1. PROBABILIDADES

Este apartado se tratará en base de (https://es.slideshare.net/willypi/probabilidades-69277356) y Murray, donde se afirma que Los primeros estudios sobre probabilidad fueron motivados por la posibilidad de acierto o de fracaso en los juegos de azar, es decir que tenga ocurrencia o no un suceso entre varios posibles; al lanzar una moneda, por ejemplo, el obtener "cara" es un acierto entre dos casos posibles; al lanzar un dado, el número 3 es un acierto entre seis casos posibles

.

Si al sacar una carta de una baraja de 52 cartas se obtiene un as, esto es 4 de acierto entre 52 casos posibles. Problemas como los anteriores originaron la definición clásica de probabilidad. Designando por p(A) la probabilidad de ocurrencia del suceso A entre un número n de casos posibles de ocurrencia

$$p(A) = \frac{\text{Sucesos o casos favorables}}{\text{Sucesos o casos posibles}} = \frac{n_i}{n}$$

En nuestros ejemplos, la probabilidad de obtener una cara al lanzar una moneda es:

$$n_i = 1 \qquad n = 2 \qquad p(cara) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Probabilidad de obtener 3 al lanzar un dado

$$n_i = 1 \qquad n = 6 \qquad p(3) = \frac{1}{6} = 0.167$$

Probabilidad de sacar un as de una baraja de 52 cartas

$$n_i = 4 \qquad n = 52 \qquad p(as) = \frac{4}{52} = 0.077$$

Observe que la probabilidad así definida se expresa como una proporcionalidad entre casos favorables y casos totales, lo que presupone una situación ideal (probabilidad idealizada) en la que se conoce el número total de resultados posibles o de elementos de una población y el total de casos favorables. Sobre esta probabilidad repetiremos el excelente ejemplo que aparece en todos los textos de probabilidad, que es el de la urna con bolas de diferentes colores. Sea una urna que contiene 3 bolas rojas, 5 blancas y 4 azules, hallar la probabilidad de que al sacar una bola ésta sea: (a) roja; (b) blanca; (c) azul

a) $n_i = 3 \qquad n = 12 \qquad p(r) = \frac{3}{12} = 0.25$

b) $n_i = 5 \qquad n = 12 \qquad p(b) = \frac{5}{12} = 0.417$

c) $n_i = 4 \qquad n = 12 \qquad p(a) = \frac{4}{12} = 0.333$

No siempre es fácil el cálculo de los casos posibles y de los casos favorables como por ejemplo

a) Se lanzan simultáneamente dos monedas, hallar la probabilidad de que se obtenga dos caras:

Casos posibles cs cc ss sc
Casos favorables 1

$$p(cc) = \frac{1}{4} = 0.25$$

b) De una urna que contiene 3 bolas rojas, 5 azules se extraen simultáneamente 2 bolas, hallar la probabilidad de que ambas sean rojas.
:
Designando por R_1, R_2, R_3, las bolas rojas y por A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 las azules, se tiene los siguientes casos posibles

$R_1R_2+R_1R_3+R_1A_1+R_1A_2+R_1A_3+R_1A_4+R_1A_5$		7
$+R_2R_3+R_2A_1+R_2A_2+R_2A_3+R_2A_4+R_2A_5$		6
$+R_3A_1+R_3A_2+R_3A_3+R_3A_4+R_3A_5$		5
$+A_1A_2+A_1A_3+A_1A_4+A_1A_5$		4
$+A_2A_3+A_2A_4+A_2A_5$		3
$+A_3A_4+A_3A_5$		2
$+A_4A_5$		1
	Total	28

Casos favorables $R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3 = 3$

$$p(rr) = \frac{3}{28} = 0.107$$

1.1. Probabilidad condicional, sucesos independientes y dependientes

Si E_1 y E_2 son dos sucesos, la probabilidad que ocurra $E2$ dado que ha ocurrido E_1 se denota por $P\{E_2 / E_1\}$ o $P\{E_2 dado E_1\}$, se llama probabilidad condicional. Si la ocurrencia de E_1 no afecta la probabilidad de ocurrencia de E_2, se dice que E_1 y E_2 son sucesos independientes, de lo contrario los sucesos son dependientes.

Se lanza una moneda 10 veces, los sucesos cara en el quinto y cara en el sexto, son sucesos independientes

$$P\{E_1E_2\} = P\{E_1\}P\{E_2\} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 0.25$$

Si la probabilidad de que A viva 20 años es 0.7 y la probabilidad de que B viva 20 años es de 0.5 entonces la probabilidad de que ambos vivan 20 años es (0.7)*(0.5)=0.35

Supóngase una caja que contenga 3 bolas blancas y dos bolas negras, sea E_1 la primera bola extraída sea negra y E_2 la segunda bola extraída sea negra en extracciones sin reemplazamiento. E_1 y E_2 son dependientes

$$P\{E_1\} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5} = 0.4$$

es la probabilidad de que la primera bola extraída sea negra, mientras que $P\{E_2/E_1\} = \frac{1}{3+1} * \frac{1}{4} = 0.25$ es la probabilidad de que la segunda extracción sea una bola negra, dado que la primera fue bola negra.

La probabilidad de que ambas extracciones sean negras es $P\{E_1E_2\} = P\{E_1\}P\{E_2/E_1\} = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0.1$

1.2. Probabilidad condicional, sucesos mutuamente excluyentes

Se habla de sucesos mutuamente excluyentes cuando la ocurrencia del uno imposibilita la ocurrencia del otro.

Así $P\{E_1E_2\} = 0$

Si $E_1 + E_2$ denota el suceso de que «ocurra E_1 o E_2-¿o ambos, entonces

$$P\{E_1+E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} - P\{E_1E_2\}$$

Cuando son sucesos mutuamente excluyentes

$P\{E_1+E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\}$

Como ampliación de esto, si son n sucesos mutuamente excluyentes con probabilidades respectivas, entonces la probabilidad de ocurrencia es $P_1+P_2+\ldots+P_n$,

Ejemplo 1:

Si la extracción de un as de una baraja de cartas y luego la extracción de un rey, entonces $P\{E_1\} = \frac{4}{52} = P\{E_2\} = \frac{4}{52}$ La probabilidad de extracción de un as o un rey en una sola extracción es

$$P\{E_1+E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

Puesto que ambos as y rey no pueden extraerse al mismo tiempo en una sola extracción, siendo, pues, sucesos mutuamente excluyentes.

Ejemplo 2:

Si la extracción de un as de una baraja y la extracción de un trébol, entonces E_1 y E_2 no son mutuamente excluyentes, puesto que puede ser extraído el as de trébol. Así la probabilidad de extraer en una extracción un as o un trébol o ambas cosas es

$$P\{E_1+E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} - P\{E_1E_2\}$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

1.3.Probabilidad discreta

La posibilidad de que cada evento pueda tomar un determinado valor discreto, con sus respectivas probabilidades, hace que la suma de estas de cómo resultado 1

Ejemplo

Si en mil lanzamientos de una moneda resultan 529 caras

529/1000 = 0.529 probabilidad de que caiga cara

Y si en otros mil lanzamientos de la moneda 493 veces, cae cara, qué probabilidad hay de que vuelva a caer cara en el siguiente lanzamiento

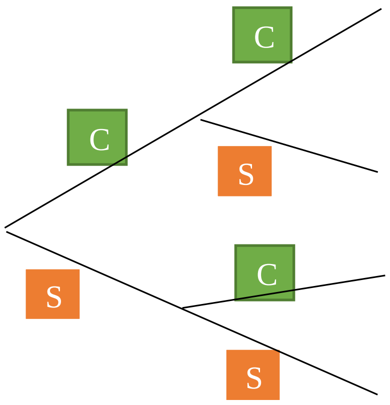
(529+493)/2000=0.511

Lo mínimo es 0 y máximo 1 resultado de la probabilidad

¿Cuál es la probabilidad de que en un lanzamiento de dos monedas caiga cara cara

Monedas	A		B
Lados	2	x	2 = 4 opciones

Pero se puede calcular con mucha facilidad con el árbol de probabilidades



C C = 0.5*0.5 = 0.25

C S = 0.5*0.5 = 0.25

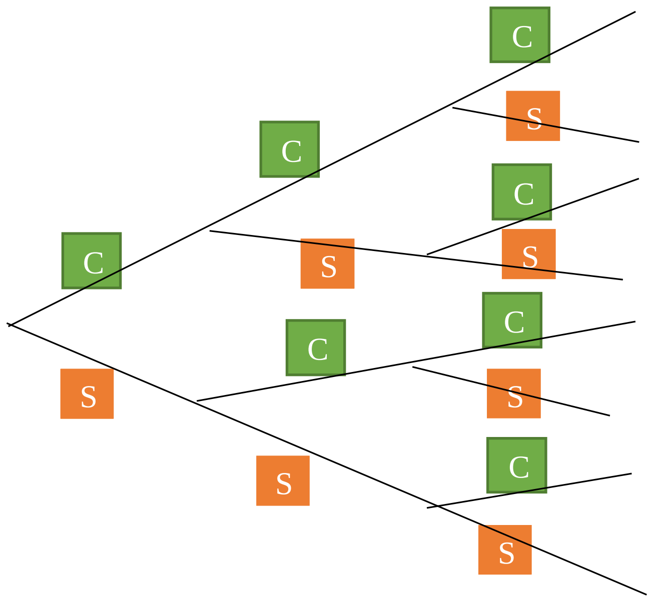
S C = 0.5*0.5 = 0.25

S S = 0.5*0.5 = 0.25

¿Cuál es la probabilidad de que en tres lanzamientos de una moneda, caiga cara cara cara

Monedas	A		B		C
Lados	2	x	2	x	2 = 8 opciones

Pero se puede calcular con mucha facilidad con el árbol de probabilidades



C C C = 0.5*0.5*0.5 = 0.125

C C S = 0.5*0.5*0.5 = 0.125

C S C = 0.5*0.5*0.5 = 0.125

C S S = 0.5*0.5*0.5 = 0.125

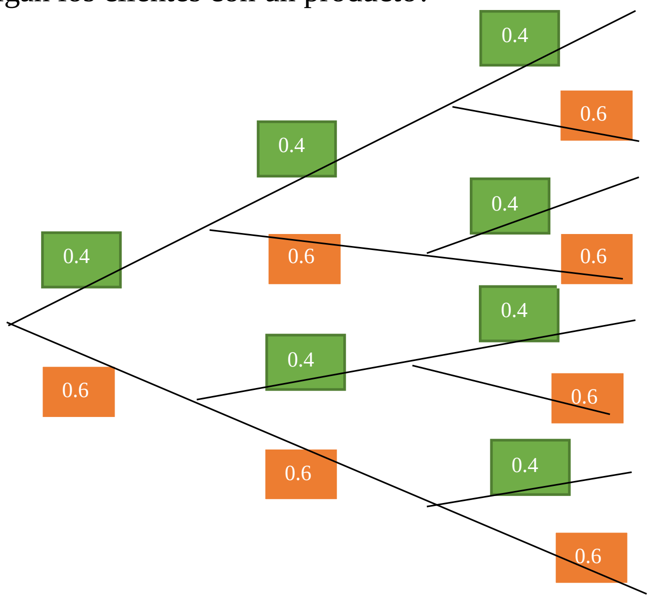
S C C = 0.5*0.5*0.5 = 0.125

S C S = 0.5*0.5*0.5 = 0.125

S S C = 0.5*0.5*0.5 = 0.125

S S S = 0.5*0.5*0.5 = 0.125

En tres almacenes en general la probabilidad de que los clientes compren algún producto es del 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que de los tres almacenes salgan los clientes con un producto?, y ¿Cuál es la probabilidad de que de por lo menos de dos de los tres almacenes salgan los clientes con un producto?



Sí Sí Sí **= 0.4*0.4*0.4 = 0.064**

Sí Sí No **= 0.4*0.4*0.6 = 0.096**

Sí No Sí **= 0.4*0.6*0.4 = 0.096**

Sí No No **= 0.4*0.6*0.6 = 0.144**

No Sí Sí **= 0.6*0.4*0.4 = 0.096**

No Sí No **= 0.6*0.4*0.6 = 0.144**

No No Sí **= 0.6*0.6*0.4 = 0.144**

No No No **= 0.6*0.6*0.6 = 0.216**

De los 3 almacenes un 0.064, esto es (0.4*0.4*0.4); y de por lo menos de dos almacenes un 0.352 de probabilidades de que los clientes salgan comprando algún producto.

0.064 + 0.096 + 0.096 + 0.096 = 0.352

Determinar la probabilidad de que en una lanzada de dos dados se obtengan la suma de 8 puntos

A	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36