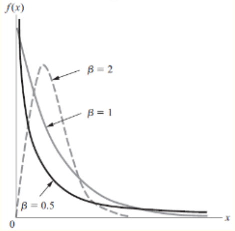












Distribución uniforme

Se dice que una variable aleatoria continua X tiene una **distribución uniforme** en el intervalo $[A, B]$ si la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \dfrac{1}{B - A} & A \leq x \leq B \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Cuando X es una variable aleatoria discreta, a cada valor posible se le asigna una probabilidad positiva. Esto no es cierto en el caso de una variable aleatoria continua (es decir, se satisface la segunda condición de la definición) porque el área bajo una curva de densidad situada sobre cualquier valor único es cero:

$$P(X = c) = \int_c^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx = 0$$

¡GRACIAS!