

MATRIZ DE FLEXIBILIDAD Y RIGIDEZ DE UN MIEMBRO LINEAL

RESUMEN

Se presenta con bastante detenimiento el cálculo de las matrices de flexibilidad y de rigidez de un elemento de sección constante o variable, para los sistemas de coordenadas de miembro que se indican en las figuras respectivas. El cálculo se lo realiza empleando conceptos de estructuras y por medio de la matriz de transformación de coordenadas.

Por considerarlo de interés se dedican algunas páginas al estudio del efecto de corte en los términos de la matriz de rigidez de miembro, para lo cual se deduce el coeficiente de forma β para una sección rectangular y se presentan ejemplos de aplicación en los que se observa cuando es importante considerar el efecto de corte y cuando no.

7.1 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE MIEMBRO \bar{f}

7.1.1 Forma general

Para el sistema de coordenadas de miembro, de la figura 7.1, la forma de la matriz de flexibilidad f , en general, es:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

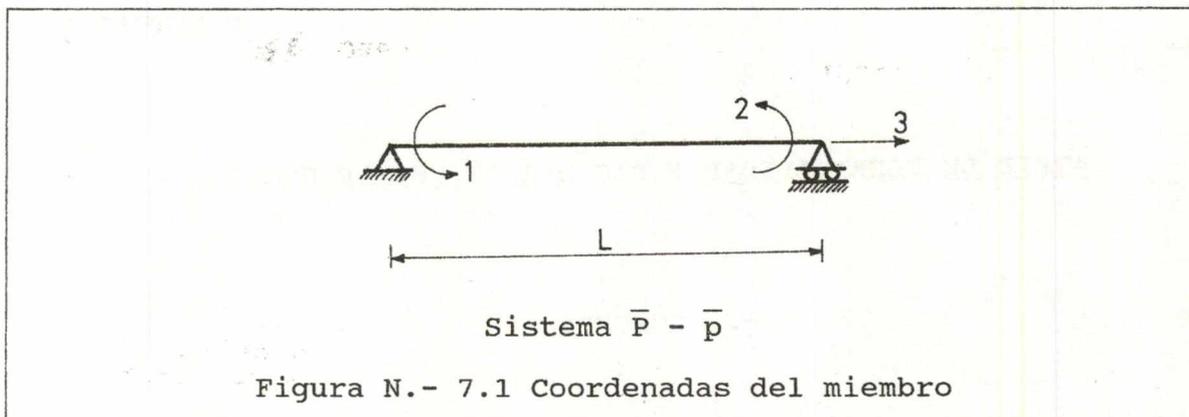


Figura N.- 7.1 Coordenadas del miembro

Los elementos de la primera columna de \bar{f} , son las deformaciones que corresponden al estado de carga $P_1 = 1$ y $P_i = 0$, $i \neq 1$ (Momento en el nudo inicial igual a uno). En la figura 7.2.1, se presenta en forma gráfica estos términos.

Figura N.-7.2.1 $P_1=1$
y demás nulas

Figura N.-7.2.2 $P_2=1$
y demás nulas

Figura N.-7.2.3 $P_3=1$
y demás nulas

En las figuras 7.2.2 y 7.2.3 se indican los elementos de la segunda y tercera columna de la matriz de flexibilidad correspondientes a los estados de carga $P_2 = 1$ y $P_i = 0$, $i \neq 2$ (Momento en el nudo final igual a uno) y, $P_3 = 1$ y las demás nulas (Fuerza axial en el nudo final igual a uno), respectivamente. Es necesario notar que algunos de los elementos presentados en las figuras son nulos.

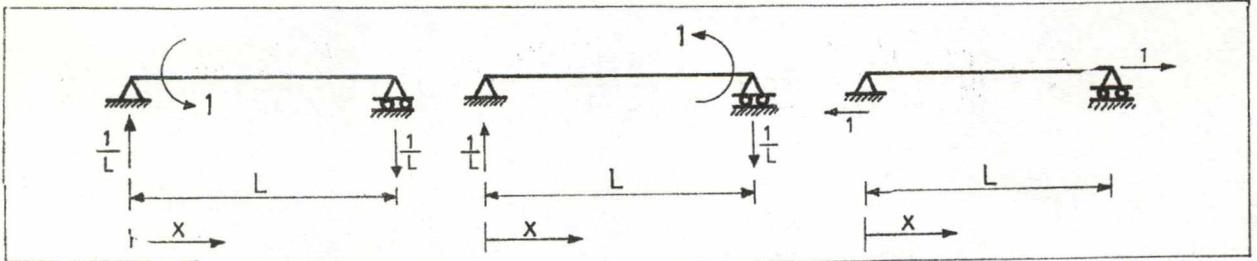
Los diagramas de momento, corte y carga axial correspondientes a los estados de carga elemental (figuras 7.2: 1, 2 y 3) se muestran en las figuras 7.3: 1, 2 y 3.

UNIDADES DE \bar{f} :

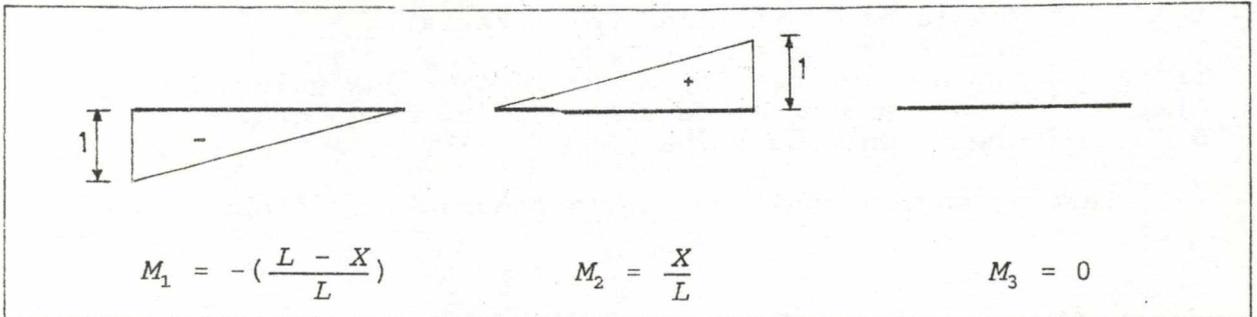
- [Radiante]
- [m]
- f_{11}, f_{22}, f_{33} SON POSITIVOS

Los términos de la diagonal de \bar{f} SIEMPRE SON POSITIVOS →

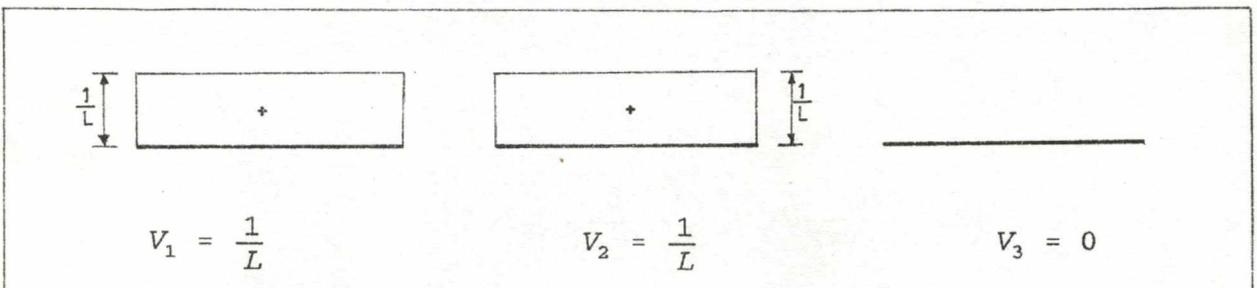
Estados de carga



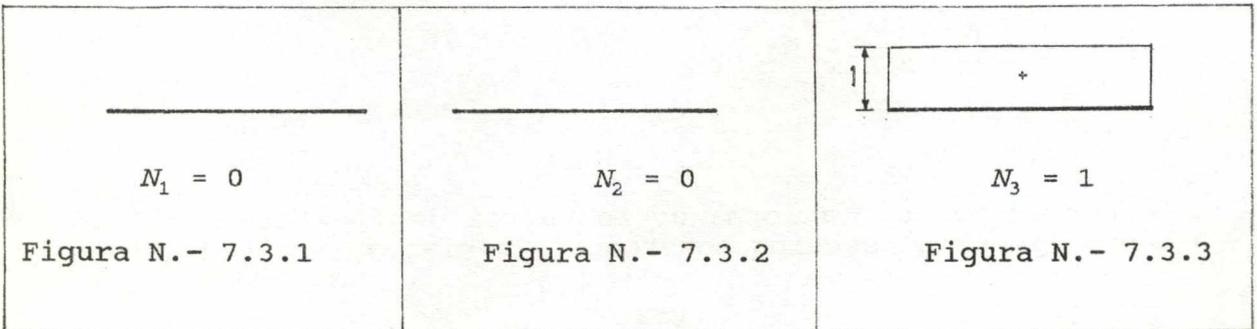
Diagramas de momentos



Diagramas de cortes



Diagramas de cargas axiales



f_{21}, f_{12} son reacciones

$f_{31} = f_{32} = f_{13} = f_{23} = 0$

Obligación:

Revisar y estudiar el curso de \bar{P} de 265 a 271

Para el cálculo de las deformaciones f_{ij} , se tiene:

$$f_{ij} = \int_0^L \frac{M_i M_j}{E I(x)} dx + \int_0^L \frac{\beta V_i V_j}{G A(x)} dx + \int_0^L \frac{N_i N_j}{E A(x)} dx \quad (2)$$

Donde:

M_i, M_j	Momentos a flexión.
V_i, V_j	Cortantes.
N_i, N_j	Cargas, axiales.
E	Módulo de Elasticidad del material.
G	Módulo de Corte, estático.
$I(x)$	Momento de Inercia de una sección cualquiera.
$A(x)$	Area transversal de una sección cualquiera.
β	Coefficiente de forma.

Para el caso específico, de la figura 7.1, se obtiene:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{E I(x)} dx + \int_0^L \frac{\beta V_1^2}{G A(x)} dx \quad (3.1)$$

$$f_{12} = f_{21} = \int_0^L \frac{M_1 M_2}{E I(x)} dx + \int_0^L \frac{\beta V_1 V_2}{G A(x)} dx \quad (3.2)$$

$$f_{13} = f_{31} = 0 \quad (3.3)$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{M_2^2}{E I(x)} dx + \int_0^L \frac{\beta V_2^2}{G A(x)} dx \quad (3.4)$$

$$f_{23} = f_{32} = 0 \quad (3.5)$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{N_3^2}{E A(x)} dx \quad (3.6)$$

Por lo tanto, la forma de la matriz de flexibilidad \bar{f} de un miembro lineal de sección constante o variable, es la siguiente:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & -f_{12} & 0 \\ -f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Al reemplazar los valores de M_1 , M_2 , V_1 , V_2 y N_3 , en las integrales se obtienen los elementos de \bar{F} , que son:

$$f_{11} = \int_0^L \left(\frac{L-X}{L}\right)^2 \frac{dx}{E I(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{G A(x)} \quad (4.1)$$

$$f_{12} = f_{21} = -\int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2} \frac{dx}{E I(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{G A(x)} \quad (4.2)$$

$$f_{22} = \int_0^L \left(\frac{X}{L}\right)^2 \frac{dx}{E I(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{G A(x)} \quad (4.3)$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{dx}{E A(x)} \quad (4.4)$$

Los elementos no indicados son nulos.

7.1.2 Coeficiente de forma β

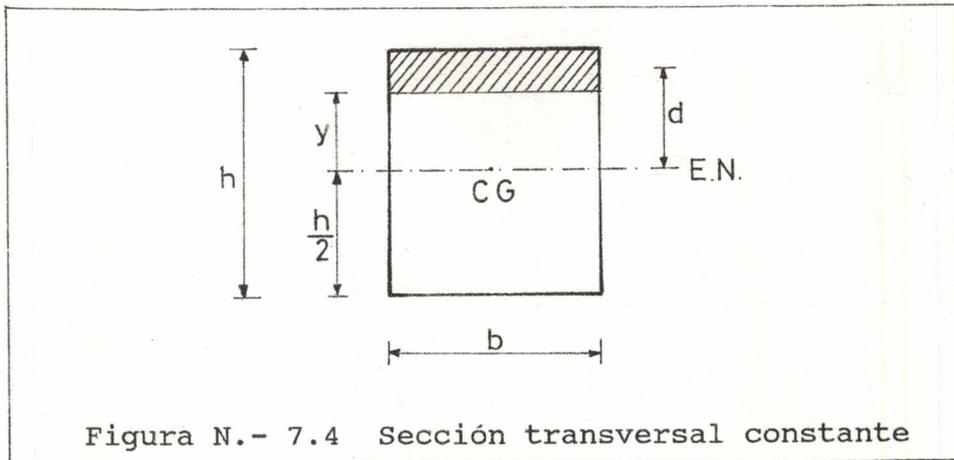
β es un coeficiente adimensional que caracteriza la distribución de las tensiones tangenciales en la sección transversal y depende de la forma de la misma.

EJEMPLO N.- 1

Determinar el valor de β , para un elemento de sección rectangular constante, de dimensiones $b \times h$.

SOLUCION

En la figura 7.4, se indica la nomenclatura que se va a utilizar en la solución del ejemplo.



C.G. Centro de Gravedad.
 E.N. Eje Neutro.
 /// Area de tensiones tangenciales.

Se conoce:

$$\beta = \int \frac{A(x) S^2}{b^2 I(x)^2} dA \quad (5)$$

Donde:

S Momento estático del área rayada respecto al eje neutro.
 dA Diferencial de área.

Las restantes variables han sido ya definidas. Por otra parte, al ser el miembro de sección constante, se tiene:

$$\beta = \frac{A}{I^2 b^2} \int S^2 dA \quad (6.1)$$

De la figura 7.4, se observa, que:

$$S = \underbrace{b \left(\frac{h}{2} - y \right)}_{\text{área}} * \underbrace{\left[y + \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \right]}_{\text{distancia}}$$

$$S = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{y}{2} + \frac{h}{4} \right)$$

$$S = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

$$S = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (6.2)$$

Por otro lado, se conoce:

$$dA = b \, dy \quad (6.3)$$

$$A = b \, h \quad (6.4)$$

$$I = \frac{b \, h^3}{12} \quad (6.5)$$

Nótese que se ha obtenido la Inercia con respecto al centro de gravedad, el mismo que es colineal con el eje neutro.

Al reemplazar 6.2, 6.3, 6.4 y 6.5 en 6.1, se obtiene:

$$\beta = \frac{b \, h}{\left(\frac{b \, h^3}{12} \right)^2 b^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]^2 b \, dy$$

$$\beta = \frac{36}{h^5} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy$$

Al integrar solo en la parte superior, se tiene:

$$\beta = \frac{72}{h^5} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy = \frac{72}{h^5} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 y^2}{2} + y^4 \right) dy$$

$$\beta = \frac{72}{h^5} \left[\frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2 y^3}{6} + \frac{y^5}{5} \right]_0^{\frac{h}{2}}$$

$$\beta = \frac{72}{h^5} \left(\frac{h^5}{32} - \frac{h^5}{48} + \frac{h^5}{160} \right)$$

$$\beta = 72 \left(\frac{15 - 10 + 3}{480} \right) = \frac{576}{480}$$

De donde:

$$\beta = 6/5 = 1.2$$

7.1.3 Miembros de sección constante considerando el efecto de corte

En este caso tanto la inercia como el área son constantes, por consiguiente pueden salir de las integrales definidas en las ecuaciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \int_0^L (L - X)^2 dx + \frac{\beta}{L^2 GA} \int_0^L dx \quad (7.1)$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{1}{L^2 EI} \int_0^L X(L - X) dx + \frac{\beta}{L^2 GA} \int_0^L dx \quad (7.2)$$

$$f_{22} = \frac{1}{L^2 EI} \int_0^L X^2 dx + \frac{\beta}{L^2 GA} \int_0^L dx \quad (7.3)$$

$$f_{33} = \frac{1}{EA} \int_0^L dx \quad (7.4)$$

7.1.3.1 Cálculo de f_{11}

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \int_0^L (L^2 - 2LX + X^2) dx + \frac{\beta}{GAL^2} \int_0^L dx$$

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \left[L^2 X - LX^2 + \frac{X^3}{3} \right]_0^L + \frac{\beta}{GAL^2} X \Big|_0^L$$

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \left[L^3 - L^3 + \frac{L^3}{3} \right] + \frac{\beta}{GAL}$$

$$f_{11} = \frac{L}{3EI} + \frac{\beta}{GAL}$$

$$f_{11} = \frac{L}{3EI} \left(1 + \frac{3\beta EI}{GAL^2} \right)$$

Se denomina:

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2}$$

$\phi \rightarrow$ (Mide el efecto de corte)

$\beta \rightarrow$ factor de forma; 1.2 Para Secciones Rectangulares

(7.5)

Luego:

$$f_{11} = \frac{L}{3EI} (1 + \phi)$$

(7.6)

Se considera en elementos de grandes secciones

Al proceder en forma similar, se encuentran los demás elementos de la matriz de flexibilidad.

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} (1 + \phi) & -\frac{L}{6EI} (1 - 2\phi) & 0 \\ -\frac{L}{6EI} (1 - 2\phi) & \frac{L}{3EI} (1 + \phi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{AE} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ϕ Factor adimensional que mide el efecto de corte.

7.1.4 Miembros de sección constante sin considerar el efecto de corte

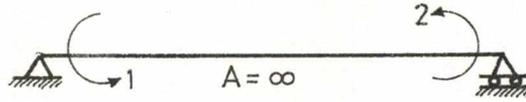
El efecto de corte, se evalúa a través del parámetro ϕ . En caso de no considerarlo, en la matriz 8, se reemplaza $\phi = 0$. En esta condición la matriz de flexibilidad de miembro, es:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{AE} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Se debe notar que la matriz de flexibilidad calculada en este numeral, corresponde al sistema de coordenadas de miembro, presentado en la figura 7.1.

7.1.5 Miembros axialmente rígidos

Como se estudió en el capítulo anterior, el sistema de coordenadas de miembro $\bar{P} - \bar{p}$, para un elemento axialmente rígido, es el que se presenta en la figura 7.5. Es decir, no existe deformación axial, $p_3 = 0$.



Sistema $\bar{P} - \bar{p}$

Figura N.- 7.5 Coordenadas para un miembro axialmente rígido

La matriz de flexibilidad de miembro \bar{f} , para las coordenadas indicadas y al no considerar el efecto de corte, es la siguiente:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Nótese que se ha eliminado la tercera fila y columna de la matriz 9. Esta es la forma más común de la matriz de flexibilidad para elementos axialmente rígidos.

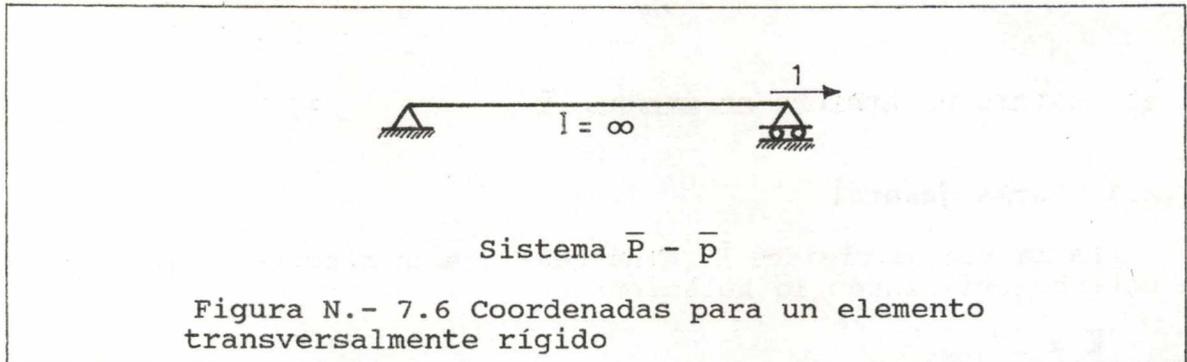
Se puede también utilizar el sistema de coordenadas de la figura 7.1 pero en este caso la matriz de flexibilidad de miembro, es:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

La matriz 11, es singular. En consecuencia, no existe matriz inversa. Por lo tanto, la matriz de rigidez de miembro, cuando un elemento es axialmente rígido no existe al considerar el sistema de coordenadas de miembro el indicado en la figura 7.1.

7.1.6 Miembros transversalmente rígidos

Por definición, estos elementos solo pueden deformarse axialmente, siendo el sistema de coordenadas de miembro el presentado en la figura 7.6.



Por lo tanto, la matriz de flexibilidad de miembro, para un elemento que tiene inercia infinita, es:

$$\bar{f} = \frac{L}{EA} \quad (12)$$

Al igual que en el numeral anterior, se puede considerar como sistema de coordenadas de miembro, el mostrado en la figura 7.1. En este caso, se tiene:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{AE} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Para estas coordenadas (figura 7.1) no existe matriz de rigidez de miembro, debido a que la matriz \bar{f} es singular.

7.1.7 Relación fuerza - deformación

En virtud de que a los miembros se los analiza como estructuras mediante la colocación de vínculos que eliminan los desplazamientos como cuerpo rígido se puede indicar que existe una relación entre las fuerzas \bar{P} (Mayúscula) y las deformaciones \bar{p} (Minúscula), al igual que en una estructura. Esta relación se obtiene a través de la matriz de flexibilidad. Su expresión matemática es:

$$\bar{p} = \bar{f} \bar{P} \quad (14)$$

Por consiguiente las fuerzas internas de un miembro se transforman en deformaciones mediante la matriz de flexibilidad de miembro también conocida como matriz fuerza - deformación.

7.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO \bar{k}

7.2.1 Forma general

La matriz de rigidez \bar{k} (Minúscula) de un miembro lineal, se va a obtener utilizando la relación:

$$\bar{k} = \bar{f}^{-1} \quad (15)$$

En efecto, \bar{k} no es más que la inversa de la matriz de flexibilidad. Para un elemento de sección constante o variable, la forma general de la matriz de rigidez asociada al sistema de coordenadas de miembro de la figura 7.1, es:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \quad (16.1)$$

Donde:

$$k_{11} = \frac{f_{22}}{\xi} \quad (16.2)$$

$$k_{12} = k_{21} = -\frac{f_{21}}{\xi} \quad (16.3)$$

$$k_{22} = \frac{f_{11}}{\xi} \quad (16.4)$$

$$k_{33} = \frac{1}{f_{33}} \quad (16.5)$$

$$\xi = f_{11} * f_{22} - (f_{21})^2 \quad (16.6)$$

NO

En el numeral 7.1.1 se indican las integrales mediante las cuales se evalúan: f_{11} , f_{21} , f_{22} Y f_{33} .

7.2.2 Miembros de sección constante considerando ϕ

La matriz de rigidez, de un miembro lineal de sección constante, considerando el efecto de corte, se encuentra invirtiendo la matriz 8. El resultado que se obtiene, es:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{4EI(1 + \phi)}{L(1 + 4\phi)} & \frac{2EI(1 - 2\phi)}{L(1 + 4\phi)} & 0 \\ \frac{2EI(1 - 2\phi)}{L(1 + 4\phi)} & \frac{4EI(1 + \phi)}{L(1 + 4\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (17)$$

7.2.3 Miembros de sección constante sin considerar ϕ

Al sustituir $\phi = 0$ en la matriz 17, se encuentra la matriz de rigidez de un miembro lineal de sección constante, sin considerar el efecto de corte. Esta, es:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (18)$$

7.2.4 Miembros axialmente rígidos

Por lo expresado en el numeral 7.1.5 de este capítulo, el sistema de coordenadas de miembro, para un elemento axialmente rígido, es el presentado en la figura 7.5. Al eliminar la tercera fila y columna de la matriz 18, se encuentra la matriz de rigidez para un elemento de sección constante en el que se ignora el efecto de corte. Esta, es:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Si se desea considerar el efecto de corte, en la matriz 17 se debe eliminar la tercera fila y columna.

Es necesario indicar que si bien es cierto $p_3 = 0$ (Minúscula) esto no implica que la fuerza axial es nula. En efecto, se tiene que $P_3 \neq 0$ (Mayúscula).

7.2.5 Miembros transversalmente rígidos

Este es el caso de las armaduras o celosías en las que se considera solo existe deformación axial en los elementos. El sistema de coordenadas de miembro se presenta en la figura 7.6. La matriz de rigidez, es:

$$\bar{K} = \left[\frac{EA}{L} \right] \quad (20)$$

El estudiante no debe perder de vista que, para cumplir con la condición de tener deformación axial únicamente debe existir en el miembro momentos P_1 y P_2 , en los nudos inicial y final.

7.2.6 Relación deformación - fuerza

Así como para una estructura, se tiene: $\bar{Q} = \bar{K} \bar{q}$, para un miembro lineal, se tiene que:

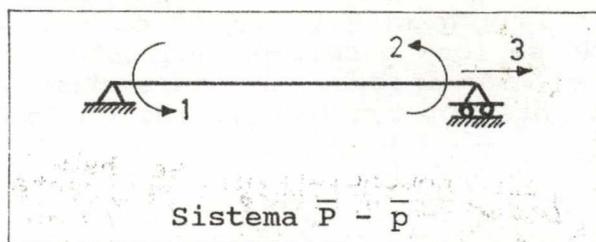
$$\bar{P} = \bar{k} \bar{p} \quad (21)$$

Por lo tanto, las deformaciones de un miembro se transforman en fuerzas internas a través de la matriz de rigidez de miembro \bar{k} (Minúscula) también conocida como matriz deformación - fuerza.

Con el objeto de aclarar algunos conceptos, se desarrollan estas expresiones para un miembro lineal de sección constante, en el que no se considera el efecto de corte. Se tiene:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Se está considerando el sistema de coordenadas de la figura 7.1, para recordar el significado de $\bar{\mathbf{P}}$ (Mayúscula) y $\bar{\mathbf{p}}$ (Minúscula) se presenta nuevamente este gráfico:



Al sustituir los vectores $\bar{\mathbf{P}}$ y $\bar{\mathbf{p}}$, y la matriz $\bar{\mathbf{k}}$, en la relación 21, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Desarrollando, se tiene:

$$P_1 = \frac{4EI}{L} p_1 + \frac{2EI}{L} p_2 \quad (22.1)$$

$$P_2 = \frac{2EI}{L} p_1 + \frac{4EI}{L} p_2 \quad (22.2)$$

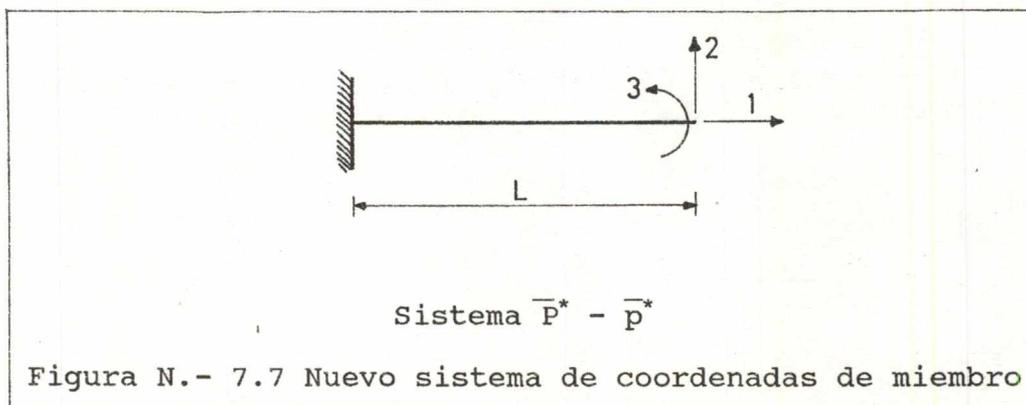
$$P_3 = \frac{EA}{L} p_3 \quad (22.3)$$

Estas expresiones las estudió el lector en la materia de "Estructuras" con otra nomenclatura. Se hace hincapié en un concepto que se indicó en el capítulo 2 referente a que se está resolviendo únicamente el problema complementario.

7.3 OBTENCION DE \bar{f} Y \bar{k} , UTILIZANDO LA TRANSFORMACION DE COORDENADAS

7.3.1 Planteamiento del problema

Se desea calcular la matriz de flexibilidad y rigidez para el miembro lineal de la figura 7.7. En el cual los desplazamientos como cuerpo rígido se los ha omitido mediante la colocación de un empotramiento en el nudo inicial. A este sistema de coordenadas se lo diferencia del anterior con la utilización de un asterisco como subíndice.



Por lo tanto, \bar{k}^* y \bar{f}^* serán las matrices de rigidez y flexibilidad, de miembro, para el sistema de coordenadas de la figura 7. Están relacionados de la siguiente manera:

$$\bar{P}^* = \bar{k}^* \bar{p}^* \quad (23.1)$$

$$\bar{p}^* = \bar{f}^* \bar{P}^* \quad (23.2)$$

$$\bar{k}^* \bar{f}^* = \bar{I} \quad (23.3)$$

Para obtener $\bar{\mathbf{k}}^*$ y $\bar{\mathbf{f}}^*$ se puede proceder de una manera similar a la desarrollada en los numerales 7.1 y 7.2 de este capítulo; se deja al estudiante el cálculo de esta manera. Otra forma es por la matriz de transformación de coordenadas. En este caso el sistema "viejo" de coordenadas es el mostrado en la figura 7.1 y el sistema "nuevo" de coordenadas el de la figura 7.7. En consecuencia, por lo estudiado en el capítulo 5, este cálculo se lo puede hacer de dos formas, a saber:

- i) Por medio de la matriz $\bar{\mathbf{T}}$ que relaciona deformaciones: $\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{p}}^*$
- ii) Por medio de la matriz $\bar{\mathbf{T}}_1$, que relaciona fuerzas internas ^{de miembro.}:
 $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{T}}_1 \bar{\mathbf{P}}_1^*$

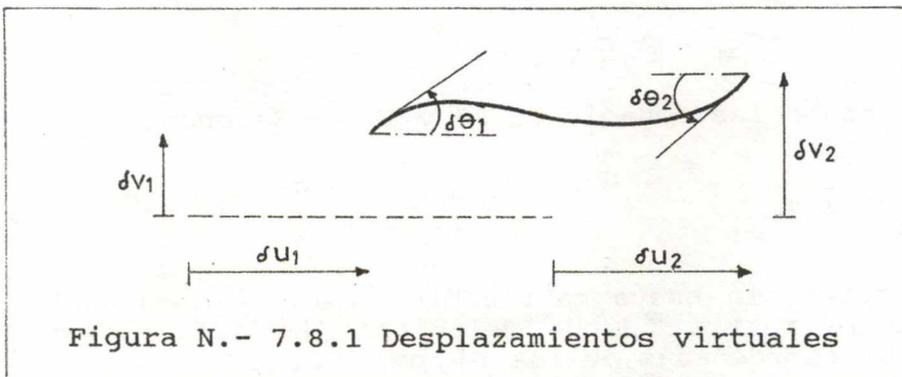
7.3.2 Solución del problema *No*

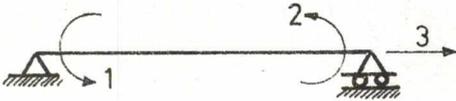
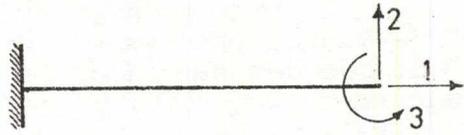
Si se considera unos desplazamientos virtuales en un elemento cualquiera, que forma parte de un pórtico plano, por ejemplo el de la figura 7.8.1, se observa que la inmovilización como cuerpo rígido puede hacerse considerando los vínculos de la figura 7.8.2 o el empotramiento de la figura 7.8.3.

Entre los sistemas de coordenadas virtuales, figuras 7.8.2 y 7.8.3, se establece la siguiente relación geométrica:

$$\delta \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{T}} \delta \bar{\mathbf{p}}^* \quad (24.1)$$

Ahora bien, el trabajo virtual (T.V.) producido por las fuerzas que actúan en la figura 7.1 en los desplazamientos virtuales de la figura 7.8.2 tiene que ser igual al trabajo virtual producido por las fuerzas que actúan en la figura 7.7, sobre los desplazamientos virtuales de la figura 7.8.3. Esto se debe a que el trabajo virtual no es uno solo, es independiente del sistema de coordenadas en que se mida.



Figura N.- 7.8.2 Sistema $\delta\bar{p}$ Figura N.- 7.8.3 Sistema $\delta\bar{p}^*$

En consecuencia, se tiene:

$$T.V. = \delta\bar{p}^t \bar{P} = \delta\bar{p}^{*t} \bar{P}^* \quad (24.2)$$

Al reemplazar 24.1 en 24.2, se encuentra:

$$(\bar{T} \delta\bar{p}^*)^t \bar{P} = \delta\bar{p}^{*t} \bar{P}^*$$

De donde:

$$\delta\bar{p}^{*t} \bar{T}^t \bar{P} = \delta\bar{p}^{*t} \bar{P}^*$$

Por ser $\delta\bar{p}^*$ arbitrario, se tiene:

$$\bar{P}^* = \bar{T}^t \bar{P}$$

$$\text{pero: } \bar{P} = \bar{k} \bar{p} \quad (\text{ecuación 21})$$

Luego:

$$\bar{P}^* = \bar{T}^t \bar{k} \bar{p}$$

Y:

$$\bar{p} = \bar{T} \bar{p}^*$$

$$\bar{P}^* = (\bar{T}^t \bar{k} \bar{T}) \bar{p}^* \quad (25)$$

Al comparar las ecuaciones 25 y 23.1. Se encuentra:

$$\bar{k}^* = \bar{T}^t \bar{k} \bar{T} \quad (26)$$

En efecto, la nueva matriz de rigidez \bar{k}^* se puede obtener a partir de la matriz \bar{T} , que relaciona las deformaciones de los sistemas de coordenadas de las figuras 7.1 y 7.7.

Por otra parte, una forma de hallar \bar{f}^* sería calculando la inversa de la matriz \bar{k}^* y otra forma sería por medio de la matriz \bar{T}_1 (Punto de vista estático). Si se examina el procedimiento seguido para hallar \bar{k} se verá que se ha ejecutado una repetición de conceptos indicados en el capítulo 5. Por este motivo se deja al estudiante, la demostración de:

$$\bar{f}^* = \bar{T}_1^t \bar{f} \bar{T}_1$$

En resumen, la matriz de rigidez de miembro \bar{k}^* , se obtendrá utilizando la geometría:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{T} \bar{p}^* \\ \bar{k}^* &= \bar{T}^t \bar{k} \bar{T} \end{aligned}$$

La matriz de flexibilidad de miembro \bar{f}^* se obtiene utilizando la estática.

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{T}_1 \bar{P}^* \\ \bar{f}^* &= \bar{T}_1^t \bar{f} \bar{T}_1 \end{aligned}$$

Finalmente es muy fácil demostrar que:

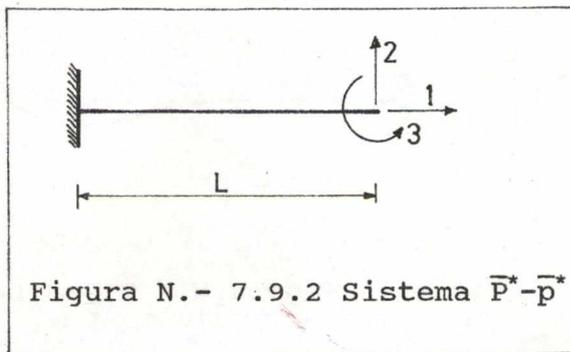
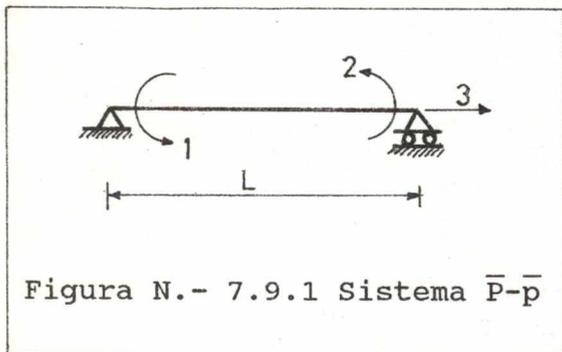
Si $\bar{p} = \bar{T} \bar{p}^*$ Entonces $\bar{P}^* = \bar{T}^t \bar{P}$

Al igual que:

Si $\bar{P} = \bar{T}_1 \bar{P}^*$ Entonces $\bar{P}^* = \bar{T}_1^t \bar{P}$

7.3.3 Cálculo de la matriz de rigidez usando la geometría *Desde aquí*

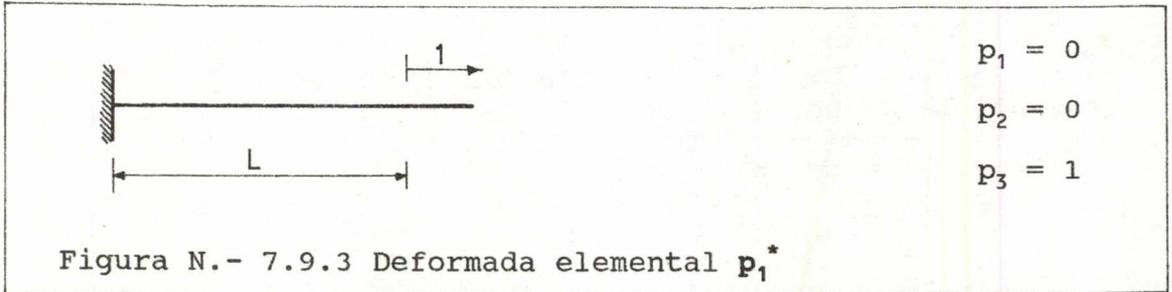
En el numeral 7.2 de este capítulo, se obtuvo la matriz de rigidez de miembro \bar{k} , para el sistema de coordenadas de la figura 7.9.1. Ahora se desea calcular \bar{k}^* para el sistema $\bar{P}^* - \bar{p}^*$ de la figura 7.9.2 esto se lo realiza por medio de la matriz \bar{T} definida por la expresión: $\bar{p} = \bar{T} \bar{p}^*$



Cálculo de la matriz \bar{T}

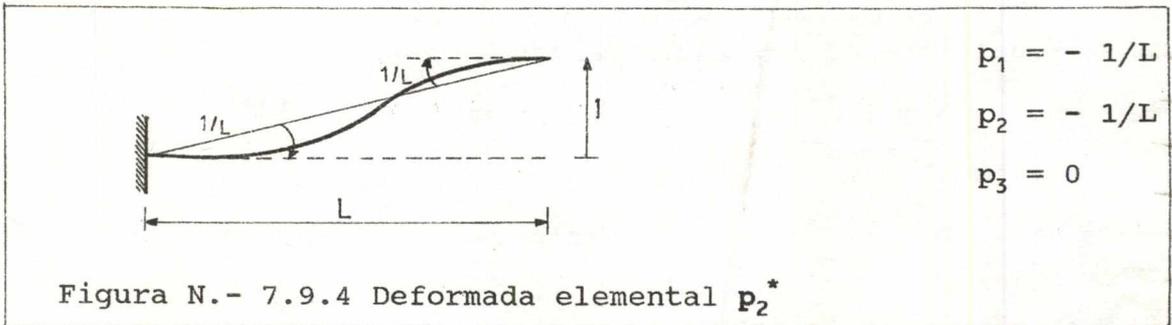
Primera columna de \bar{T}

$p_1^* = 1$ y $p_i^* = 0$ para $i \neq 1$



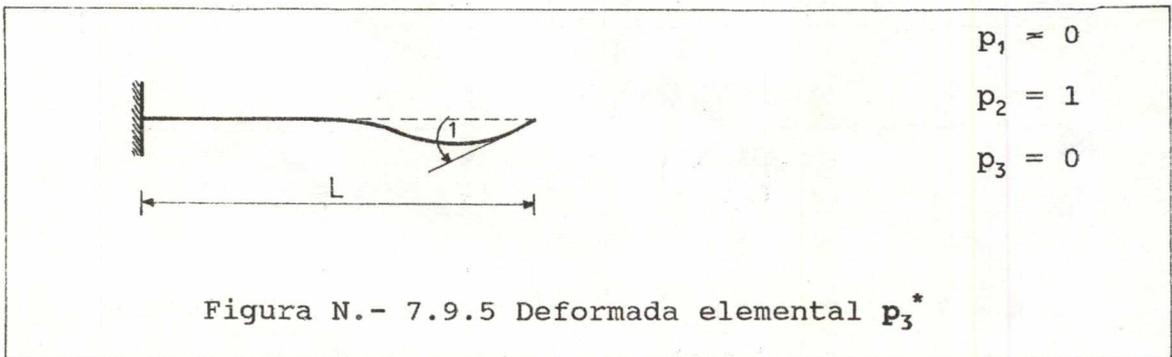
Segunda columna de \bar{T}

$p_2^* = 1$ y $p_i^* = 0$ para $i \neq 2$



Tercera columna de \bar{T}

$p_3^* = 1$ y $p_i^* = 0$ para $i \neq 3$



Por lo tanto, la matriz \bar{T} , es:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

El lector deberá justificar las deformadas presentadas en las figuras 7.9: 3, 4 y 5, así como los elementos de la matriz \bar{T} . Se recuerdan las fórmulas con que se obtienen p_1 , p_2 y p_3 .

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \quad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \quad p_3 = u_2 - u_1$$

La matriz de rigidez para el sistema de coordenadas de la figura 7.9.2 de un elemento de sección constante en el cual se desprecia el efecto de corte, está definida por la ecuación 10.

Finalmente para hallar \bar{k}^* se debe realizar el producto matricial $\bar{T}^t \bar{k} \bar{T}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la matriz de rigidez de miembro para el sistema de coordenadas $\bar{P}^* - \bar{p}^*$, de la figura 7.9.2, de un elemento de sección constante, al no considerar el efecto de corte, es:

$$\bar{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (29)$$

A continuación se presenta \bar{k}^* , cuando se considera el efecto de corte.

$$\bar{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4\phi)} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+4\phi)} & \frac{4EI(1+\phi)}{L(1+4\phi)} \end{bmatrix} \quad (30)$$

7.3.4 Cálculo de la matriz de flexibilidad de miembro usando la Estática

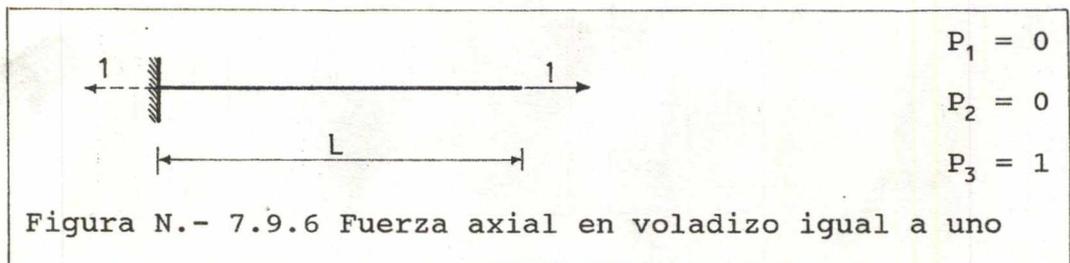
Para esto, es necesario calcular \bar{T}_1 , matriz que relaciona las fuerzas internas \bar{P} de la figura 7.9.1, con las fuerzas internas \bar{P}^* , de la figura 7.9.2. La relación, es:

$$\bar{P} = \bar{T}_1 \bar{P}^*$$

Cálculo de la matriz \bar{T}_1

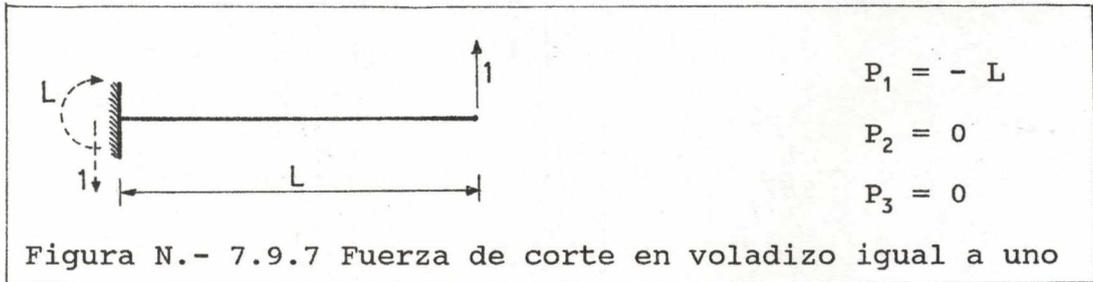
Primera columna de \bar{T}_1

$P_1^* = 1$ y $P_i^* = 0$ para $i \neq 1$



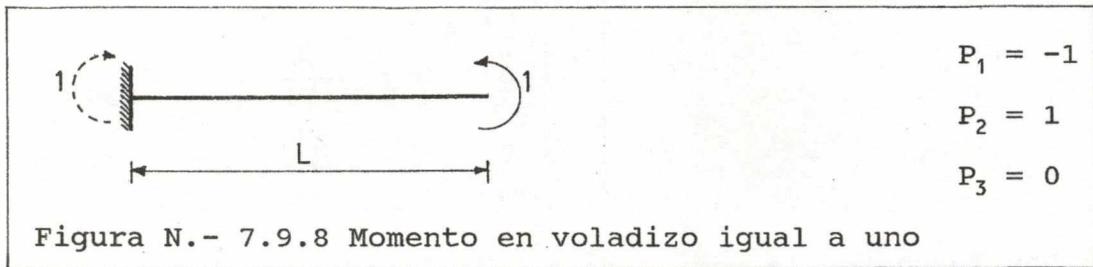
Segunda columna de \bar{T}_1

$P_2^* = 1$ y $P_i^* = 0$ para $i \neq 2$



Tercera columna de \bar{T}_1

$P_3^* = 1$ y $P_i^* = 0$ para $i \neq 3$



Por lo tanto la matriz \bar{T}_1 , es:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -L & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

La matriz de flexibilidad \bar{f}^* , es igual a:

$\bar{f}^* = \bar{T}_1^t f \bar{T}_1$ Ecuación 27

Para un miembro de sección constante, en la cual se desprecia el efecto de corte, la matriz de flexibilidad \bar{f} , viene definida por la matriz 9.

Producto $\bar{T}_1^t \bar{f} \bar{T}_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & -L & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{L^2}{3EI} & -\frac{L}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{3EI} & \frac{L}{2EI} \\ \frac{L}{EA} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -L & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de flexibilidad buscada, es:

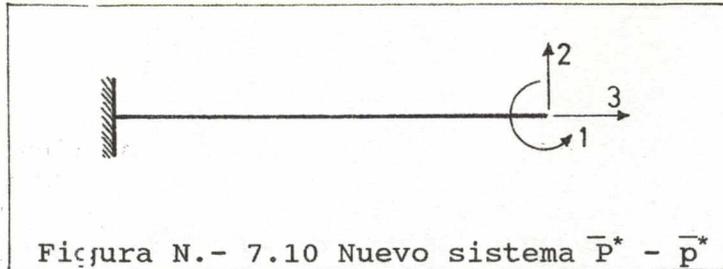
$$\bar{F}^* = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \tag{32.a}$$

Cuando se considera el efecto de corte, se tiene:

$$\bar{F}^* = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} (1 + \phi) & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \tag{32.b}$$

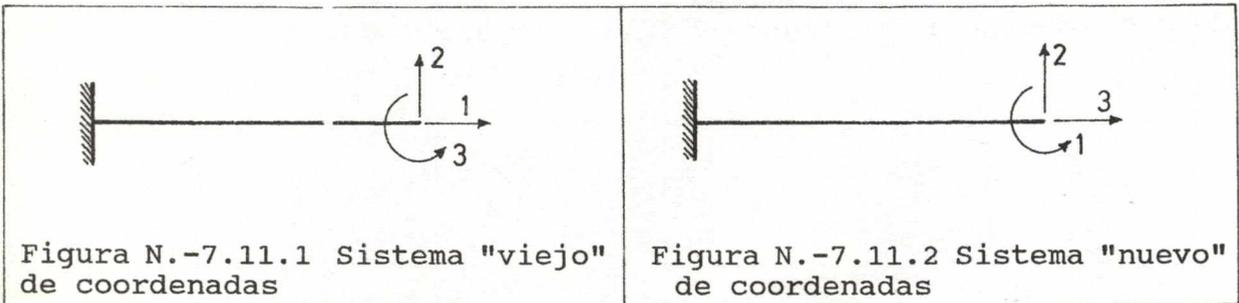
7.3.5 Obtención de \bar{k} y \bar{f} directamente cuando se cambia la numeración del sistema de coordenadas

Si el sistema de coordenadas del miembro lineal de la figura 7.7 lo numeramos de forma diferente, por ejemplo según lo expresado en la figura 7.10, y si se desea obtener la matriz de rigidez o la matriz de flexibilidad en este nuevo sistema de coordenadas, evidentemente que la forma más fácil de lograr este objetivo es a través de la matriz de transformación de coordenadas.



En el sistema mostrado, p_3^* es la deformación axial, mientras que en el sistema de la figura 7.7, esto correspondería a p_1 . Es decir, se cambió la numeración de las deformaciones **uno por tres y viceversa**. Ahora, el sistema "viejo" de coordenadas corresponde al de la figura 7.7.

Para presentar el método directo de cálculo de la matriz de rigidez y de flexibilidad de miembro, cuando se cambia el sistema de numeración, se explicará únicamente con la matriz \bar{k} , aunque se aplica también para \bar{f} . Por didáctica se indica nuevamente estos dos sistemas de coordenadas en las figuras 7.11.1 y 7.11.2 con el objeto de tener una mejor comprensión.



La nueva matriz de rigidez \bar{k}^* es igual a $\bar{T}^t \bar{k} \bar{T}$, siendo \bar{k} la matriz de rigidez de miembro, para el sistema de coordenadas de la figura 7.11.1 y la matriz \bar{T} , relaciona las deformaciones de la figura 7.11.1, con las deformaciones de la figura 7.11.2. En efecto: $\bar{p} = \bar{T} \bar{p}^*$. El cálculo de T , es muy elemental, siendo su resultado:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Al efectuar la operación $\bar{k}^* = \bar{T}^t \bar{k} \bar{T}$, se obtiene:

$$\bar{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Por lo tanto, la nueva matriz de rigidez se obtuvo cambiando los elementos de la primera fila a la tercera fila, y posteriormente de la primera columna a la tercera columna de la matriz de rigidez, en el sistema "viejo" de coordenadas.

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez del sistema de coordenadas de la figura 7.11.1

Cambio de elementos de la primera y tercera fila

$$\bar{k}^* = \begin{bmatrix} -\frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

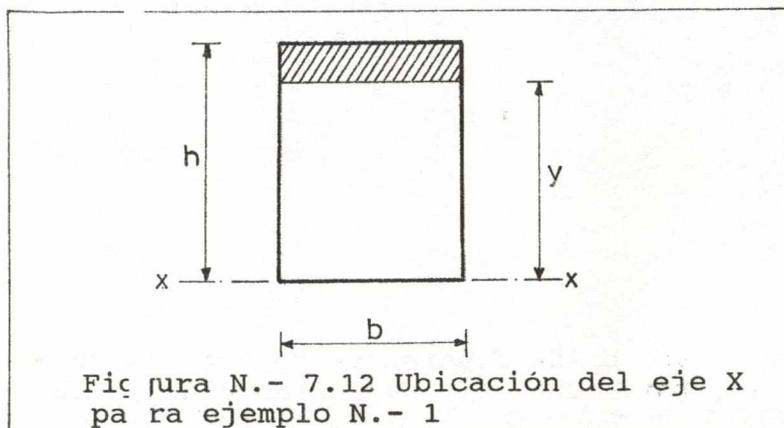
Cambio de los elementos de la primera y tercera columna

En consecuencia, para obtener la matriz de rigidez de un miembro en el cual se ha cambiado el sistema de numeración de sus coordenadas, se deberán intercambiar las filas y columnas de acuerdo al cambio de la numeración que se haya efectuado. Lo propio se hace para obtener la matriz de flexibilidad.

7.4 EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO N.- 1

Encontrar el coeficiente de forma β , de la sección rectangular de la figura 7.4. Si el momento estático S y el momento de inercia I , se calculan respecto al eje X , figura 7.12.



SOLUCION

Por ser sección constante:

$$\beta = \frac{A}{I_x^2 b^2} \int S_x^2 dA$$

$$dA = b dy$$

$$A = b h$$

$$I = \frac{b h^3}{3}$$

$$S_x = b(h - y) \left(y + \frac{h - y}{2} \right) = \frac{b}{2} (h - y) (h + y)$$

$$S_x = \frac{b}{2} (h^2 - y^2)$$

Luego:

$$\beta = \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{3}\right)^2} \int_0^h \left(\frac{b}{2}(h^2 - y^2)\right)^2 b dy$$

$$\beta = \frac{9b^4h}{4b^4h^6} \int_0^h (h^4 - 2h^2y^2 + y^4) dy$$

$$\beta = \frac{9}{4h^5} \left[h^4y - 2h^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^h$$

$$\beta = \frac{9}{4h^5} \left(h^5 - 2\frac{h^5}{3} + \frac{h^5}{5} \right)$$

$$\beta = \frac{9}{4} \left(\frac{15}{15} - \frac{10}{15} + \frac{3}{15} \right) = \frac{9 \cdot 8}{4 \cdot 15}$$

$$\beta = \frac{6}{5} = 1.2$$

EJEMPLO N.º 2

Encontrar el valor de ϕ para una columna cuadrada de 30 cm x 30 cm (b x h) y para una columna rectangular de 30 cm x 150 cm. Si $E = 2173706.5 \text{ T/m}^2$ y $G = 869482.6 \text{ T/m}^2$. En ambos casos la longitud es 2.50 m.

SOLUCION

i) Columna de $b = 30 \text{ cm}$
 $h = 30 \text{ cm}$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3 \cdot 0.3^3}{12} = 0.000675 \text{ m}^4$$

$$A = bh = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09 \text{ m}^2$$

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2} = \frac{3 \cdot 1.2 \cdot 2173706.5 \cdot 0.000675}{869482.6 \cdot 0.09 \cdot 2.5^2}$$

$$\phi = 0.0108$$

ii) Columna de $b = 30 \text{ cm}$
 $h = 150 \text{ cm}$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3 * 1.50^3}{12} = 0.084375 \text{ m}^4$$

$$A = b h = 0.3 * 1.50 = 0.45 \text{ m}^2$$

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2} = \frac{3 * 1.2 * 2173706.5 * 0.084375}{869482.6 * 0.45 * 2.5^2}$$

$$\phi = 0.27$$

En columnas de pequeñas dimensiones, el valor de ϕ es muy pequeño y se puede despreciar en el cálculo. En cambio, en columnas de grandes dimensiones, el valor de ϕ tiene importancia, su omisión puede conducir a errores apreciables, lo propio sucede en vigas esbeltas.

EJEMPLO N.- 3

Para la columna rectangular de 30 cm x 150 cm (b x h) del ejemplo anterior, determine la matriz de rigidez de miembro para el sistema de coordenadas de la figura 7.1. Calcular de dos formas:

- i) Sin considerar el efecto de corte.
- ii) Considerando el efecto de corte.

SOLUCION

- i) Sin considerar ϕ

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4 * 217370}{2.50} \frac{6.5 * 0.084375}{2.50} = 293450.37$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{293450.3}{2} \frac{7}{7} = 146725.18$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{2173706.5 * 5 * 0.45}{2.5 * 0} = 391267.16$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 293450.37 & 146725.18 & 0.00 \\ 146725.18 & 293450.37 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 391267.16 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1 + \phi}{1 + 4\phi} = \frac{1 + 0.27}{1 + 4 \cdot 0.27} = \frac{1.27}{2.08} = 0.6105769$$

$$\frac{1 - 2\phi}{1 + 4\phi} = \frac{1 - 2 \cdot 0.27}{2.08} = 0.2211538$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{4EI(1 + \phi)}{L(1 + 4\phi)} & \frac{2EI(1 - 2\phi)}{L(1 + 4\phi)} & 0 \\ \frac{2EI(1 - 2\phi)}{L(1 + 4\phi)} & \frac{4EI(1 + \phi)}{L(1 + 4\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

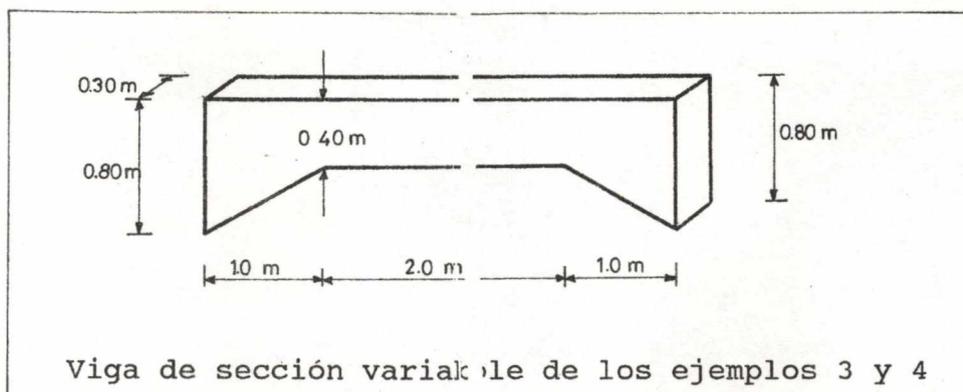
$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 179174.010 & 32448.831 & 0.000 \\ 32448.831 & 179174.010 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 391267.160 \end{bmatrix}$$

Al comparar las dos matrices de rigidez de miembro, se observa que existe una diferencia notable en los valores. Por lo tanto, es importante considerar ϕ .

7.5.- EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1.- Determinar el coeficiente de forma β , de la columna de sección constante en forma de "L".
- 2.- Encontrar los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez de miembro matriz 19, a partir de la ecuación diferencial de flexión, para un elemento de sección constante.
- 3.- Con la ayuda de tablas, por ejemplo las de GULDAN, determinar la matriz de rigidez de miembro, para el sistema de coordenadas de la figura 7.5. Para la viga de sección variable que se presenta en la figura.

Considerar $E = 21737065.5 \text{ T/m}^2$.



- 4.- Determinar los términos f_{11} y f_{21} , ecuaciones 4.1 y 4.2, de la viga del ejemplo 3. Se recomienda, resolver las integrales empleando métodos numéricos. Concretamente utilizar 5 puntos de la Cuadratura de Gauss.

