CAPITULO XIII

ENSAMBLAJE DIRECTO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA

RESUMEN

Se presenta el fundamento matemático que conduce al algoritmo denominado ensamblaje directo para encontrar la matriz de rigidez de una estructura por medio del computador. Se obtiene esta matriz para estructuras planas cuyos miembros se estudiaron en el capítulo XII. Finalmente se indica la forma de como obtener la matriz de rigidez para armaduras y pórticos planos utilizando el programa CAL86.

13.1 MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A.

Se va a obtener la matriz de compatibilidad de deformaciones **A**, orientado al uso del computador, para el marco plano de la figura N.- 13.1.1. Para no tener que escribir demasiados números el marco plano que se analiza tiene solo dos elementos. En la figura N.- 13.1.2 se presenta el sistema de coordenadas de miembro **P - p** y en la 13.1.3 el sistema de coordenadas generalizadas **Q - q**.

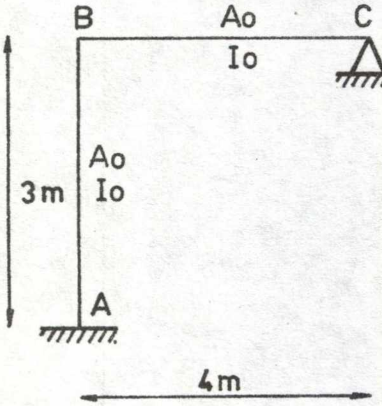


Figura N.- 13.1.1

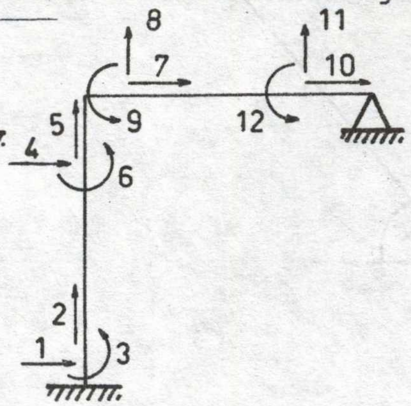


Figura N.- 13.1.2
Sistema **P - p**

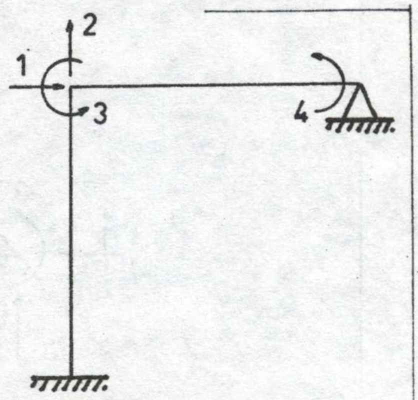


Figura N.- 13.1.3
Sistema **Q - q**

Antes de calcular vale la pena realizar las siguientes acotaciones:

i) Los elementos del marco plano son totalmente flexibles, esto facilita la elaboración de un programa de computación para obtener la matriz de rigidez de la estructura.

ii) El sistema de coordenadas de miembro se considera en coordenadas globales.

Para el ejemplo analizado las seis primeras coordenadas de miembro de la figura N.- 13.1.2 corresponden a la columna y las seis restantes a la viga.

Si bien es cierto en el capítulo V ya se presentó las coordenadas globales de miembro y en el capítulo XII se obtuvo la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales no se ha hablado sobre las deformaciones **p** (minúscula) y las cargas **P** (mayúscula) lo que se realizará a continuación.

Figura N.- 13.2 Sistema **P** - **p**
Coordenadas globales de miembro.

El vector transpuesto de las deformaciones **p** tiene la siguiente forma:

$$p^t = [\ p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6\ ]$$

p_1 Componente de desplazamiento horizontal del nudo inicial.
p_2 Componente de desplazamiento vertical del nudo inicial.
p_3 Rotación del nudo inicial.
p_4 Componente de desplazamiento horizontal del nudo final.
p_5 Componente de desplazamiento vertical del nudo final.
p_6 Rotación del nudo final.

Para el vector de cargas **P** (mayúscula) se tiene:

$$P^t = [\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5\ P_6\ ]$$

P_1 Fuerza horizontal en el nudo inicial.
P_2 Fuerza vertical en el nudo inicial.
P_3 Momento en el nudo inicial.
P_4 Fuerza horizontal en el nudo final.
P_5 Fuerza vertical en el nudo final.
P_6 Momento en el nudo final.

En los programas de computación las estructuras se resuelven en coordenadas globales.

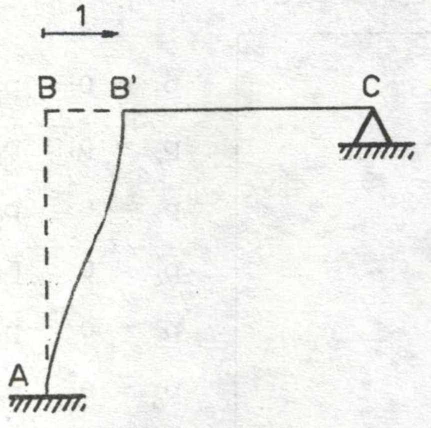
En el capítulo IX se definió la matriz de compatibilidad de deformaciones **A**, de la siguiente manera:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\ \mathbf{q} \qquad (1)$$

Por lo tanto, para encontrar la matriz **A** del marco plano de la figura N.- 13.1.1 se procede de la siguiente manera:

Primera columna de A.

$q_1 = 1$ y $q_i = 0$ $i \neq 1$

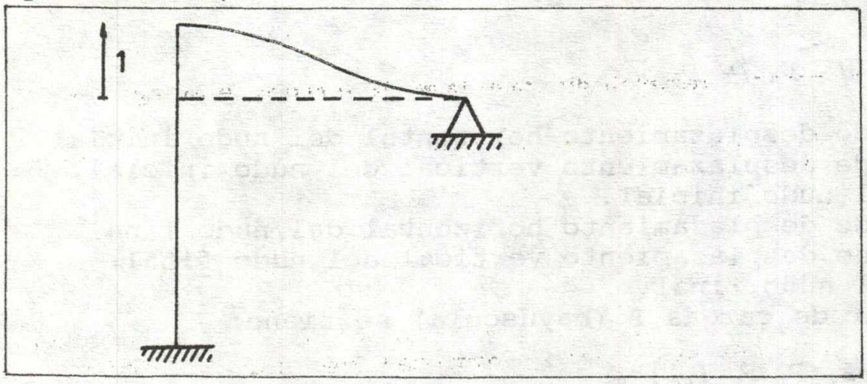


$p_1 = 0$ $p_7 = 1$
$p_2 = 0$ $p_8 = 0$
$p_3 = 0$ $p_9 = 0$
$p_4 = 1$ $p_{10} = 0$
$p_5 = 0$ $p_{11} = 0$
$p_6 = 0$ $p_{12} = 0$

Figura N.- 13.3.1 Deformada elemental q_1

Segunda columna de A.

$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$

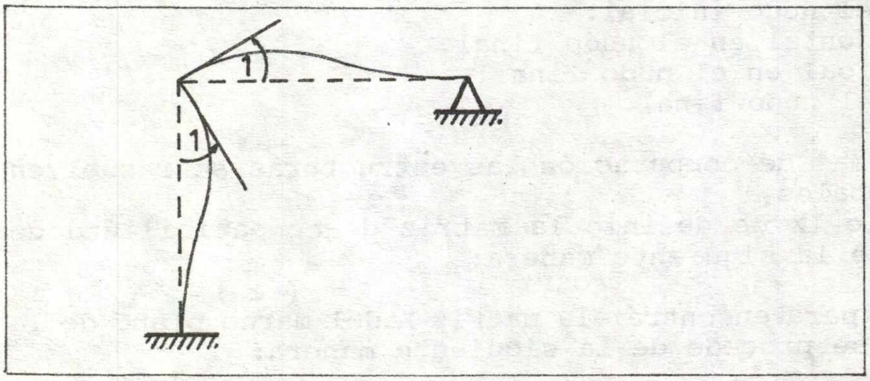


$p_1 = 0$	$p_7 = 0$
$p_2 = 0$	$p_8 = 1$
$p_3 = 0$	$p_9 = 0$
$p_4 = 0$	$p_{10} = 0$
$p_5 = 1$	$p_{11} = 0$
$p_6 = 0$	$p_{12} = 0$

Figura N.- 13.3.2 Deformada elemental q_2

Tercera columna de A.

$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$

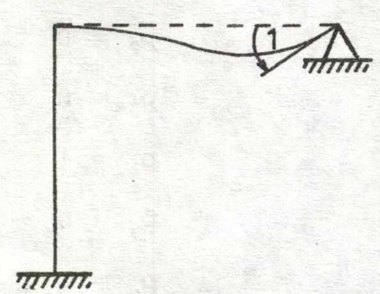


$p_1 = 0$	$p_7 = 0$
$p_2 = 0$	$p_8 = 0$
$p_3 = 0$	$p_9 = 1$
$p_4 = 0$	$p_{10} = 0$
$p_5 = 0$	$p_{11} = 0$
$p_6 = 1$	$p_{12} = 0$

Figura N.- 13.3.3 Deformada elemental q_3

Cuarta columna de A.

$q_4 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 4$



$p_1 = 0$	$p_7 = 0$
$p_2 = 0$	$p_8 = 0$
$p_3 = 0$	$p_9 = 0$
$p_4 = 0$	$p_{10} = 0$
$p_5 = 0$	$p_{11} = 0$
$p_6 = 0$	$p_{12} = 1$

Figura N.- 13.3.4 Deformada elemental q_4

Luego, la matriz **A**, resulta:

$$
\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} \mathbf{A}^{(1)} \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} \mathbf{A}^{(2)}
\end{array}
$$

La matriz **A**, orientada al uso del computador, está compuesta únicamente por ceros y unos. Su cálculo es muy sencillo, pero implica demasiados números.

13.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA.

La matriz de rigidez de miembro debe estar en concordancia con el sistema de coordenadas de miembro. Por lo tanto si el sistema de coordenadas de miembro está en coordenadas globales la matriz de rigidez de miembro se evaluará en coordenadas globales.

Por ahora no interesan los valores de la matriz de rigidez de miembro razón por la cual se resuelve en forma literal el marco plano de la figura N.- 13.1.1; se va a utilizar el índice uno para indicar que corresponde a la columna y el índice dos para la viga. Al emplear los formularios indicados en el capítulo XII se obtiene:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Como se estudió en el capítulo X, la matriz de rigidez de la estructura se obtiene con la ecuación 2.

$$K = \sum_{i=1}^{n} A^{(i)\,t} k^{(i)} A^{(i)}$$

Para el presente ejemplo los triples productos matriciales indicados en la ecuación 2, son:

PRODUCTO $A^{(1)\,t}\ K^{(1)}\ A^{(1)}$

$$A^{(1)t}k^{(1)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} & 0 \\ k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} & 0 \\ k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PRODUCTO $A^{(2)\,t}k^{(2)}A^{(2)}$

$$\mathbf{A}^{(2)t}\mathbf{k}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de rigidez del marco plano resulta:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} k_{44}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & k_{45}^{(1)}+k_{12}^{(2)} & k_{46}^{(1)}+k_{13}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ \hline k_{54}^{(1)}+k_{21}^{(2)} & k_{55}^{(1)}+k_{22}^{(2)} & k_{56}^{(1)}+k_{23}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ \hline k_{64}^{(1)}+k_{31}^{(2)} & k_{65}^{(1)}+k_{32}^{(2)} & k_{66}^{(1)}+k_{33}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ \hline k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{array}\right]$$

13.3 ENSAMBLAJE DIRECTO

En el capítulo V se definió lo que es el vector de colocación de un miembro; para el marco plano de la figura 13.1.3 los vectores de colocación, son:

$$VC(1) = [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ ]$$
$$VC(2) = [\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 4\ ]$$

Los tres primeros dígitos de VC corresponden a los grados de libertad del nudo inicial y los tres últimos a los grados de libertad del nudo final.

Se llega a obtener el mismo resultado de la matriz de rigidez de la estructura analizada en los numerales anteriores, si sobre la matriz de rigidez de cada miembro se coloca el vector de colocación respectivo, en la parte superior y a la derecha, como se explica a continuación.

Miembro 1

$$\begin{array}{cc} [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ ] & \\ \mathbf{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez del miembro 1 van a la posición cero en la matriz de rigidez de la estructura pero como no existe la posición cero toda la primera columna no contribuye, razón por la cual se traza una línea vertical, lo propio sucede con la segunda y tercera columnas. Los elementos de la cuarta columna si contribuyen a la formación de **K** (mayúscula). Ahora bien, a nivel de filas, la primera fila tiene un cero por lo que no contribuye trazándose por tanto una línea horizontal, de igual manera la segunda y tercera filas no contribuyen.

Los elementos no rayados son la contribución del miembro 1 a la matriz de rigidez de la estructura. El vector de colocación indica la posición en la cual deben ubicarse estos términos así el elemento $k_{44}^{(1)}$ vá a la columna 1 fila 1, el término $k_{54}^{(1)}$ vá a la columna 1 fila 2, etc.

Por lo tanto la matriz de rigidez de miembro se ensambla en la matriz de rigidez de la estructura mediante su vector de colocación.

Miembro 2

$$
\mathbf{k}^{(2)} = \begin{array}{c}
[\begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 0 & \quad 0 & \quad 4 \end{matrix}] \\
\begin{bmatrix}
k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & \cancel{k_{14}^{(2)}} & \cancel{k_{15}^{(2)}} & k_{16}^{(2)} \\
k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & \cancel{k_{24}^{(2)}} & \cancel{k_{25}^{(2)}} & k_{26}^{(2)} \\
k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & \cancel{k_{34}^{(2)}} & \cancel{k_{35}^{(2)}} & k_{36}^{(2)} \\
\cancel{k_{41}^{(2)}} & \cancel{k_{42}^{(2)}} & \cancel{k_{43}^{(2)}} & \cancel{k_{44}^{(2)}} & \cancel{k_{45}^{(2)}} & \cancel{k_{46}^{(2)}} \\
\cancel{k_{51}^{(2)}} & \cancel{k_{52}^{(2)}} & \cancel{k_{53}^{(2)}} & \cancel{k_{54}^{(2)}} & \cancel{k_{55}^{(2)}} & \cancel{k_{56}^{(2)}} \\
k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & \cancel{k_{64}^{(2)}} & \cancel{k_{65}^{(2)}} & k_{66}^{(2)}
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

El elemento $k_{11}^{(2)}$ va a la posición (1 , 1) y se sumará al término $k_{44}^{(1)}$ que ya estaba en esa posición, el término $k_{21}^{(2)}$ va a la posición (2 , 1) y se suma a $k_{54}^{(1)}$, etc. De esta forma se obtiene la matriz de rigidez para la estructura de la figura N.- 13.1.1 y cuyo resultado se indica al final del numeral 13.2.

El fundamento del ensamblaje directo viene dado por el concepto de rigidez de una estructura asociado a la circunstancia de que la matriz **A** está compuesta únicamente por ceros y unos.

13.4 EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO N.- 1

Determinar la matriz de rigidez, por ensamblaje directo de la estructura mostrada en la figura N.- 13.4.1. El sistema de coordenadas de la estructura se indica en la figura N.- 13.4.2 al igual que la numeración de los miembros.

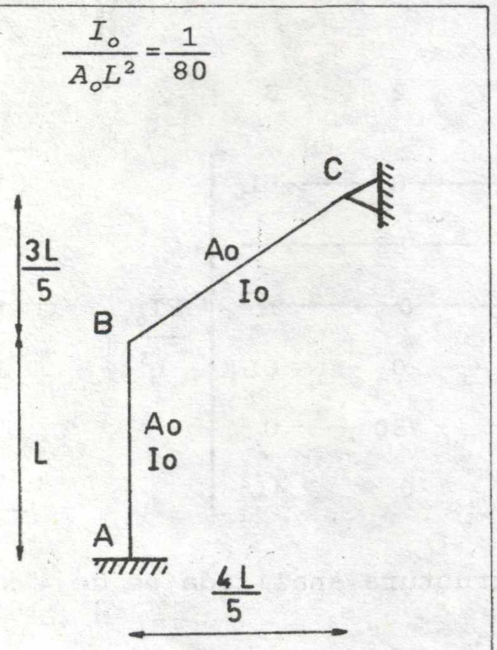


Figura N.- 13.4.1
Datos del ejemplo N.- 1

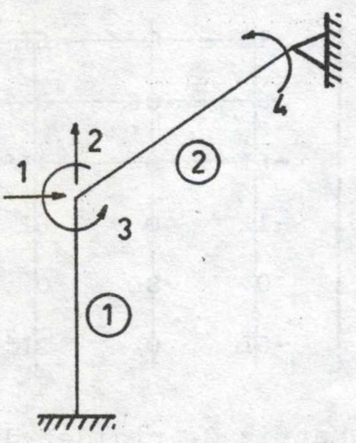


Figura N.- 13.4.2 Sistema **Q - q**
y numeración de miembros

SOLUCION

Para el miembro 1, se considera que el nudo inicial corresponde a la junta A y el final al nudo B. Luego el ángulo que forma el eje del miembro con el eje X es 90 grados. La matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales resulta.

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 80 & 0 & 0 & -80 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{EI_o}{L^3}$$

No se considera el efecto de corte y se ha reemplazado la condición de que $A_o = 80\ I_o\ /\ L^2$ dato del problema. Para el miembro 1 el vector de colocación es:

$$VC(1) = [\ 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3\ ]$$

Luego al colocar el VC sobre y a la derecha de la matriz de rigidez de miembro, se tiene:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} [\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\ ] \end{array} \\
k^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 80 & 0 & 0 & -80 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \dfrac{EI_o}{L^3} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{array}$$

La matriz de rigidez de la estructura analizada es de 4 x 4 y la contribución del miembro 1, es:

$$K = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 12 & & 6L & \\ \hline & 80 & & \\ \hline 6L & & 4L^2 & \\ \hline & & & \end{array}\right] \frac{EI_o}{L^3}$$

Para el miembro 2, se tiene que:

$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\ \alpha = \frac{4}{5}$$

Al reemplazar estos valores en la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales y al proceder en forma similar al miembro 1 teniendo presente que:

$$VC(2) = [\ 1\quad 2\quad 3\quad 0\quad 0\quad 4\ ]$$

Se tiene:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} [\ 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 0 & \quad 0 & \quad 4\ ] \end{matrix} \\
k^{(2)} = \dfrac{EI_o}{L^3} & \begin{bmatrix}
\frac{1388}{25} & \frac{816}{25} & \frac{-18L}{5} & \frac{-1388}{25} & \frac{-816}{25} & \frac{-18L}{5} \\
\frac{816}{25} & \frac{912}{25} & \frac{24L}{5} & \frac{-816}{25} & \frac{-912}{25} & \frac{24L}{5} \\
\frac{-18L}{5} & \frac{24L}{5} & 4L^2 & \frac{18L}{5} & \frac{-24L}{5} & 2L^2 \\
\frac{-1388}{25} & \frac{-816}{25} & \frac{18L}{5} & \frac{1388}{25} & \frac{816}{25} & \frac{18L}{5} \\
\frac{-816}{25} & \frac{-912}{25} & \frac{-24L}{5} & \frac{816}{25} & \frac{912}{25} & \frac{-24L}{5} \\
\frac{-18L}{5} & \frac{24L}{5} & 2L^2 & \frac{18L}{5} & \frac{-24L}{5} & 4L^2
\end{bmatrix}
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}
\end{array}
$$

La contribución del miembro 2 a la matriz de rigidez del pórtico analizado, es:

$$
K = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
\frac{1388}{25} & \frac{816}{25} & \frac{-18L}{5} & \frac{-18L}{5} \\ \hline
\frac{816}{25} & \frac{912}{25} & \frac{24L}{5} & \frac{24L}{5} \\ \hline
\frac{-18L}{5} & \frac{24L}{5} & 4L^2 & 2L^2 \\ \hline
\frac{-18L}{5} & \frac{24L}{5} & 2L^2 & 4L^2
\end{array}\right] \frac{EI_o}{L^3}
$$

Al sumar las contribuciones de los miembros 1 y 2 se obtiene:

$$
K = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
\frac{1688}{25} & \frac{816}{25} & \frac{12L}{5} & \frac{-18L}{5} \\ \hline
\frac{816}{25} & \frac{2912}{25} & \frac{24L}{5} & \frac{24L}{5} \\ \hline
\frac{12L}{5} & \frac{24L}{5} & 8L^2 & 2L^2 \\ \hline
\frac{-18L}{5} & \frac{24L}{5} & 2L^2 & 4L^2
\end{array}\right] \frac{EI_o}{L^3}
$$

EJEMPLO N.- 2

Determinar la matriz de rigidez del marco plano presentado en la figura N.- 13.5.1. Sus elementos son totalmente flexibles. Las columnas son de 40 x 40 y la viga de 30 x 30. Considerar: $E = 2'100.000 \quad T / m^2$.

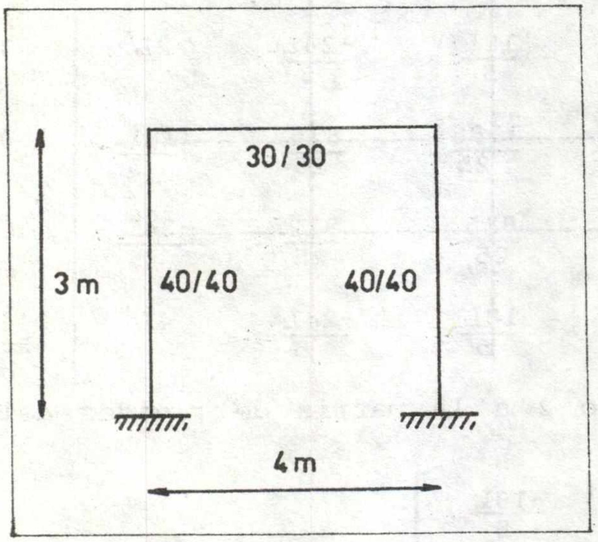


Figura N.- 13.5.1 Marco plano del Ejemplo N.- 2

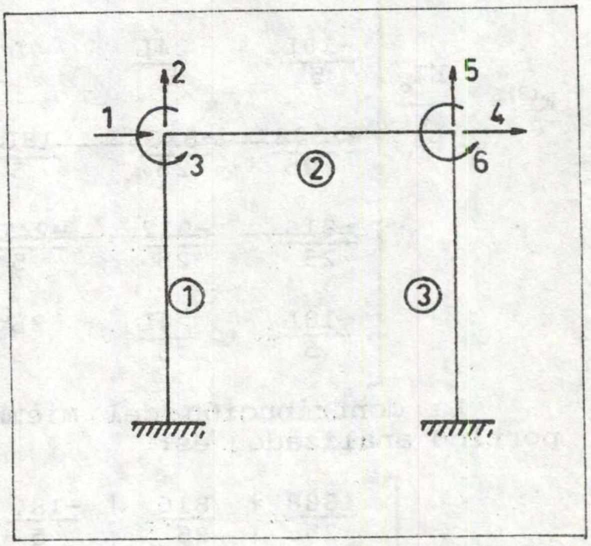


Figura N.- 13.5.2 Sistema Q - q y numeración de miembros.

SOLUCION

Se indican las matrices de rigidez de miembro en coordenadas globales y los respectivos vectores de colocación.

Miembro 1

No hay fila 0

$$
k^{(1)} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
 & \left[\begin{array}{cccccc}
1988.0 & 0.0 & -2982.0 & -1988.0 & 0.0 & -2982.0 \\
0.0 & 112000.0 & 0.0 & 0.0 & -112000.0 & 0.0 \\
-2982.0 & 0.0 & 5964.0 & 2982.0 & 0.0 & 2982.0 \\
-1988.0 & 0.0 & 2982.0 & 1988.0 & 0.0 & 2982.0 \\
0.0 & -112000.0 & 0.0 & 0.0 & 112000.0 & 0.0 \\
-2982.0 & 0.0 & 2982.0 & 2982.0 & 0.0 & 5964.0
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\end{array}
$$

$$VC(1) = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ ]$$

No hay columna 0

Miembro 2

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 47250.0 & 0.0 & 0.0 & -47250.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 267.75 & 535.50 & 0.0 & -267.75 & 535.50 \\ 0.0 & 535.50 & 1428.00 & 0.0 & -535.50 & 714.00 \\ -47250.0 & 0.0 & 0.0 & 47250.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -267.75 & -535.50 & 0.0 & 267.75 & -535.50 \\ 0.0 & 535.50 & 714.00 & 0.0 & -535.50 & 1428.0 \end{bmatrix}$$

VC(2) = [1 2 3 4 5 6]

Miembro 3
$k^{(3)} = k^{(1)}$

VC(3) = [0 0 0 4 5 6]

Al realizar el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura, se obtiene:

$$K = \begin{bmatrix} 49238.0 & 0.0 & 2982.0 & -47250.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 112270.0 & 535.50 & 0.0 & -267.75 & 535.50 \\ 2982.0 & 535.50 & 7392.0 & 0.0 & -535.50 & 714.0 \\ -47250.0 & 0.0 & 0.0 & 49238.0 & 0.0 & 2982.0 \\ 0.0 & -267.75 & -535.50 & 0.0 & 112270.0 & -535.50 \\ 0.0 & 535.50 & 714.0 & 2982.0 & -535.50 & 7392.0 \end{bmatrix}$$

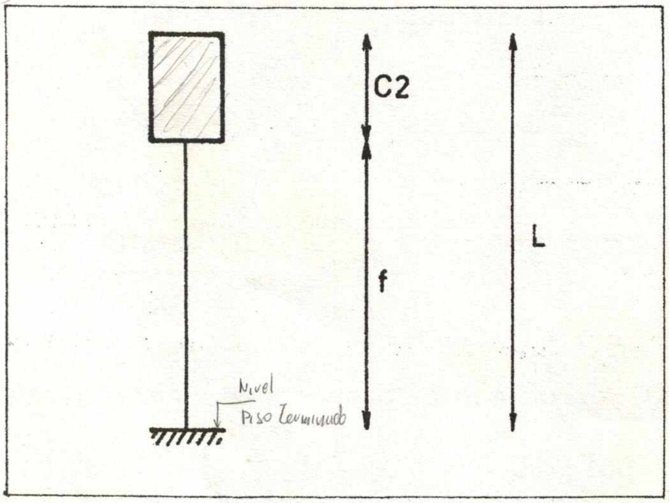
EJEMPLO N.- 3

Resolver el ejemplo N.- 2 considerando que los nudos son rígidos.

SOLUCION

De acuerdo a la nomenclatura indicada en el capítulo XII, se tiene:

Miembros 1 y 3.



$C_1 = 0$

$C_2 = 0.15$ m

$f = 2.85$ m
$L = 3.00$ m

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAf^2} = 0.01477$$

C_1 es aproximado depende de la cadena

$$k^*=\frac{4EI_o}{f}\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) = 6024.56652 = k'^*$$

$$a^*=\frac{2EI_o}{f}\left(\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right) = 2880.75171$$

$$b^*=\frac{6EI_o}{f^2}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) = 3124.67306 = b'^*$$

$$t^*=\frac{12EI_o}{f^3}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) = 2192.75303$$

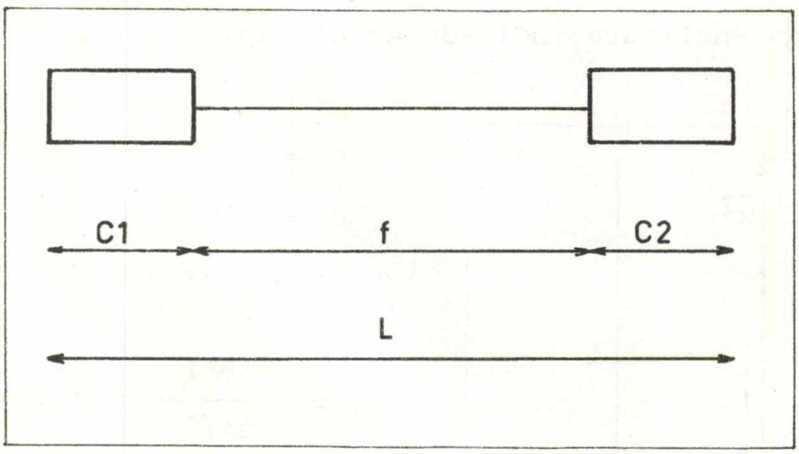
$$r^*=\frac{EA_o}{f} = 117894.7368$$

La matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales, resulta:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\mathbf{k}^{(1)}=\mathbf{k}^{(3)}=\begin{bmatrix} 2192.8 & 0.0 & -3124.7 & -2192.8 & 0.0 & -3453.6 \\ 0.0 & 117894.7 & 0.0 & 0.0 & -117894.7 & 0.0 \\ -3124.7 & 0.0 & 6024.6 & 3124.7 & 0.0 & 3349.5 \\ -2192.7 & 0.0 & 3124.7 & 2192.8 & 0.0 & 3453.6 \\ 0.0 & -117894.7 & 0.0 & 0.0 & 117894.7 & 0.0 \\ -3453.6 & 0.0 & 3349.5 & 3453.6 & 0.0 & 7011.3 \end{bmatrix}$$

Miembro 2.



$C_1 = 0.20$ m

$C_2 = 0.20$ m

$f = 3.60$ m

$L = 4.00$ m

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAf^2} = 0.00521$$

Luego la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales, es:

$k^* = k'^* = 1550.89543 \qquad a^* = 763.39029$

$b^* = b'^* = 642.85714 \qquad t^* = 357.14286$

$r^* = 52500$

$$\mathbf{k}^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 52500.0 & 0.0 & 0.0 & -52500.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 357.14 & 714.29 & 0.0 & -357.14 & 714.29 \\ 0.0 & 714.29 & 1822.32 & 0.0 & -714.29 & 777.68 \\ -52500.0 & 0.0 & 0.0 & 52500.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -357.14 & -714.29 & 0.0 & 357.14 & -714.29 \\ 0.0 & 714.29 & 777.68 & 0.0 & -714.29 & 1822.32 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Los vectores de colocación de cada miembro, son los indicados en el ejemplo anterior. Al efectuar el ensamblaje, se obtiene:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 54693.0 & 0.0 & 3453.6 & -52500.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 118250.0 & 714.29 & 0.0 & -357.14 & 714.29 \\ 3453.6 & 714.29 & 8833.6 & 0.0 & -714.29 & 777.68 \\ -52500.0 & 0.0 & 0.0 & 54693.0 & 0.0 & 3453.6 \\ 0.0 & -357.14 & -714.29 & 0.0 & 118250.0 & -714.29 \\ 0.0 & 714.29 & 777.68 & 3453.6 & -714.29 & 8833.6 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO N.- 4

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente armadura plana.

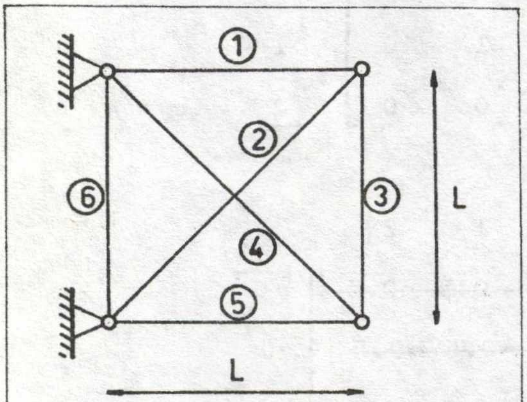


Figura N.- 13.6.1

Miembro	Area Transversal
1	A_o
2	$A_o/\sqrt{2}$
3	A_o
4	$A_o/\sqrt{2}$
5	A_o
6	A_o

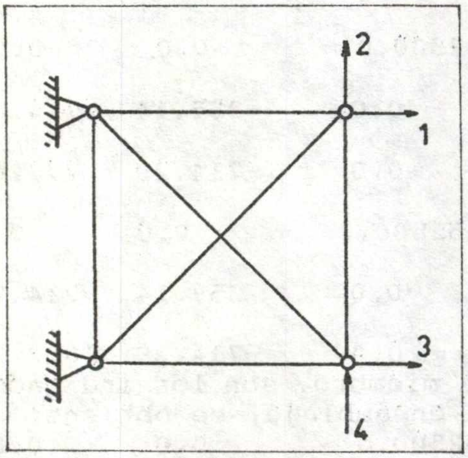
Numeración y áreas transversales de la armadura plana

* Para comparar se acostumbra en investigación las matrices $\bar{K}$ es calculando el determinante

Det $\bar{K}$ con nudo rígido $\xrightarrow{\text{Comparan}}$ Det $\bar{K}$ sin nudo rígido

SOLUCION

El sistema de grados de libertad y los vectores de colocación de cada miembro, son:



Q - q

VC(1) = [0 0 1 2]

VC(2) = [0 0 1 2]

VC(3) = [3 4 1 2]

VC(4) = [3 4 0 0]

VC(5) = [0 0 3 4]

VC(6) = [0 0 0 0]

Figura N.- 13.6.2 Sistema **Q - q** y vectores de colocación

Se describe la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales con su respectivo vector de colocación.

$$\mathbf{k}^{(1)} = \frac{EA_o}{L} \begin{array}{cc} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}$$

$$\mathbf{k}^{(2)} = \frac{EA_o}{2L} \begin{array}{cc} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}$$

$$
\mathbf{k}^{(3)} = \frac{EA_o}{L}
\begin{array}{c c}
\begin{matrix} [3 & 4 & 1 & 2] \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{k}^{(4)} = \frac{EA_o}{2L}
\begin{array}{c c}
\begin{matrix} [3 & 4 & 0 & 0] \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{k}^{(5)} = \frac{EA_o}{L}
\begin{array}{c c}
\begin{matrix} [0 & 0 & 3 & 4] \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}
\end{array}
$$

Ensamblaje de K

$$
\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
1 + 0.25 & 0.25 & & \\ \hline
0.25 & 0.25 + 1 & & -1 \\ \hline
 & & 0.25 + 1 & -0.25 \\ \hline
 & -1 & -0.25 & 1 + 0.25
\end{array}\right] \frac{EA_o}{L}
$$

Luego, la matriz de la estructura, resulta:

$$K = \frac{EA_o}{L}\begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 1.25 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.25 & -0.25 \\ 0.0 & -1.0 & -0.25 & 1.25 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO N.- 5

Encontrar la matriz de rigidez de miembro de la estructura de la figura N.- 13.7.1. Considerando los grados de libertad de la figura N.- 13.7.2.

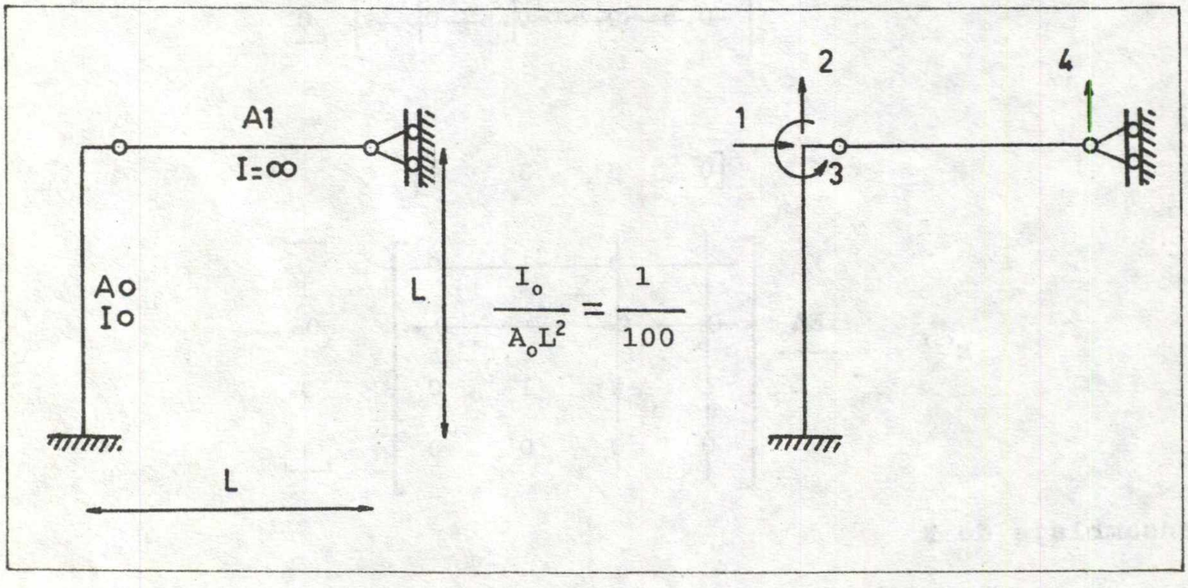


Figura N.- 13.7.1 Pórtico del ejemplo N.- 5

Figura N.- 13.7.2 Sistema de coordenadas **Q - q**

SOLUCION

El miembro vertical corresponde a un elemento de pórtico plano. En cambio el elemento horizontal es un elemento de armadura plana. Las respectivas matrices de rigidez de miembro y vectores de colocación, son:

Miembro Vertical

$$
k = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 100 & 0 & 0 & -100 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -100 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{EI_o}{L^3}
$$

$$
VC(1) = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ ]
$$

Miembro Horizontal

$$
k = \frac{EA_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
VC(2) = [\ 1 \quad 2 \quad 0 \quad 4\ ]
$$

Ensamblaje Directo

$$
K = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \dfrac{12EI_o}{L^3}+\dfrac{EA_1}{L} & & \dfrac{6EI_o}{L^2} & \\ \hdashline & \dfrac{100\ EI_o}{L^3} & & \\ \hdashline \dfrac{6EI_o}{L^2} & & \dfrac{4EI_o}{L} & \\ \hdashline & & & \end{array}\right]
$$

EJEMPLO N.- 6

Encontrar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la estructura de la figura N.- 13.7.1. La variación de inercia del miembro horizontal se presenta en la figura N.- 13.7.2 y se desprecia la deformación axial en este elemento. Se considera E= 2'100000 T / m^2

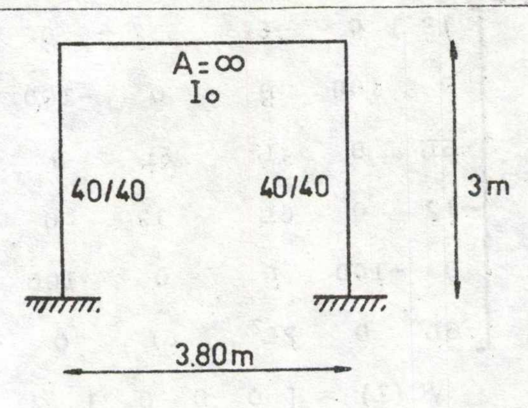


Figura N.- 13.7.1
Marco del ejemplo N.- 6

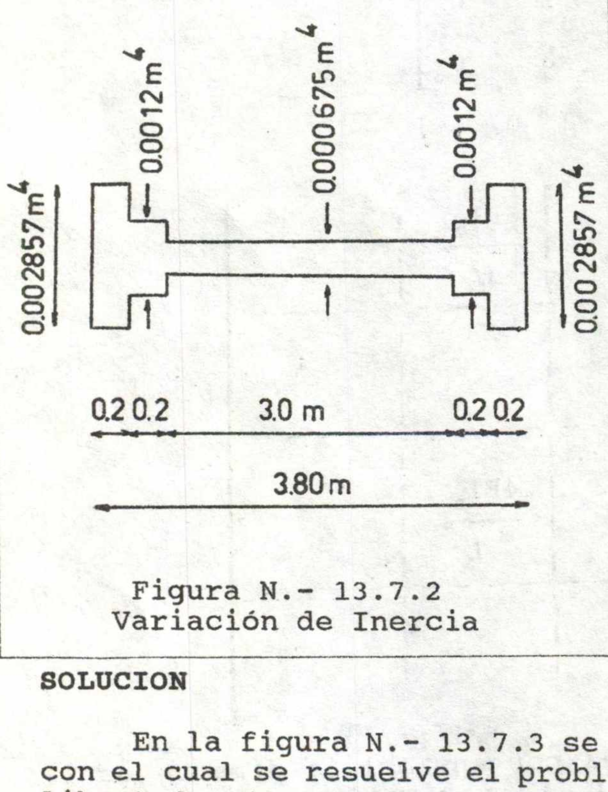


Figura N.- 13.7.2
Variación de Inercia

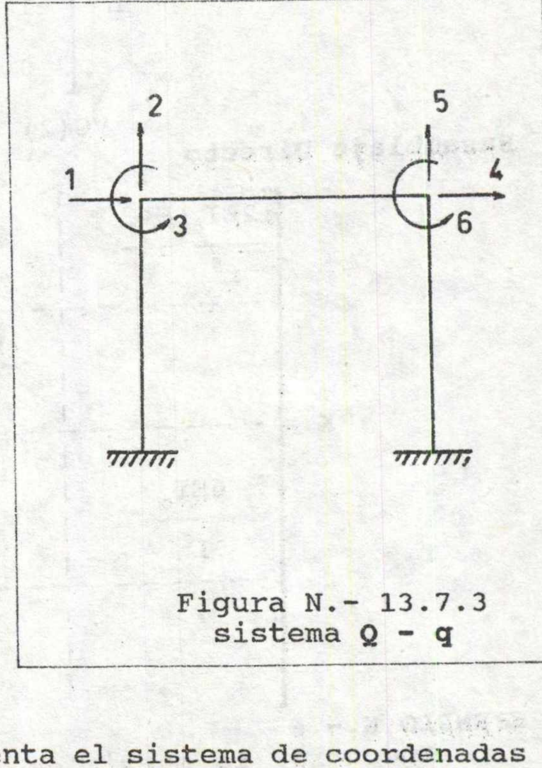


Figura N.- 13.7.3
sistema Q - q

SOLUCION

En la figura N.- 13.7.3 se presenta el sistema de coordenadas con el cual se resuelve el problema. Nótese que hay cinco grados de libertad esto se debe a que el miembro horizontal es axialmente rígido. Para el miembro con variación de inercia escalonada, se tiene:

Diagrama de Masas Elásticas (1 / EI)

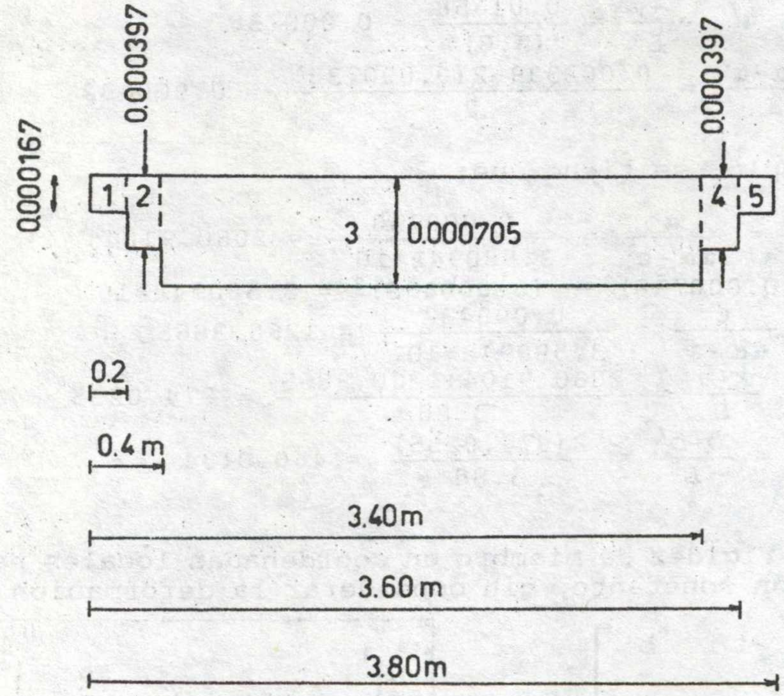


Figura N.- 13.7.4 Partición del diagrama de masas elásticas en las figuras elementales.

En base a la nomenclatura y teoría expuesta en el capítulo anterior, se tiene:

Figura	X_o	w	I_y	I_y'
1	0.10	0.000033	$4.453333*10^{-7}$	0.000457
2	0.30	0.000079	0.000007	0.000973
3	1.90	0.002115	0.009221	0.009221
4	3.50	0.000079	0.000973	0.000007
5	3.70	0.000033	0.000457	$4.453333*10^{-7}$
	$\sum =$	0.002339	0.010658	0.010658

$$\alpha = \frac{I_y'}{L^2} = \frac{0.010658}{(3.8)^2} = 0.000738$$

$$\alpha' = \frac{I_y}{L^2} = \frac{0.01658}{(3.8)^2} = 0.000738$$

$$\epsilon = \frac{w-\alpha-\alpha'}{2} = \frac{0.002339-2(0.000738)}{2} = 0.000432$$

Para el ejemplo, se tiene que:

$$k = k' = \frac{\alpha}{\alpha\alpha'-\epsilon^2} = \frac{0.000738}{3.580942*10^{-7}} = 2060.9104$$

$$\alpha\alpha'-\epsilon^2 = (0.000738)^2 - (0.000432)^2 = 3.580942*10^{-7}$$

$$a = \frac{\epsilon}{\alpha\alpha'-\epsilon^2} = \frac{0.000432}{3.580942*10^{-7}} = 1260.3865$$

$$b = b' = \frac{k+a}{L} = \frac{2060.9104+1260.3865}{3.80} = 874.0255$$

$$t = \frac{b+b'}{L} = \frac{2(874.0255)}{3.80} = 460.0134$$

La matriz de rigidez de miembro en coordenadas locales para un elemento de sección constante, sin considerar la deformación axial es:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} t & b & -t & b' \\ b & k & -b & a \\ -t & -b & t & -b' \\ b' & a & -b' & k' \end{bmatrix}$$

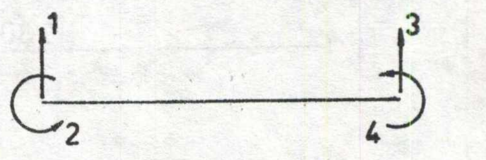


Figura N.- 13.7.5 Sistema **P - p** de miembro

El sistema de coordenadas de miembro se indica en la figura N.- 13.7.5. Por ser el elemento horizontal, la matriz de rigidez de miembro en coordenadas locales es igual a la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales. Por consiguiente al reemplazar datos se tiene:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 460.0134 & 874.0255 & -460.0134 & 874.0255 \\ 874.0255 & 2060.9104 & -874.0255 & 1260.3865 \\ -460.0134 & -874.0255 & 460.0134 & -874.0255 \\ 874.0255 & 1260.3865 & -874.0255 & 2060.9104 \end{bmatrix}$$

El vector de colocación para el elemento horizontal es:

VC = [2 3 4 5]

La matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales de los elementos verticales es la misma y corresponde a la mostrada en el ejemplo N.- 2. Esta, es:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1988.0 & 0.0 & -2982.0 & -1988.0 & 0.0 & -2982.0 \\ 0.0 & 112000.0 & 0.0 & 0.0 & -112000.0 & 0.0 \\ -2982.0 & 0.0 & 5964.0 & 2982.0 & 0.0 & 2982.0 \\ -1988.0 & 0.0 & 2982.0 & 1988.0 & 0.0 & 2982.0 \\ 0.0 & -112000.0 & 0.0 & 0.0 & 112000.0 & 0.0 \\ -2982.0 & 0.0 & 2982.0 & 2982.0 & 0.0 & 5964.0 \end{bmatrix}$$

Los vectores de colocación para los elementos verticales izquierdo y derecho, respectivamente, son:

VC = [0 0 0 1 2 3]
VC = [0 0 0 1 4 5]

Al efectuar el ensamblaje directo, se obtiene:

$$\overline{K} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 3976.0 & 0.0 & 2982.0 & 0.0 & 2982.0 \\ \hline 0.0 & 112460.0 & 874.0 & -460.0 & 874.0 \\ \hline 2982.0 & 874.0 & 8024.9 & -874.0 & 1260.4 \\ \hline 0.0 & -460.0 & -874.0 & 112460.0 & -874.0 \\ \hline 2982.0 & 874.0 & 1260.4 & -874.0 & 8024.9 \end{array}\right]$$

13.5 OTROS COMANDOS DE CAL86

En este numeral se indican algunos comandos de CAL86 orientados exclusivamente al cálculo de la matriz de rigidez por ensamblaje directo de pórticos planos y armaduras planas.

LOADI VC R = ? C = ?

Este comando sirve para cargar los vectores de colocación de cada uno de los miembros de la estructura los mismos que están inmersos en la matriz denominada VC. El nombre que se de a esta matriz es arbitrario.

Cada una de las columnas de VC contiene el vector de colocación de un miembro. Para pórticos planos el valor de **R** es igual a 6; para armaduras planas también es 6, debería ser 4 pero para CAL86 se colocará 6 teniendo presente que el grado de libertad correspondiente al giro es nulo.

ADDK K K_i VC N = ?

Con este comando se suma la contribución de la matriz de rigidez de miembro denominada K_i a la matriz de rigidez de la estructura **K**. Es necesario indicar la columna en la cual se encuentra el vector de colocación esto se realiza con la variable **N**.

FRAME K_i T I = ? A = ? E = ? X = X_i,X_j Y = Y_i,Y_j

El comando FRAME determina la matriz de rigidez de miembro K_i en coordenadas globales y la matriz de rotación de coordenadas locales a globales **T** pero la definida en el capítulo V para CAL86. Se debe especificar la inercia de la sección transversal **I**, el área de la misma **A**, el módulo de elasticidad del material **E** y las coordenadas del nudo inicial **i** y final **j**. Debe indicarse que para definir las coordenadas **X** primero se indica la coordenada correspondiente al nudo inicial y luego la del nudo final. Lo propio se tiene para la coordenada **Y**.

Es importante que todos los datos se den en unidades compatibles.

LOAD XYZ R = ? C = ?

Este comando sirve para definir las coordenadas **X, Y, Z**, de un nudo por filas. Está orientado al cálculo de armaduras planas y espaciales. Para resolver armaduras planas se tendrá que dar como dato **Z** = 0. Es fundamental que la matriz que contiene las coordenadas de nudo se denomine XYZ.

TRUSS K_i T A = ? E = ? N = N_i,N_j

El comando TRUSS permite calcular la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales de armaduras planas y espaciales denominada K_i así como la matriz de transformación de coordenadas locales a globales **T** que utiliza CAL86. Se debe indicar el área de la sección transversal **A**, el módulo de elasticidad del material **E** y la identificación de los nudos inicial y final del miembro mediante la variable **N**, previamente se habrá utilizado el comando **XYZ**.

EJEMPLO N.- 7

Preparar el archivo de datos para CAL86 correspondiente a la estructura del ejemplo N.- 2 resuelto en este capítulo.

SOLUCION

```
B1
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO EN COORDENADAS GLOBALES
FRAME K1 T1 I=0.002133 A=0.16 E=2100000 X=0,0 Y=0,3
FRAME K2 T2 I=0.000675 A=0.09 E=2100000 X=0,4 Y=3,3
FRAME K3 T3 I=0.002133 A=0.16 E=2100000 X=4,4 Y=0,3
C MATRIZ DE VECTORES DE COLOCACION
LOADI VC R=6 C=3
0 1 0
0 2 0
0 3 0
1 4 4
2 5 5
3 6 6
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA
ZERO K R=6 C=6
ADDK K K1 VC N=1
ADDK K K2 VC N=2
ADDK K K3 VC N=3
PRINT K
QUIT
```

EJEMPLO N.- 8

Preparar el archivo de datos para CAL86 correspondiente a la armadura plana del ejemplo N.- 4 si el valor de A_o es igual a 1 cm^2; el módulo de elasticidad es 2000000 kg/cm^2, y la longitud L es igual a 30 cm.

SOLUCION

En la figura N.- 13.8 se indica la numeración de los nudos y miembros de la armadura plana del ejemplo N.- 4.

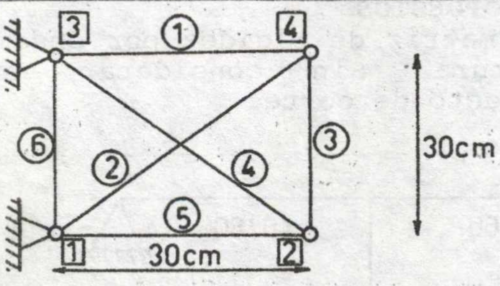


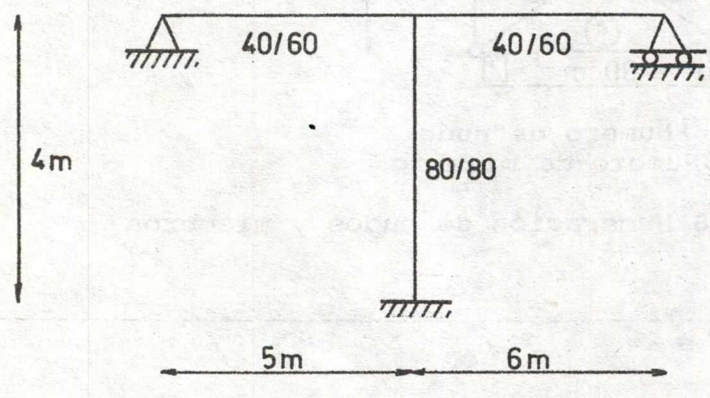
Figura N.- 13.8 Numeración de nudos y miembros

```
B1
C COORDENADAS DE LOS NUDOS
LOAD XYZ R=4 C=3
0 0 0
30 0 0
0 30 0
30 30 0
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO EN COORDENADAS GLOBALES
TRUSS K1 T1 A=1 E=2000000 N=3,4
TRUSS K2 T2 A=0.7071 E=2000000 N=1,4
TRUSS K3 T3 A=1 E=2000000 N=2,4
TRUSS K4 T4 A=0.7071 E=2000000 N=2,3
TRUSS K5 T5 A=1 E=2000000 N=1,2
TRUSS K6 T6 A=1 E=2000000 N=1,3
C MATRIZ DE VECTORES DE COLOCACION
LOADI VC R=6 C=6
0 0 3 3 0 0
0 0 4 4 0 0
0 0 0 0 0 0
1 1 1 0 3 0
2 2 2 0 4 0
0 0 0 0 0 0
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ARMADURA PLANA
ZERO K R=4 C=4
ADDK K K1 VC N=1
ADDK K K2 VC N=2
ADDK K K3 VC N=3
ADDK K K4 VC N=4
ADDK K K5 VC N=5
ADDK K K6 VC N=6
PRINT K
QUIT
```

Se ha obtenido la matriz de rigidez de la armadura plana para el sistema de coordenadas de miembro indicada en la figura N.- 13.6.2.

13.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura. Sin considerar nudos rígidos pero considerando el efecto de corte.



$E = 2'100000\ T/m^2$

$IV = 0.0072\ m^4$

$IC = 0.03413\ m^4$

$G = 0.4\ E$

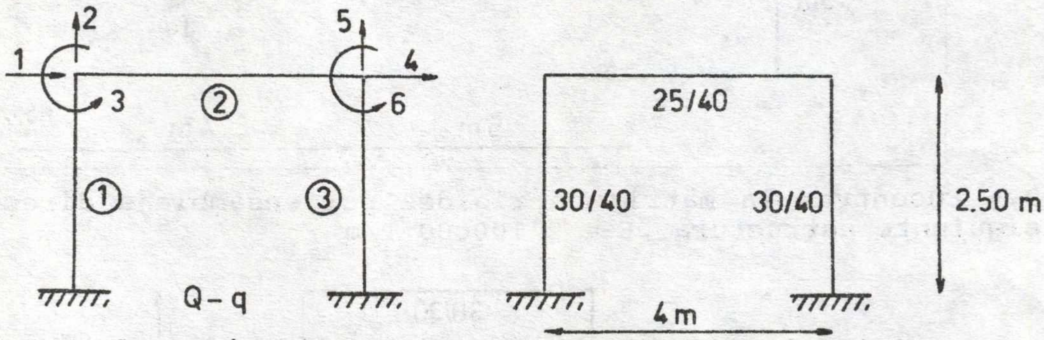
2.- Preparar el archivo de datos para determinar la matriz de rigidez del ejercicio anterior usando CAL86.

3.- Obtener la matriz de rigidez del ejercicio número uno considerando nudos rígidos.

4.- Obtener la matriz de rigidez de la siguiente estructura si los vectores de colocación son los siguientes:

VC(1) = [1 2 3 0 0 0]
VC(2) = [4 5 6 1 2 3]
VC(3) = [4 5 6 0 0 0]

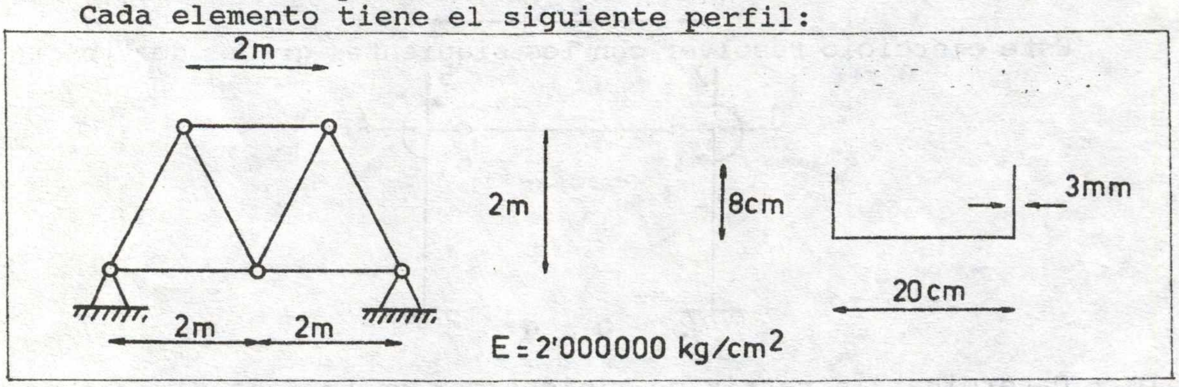
E= 2'100000 T/m^2



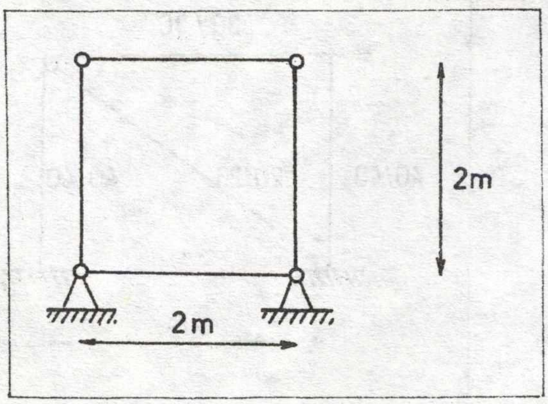
5.- Preparar el archivo de datos para resolver el ejercicio número cuatro con CAL86.

6.- Obtener la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente armadura plana.

Cada elemento tiene el siguiente perfil:

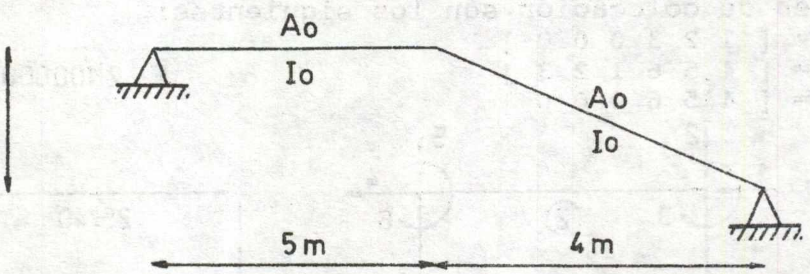


7.- Indicar si la armadura siguiente es estable o inestable usando la matriz de rigidez de la estructura. Igual perfil al anterior.

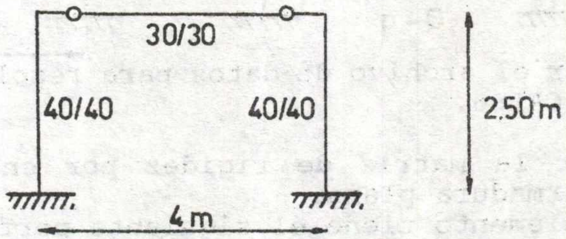


8.- Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo del marco plano siguiente. Los dos elementos tienen la misma sección transversal, y en ellos se cumple que:

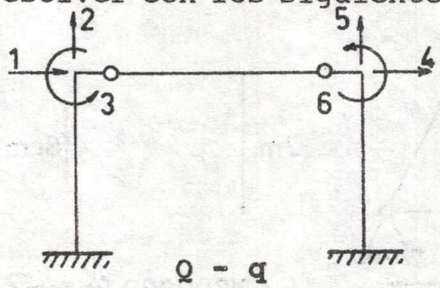
$$\frac{A_o}{I_o L^2} = 80$$



9.- Encontrar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura. E = 2'100000 T/m^2



Este ejercicio resolver con los siguientes grados de libertad.



10.- Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura. E = 2'100000 T/m^2