El blog de Leo

Aprendiendo, creando y compartiendo matemáticas

Ecuaciones Diferenciales I: Ecuación de Cauchy – Euler

Por Omar González Franco

Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas.
– Albert Einstein

Introducción

Más adelante en esta unidad estudiaremos las ecuaciones diferenciales de orden superior con coeficientes variables, éstas ecuaciones suelen ser mucho más difícil de resolver ya que no se resuelven en términos de funciones elementales, una estrategia usual es suponer una solución en forma de series infinitas y proceder de manera similar al método de coeficientes indeterminados. Sin embargo, existe una ecuación diferencial de coeficientes variables que es una excepción, pues su solución general siempre se puede expresar en términos de potencias de x, senos, cosenos y funciones logarítmicas, dicha ecuación es conocida como ecuación de **Cauchy – Euler** y dedicaremos esta entrada a estudiarla, así como su método de resolución.

Decidimos estudiar esta ecuación en este momento debido a que el método de resolución es bastante similar al de las ecuaciones con coeficientes constantes en los que se debe resolver una ecuación auxiliar.

Ecuación de Cauchy – Euler

Definición: Una ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_{n}x^{n}\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{1}x\frac{dy}{dx}+a_{0}y=g(x) \tag{1}$$

donde los coeficientes a_{n}, $a_{n-1}, \cdots, a_{0}$ son constantes, se conoce como **ecuación de Cauchy – Euler**.

Enseguida nos damos cuenta de que los coeficientes

$$b_{n}(x)=a_{n}x^{n}, \quad b_{n-1}(x)=a_{n-1}x^{n-1}, \quad \cdots, \quad b_{1}(x)=a_{1}x^{1}, \quad b_{0}(x)=a_{0}x^{0}$$

son dependientes de x, es decir, son coeficientes variables, además la característica importante de esta ecuación es que el grado $k=n, n-1, \cdots, 1, 0$ de los coeficientes monomiales x^{k} coincide con el orden k de la derivación $\dfrac{d^{k}y}{dx^{k}}$.

Como se ha hecho a lo largo de la unidad, desarrollaremos con todo detalle el método de resolución de la ecuación de Cauchy – Euler para el caso de segundo orden, recordando que es posible extender el método a cualquier orden n siguiendo el mismo razonamiento.

Iniciaremos nuestro análisis con un estudio detallado de las formas de las soluciones generales de la ecuación homogénea de segundo orden

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0 \tag{2}$$

con a, b y c constantes. Para resolver la ecuación no homogénea

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=g(x) \tag{3}$$

con $g(x) \neq 0$, basta aplicar el método de variación de parámetros (o de coeficientes indeterminados) una vez que se ha determinado la función complementaria y_c, es decir, la solución general de la ecuación homogénea (2).

Una consideración importante es que el coeficiente ax^2 de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ es cero en $x=0$, para garantizar los resultados fundamentales del teorema de existencia y unicidad y sean aplicables a la ecuación de Cauchy – Euler debemos encontrar soluciones generales definidas en el intervalo $\delta=(0,\infty)$. Las soluciones en el intervalo $(-\infty,0)$ se obtienen al sustituir $t=-x$ en la ecuación diferencial.

Método de resolución

En el caso de las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes propusimos como solución una función de la forma

$$y(x)=e^{kx}$$

De manera similar, en este caso se prueba una solución de la forma

$$y(x)=x^k$$

Donde k es un valor que se debe determinar. Al sustituir x^k, cada término de una ecuación de Cauchy – Euler se convierte en un polinomio en k veces x^k, puesto que

$$\begin{aligned}a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n}&=a_nx^n\left[k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^{k-n}\right]\\&=[a_nk(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)]x^k\end{aligned}$$

Por ejemplo, cuando sustituimos $y=x^k$ y las respectivas derivadas en la ecuación de segundo orden (2), se obtiene

$$\begin{aligned}ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy&=ax^2[k(k-1)x^{k-2}]+bx[kx^{k-1}]+cx^k\\&=ak(k-1)x^k+bkx^k+cx^k\\&=[ak(k-1)+bk+c]x^k\end{aligned} \tag{4}$$

Así, $y=x^k$ es una solución de la ecuación diferencial homogénea siempre que k sea una solución de la ecuación auxiliar

$$ak(k-1)+bk+c=0$$

o bien,

$$ak^2+(b-a)k+c=0 \tag{5}$$

Hay tres casos distintos a considerar que dependen de si las raíces de esta ecuación auxiliar son reales y distintas, reales e iguales o complejas.

Caso 1: Raíces reales y distintas

Sean k_1 y k_2 las raíces reales de (5), tales que $k_1 \neq k_2$. Entonces

$$y_1 = x^{k_1} \qquad y \qquad y_2 = x^{k_2}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones. El Wronskiano esta dado como

$$\begin{aligned} W(x^{k_1}, x^{k_2}) &= \begin{vmatrix} x^{k_1} & x^{k_2} \\ k_1 x^{k_1 - 1} & k_2 x^{k_2 - 1} \end{vmatrix} \\ &= k_2 x^{(k_1 + k_2 - 1)} - k_1 x^{(k_2 + k_1 - 1)} \end{aligned}$$

Como

$$W(x^{k_1}, x^{k_2}) = (k_2 - k_1) x^{k_1 + k_2 - 1} \neq 0$$

$\forall x \in \delta$, entonces la solución general de la ecuación de Cauchy – Euler para $x > 0$, en el caso en el que las raíces son reales y distintas, es

$$y(x) = c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} \tag{6}$$

Caso 2: Raíces reales repetidas

Si las raíces de (5) son repetidas, es decir $k_1 = k_2$, entonces se obtiene sólo una solución particular

$$y = x^{k_1} = x^{k_2} = x^k$$

Cuando las raíces de la ecuación auxiliar (5) son iguales, el discriminante necesariamente es cero, es así que de (5) se deduce que las raíces deben ser

$$k = -\frac{(b - a)}{2a}$$

Cuando estudiamos el método de reducción de orden vimos que conocida una solución no trivial y_1, una segunda solución y_2, tal que y_1 y y_2 formen un conjunto fundamental de soluciones, puede ser determinada por la expresión

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} \tag{7}$$

Para usar este resultado escribamos a la ecuación de Cauchy – Euler en su forma estándar.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{b}{ax} \frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2} y = 0 \tag{8}$$

Identificamos que

$$P(x) = \frac{b}{ax} \qquad y \qquad Q(x) = \frac{c}{ax^2}$$

Vemos que

$$\int P(x)dx = \int \frac{b}{ax}dx = \frac{b}{a}\ln(x)$$

Sustituyendo en (7) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^k \int \frac{e^{-(b/a)\ln(x)}}{x^{2k}}dx \\ &= x^k \int \frac{x^{-b/a}}{x^{2k}}dx \\ &= x^k \int \frac{x^{-b/a}}{x^{-(b-a)/a}}dx \\ &= x^k \int \frac{dx}{x} \\ &= x^k \ln(x) \end{aligned}$$

En el proceso se ha considerado que

$$e^{-(b/a)\ln(x)} = e^{\ln(x^{-b/a})} = x^{-b/a}$$

y

$$2k = -\frac{(b-a)}{a}$$

Entonces, la segunda solución es

$$y_2(x) = x^k \ln(x)$$

Vemos que

$$\begin{aligned} W(x^k, x^k\ln(x)) &= \begin{vmatrix} x^k & x^k \ln(x) \\ kx^{k-1} & kx^{k-1}\ln(x) + x^{k-1} \end{vmatrix} \\ &= kx^{2k-1}\ln(x) + x^{2k-1} - kx^{2k-1}\ln(x) \\ &= x^{2k-1} \end{aligned}$$

Como

$$W(x^k, x^k\ln(x)) = x^{2k-1} \neq 0$$

$\forall x \in \delta$, entonces la solución general de la ecuación de Cauchy – Euler para $x > 0$, en el caso en el que las raíces son iguales, es

$$y(x) = c_1x^k + c_2x^k\ln(x) \tag{9}$$

Para ecuaciones de orden superior, si k es una raíz de multiplicidad r, entonces se puede demostrar que

$$x^k, \quad x^k\ln(x), \quad x^k(\ln(x))^2, \quad \cdots, \quad x^k(\ln(x))^{r-1}$$

son r soluciones linealmente independientes. En correspondencia, la solución general de la ecuación diferencial debe contener una combinación lineal de estas r soluciones.

Caso 3: Raíces complejas conjugadas

Si las raíces de (5) son el par conjugado

$$k_1 = \alpha + i\beta \qquad y \qquad k_2 = \alpha - i\beta$$

Donde α y $\beta > 0$ son reales, entonces una solución es

$$y(x) = C_1 x^{\alpha+i\beta} + C_2 x^{\alpha-i\beta} \tag{10}$$

De tarea moral muestra que

$$W(x^{\alpha+i\beta}, x^{\alpha-i\beta}) = -2i\beta x^{2\alpha-1} \neq 0$$

lo que indica que la solución (10) está compuesta por las funciones del conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial de Cauchy – Euler.

Tal como lo hicimos en el caso de coeficientes constantes, se desea escribir la solución en términos de funciones reales. Consideremos la identidad

$$x^{i\beta} = (e^{\ln(x^{i\beta})}) = e^{i\beta \ln(x)} \tag{11}$$

Usando la fórmula de Euler podemos escribir

$$x^{i\beta} = \cos(\beta \ln(x)) + i \sin(\beta \ln(x)) \tag{12}$$

De forma similar,

$$x^{-i\beta} = \cos(\beta \ln(x)) - i \sin(\beta \ln(x)) \tag{13}$$

Si se suman y restan los dos últimos resultados, se obtiene lo siguiente, respectivamente

$$x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2\cos(\beta \ln(x)) \qquad y \qquad x^{i\beta} - x^{i\beta} = 2i \sin(\beta \ln(x)) \tag{14}$$

Debido a que (10) es una solución para cualquier valor de las constantes, podemos notar que si elegimos $C_1 = C_2 = 1$ y, por otro lado, $C_1 = 1, C_2 = -1$, obtenemos las siguientes dos soluciones, respectivamente

$$y_1(x) = x^{\alpha}(x^{i\beta} + x^{-i\beta}) \qquad y \qquad y_2(x) = x^{\alpha}(x^{i\beta} - x^{-i\beta}) \tag{15}$$

Usando (14) podemos escribir

$$y_1(x) = 2x^{\alpha} \cos(\beta \ln(x)) \qquad y \qquad y_2(x) = 2ix^{\alpha} \sin(\beta \ln(x)) \tag{16}$$

De tarea moral muestra que

$$W(x^{\alpha} \cos(\beta \ln(x)), x^{\alpha} \sin(\beta \ln(x)) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0$$

Con esto se concluye que

$$y_1(x) = x^{\alpha} \cos\left(\beta \ln(x)\right) \qquad y \qquad y_2(x) = x^{\alpha} \sin\left(\beta \ln(x)\right) \tag{17}$$

constituyen un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial. Así, la solución general de la ecuación de Cauchy – Euler para $x > 0$, en el caso en el que las raíces son complejas conjugadas, es

$$y(x) = x^{\alpha} \left[c_1 \cos\left(\beta \ln(x)\right) + c_2 \sin\left(\beta \ln(x)\right)\right] \tag{18}$$

Realicemos algunos ejemplos en los que apliquemos cada caso.

Ejemplo: Resolver la ecuación de Cauchy – Euler

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{3}x\frac{dy}{dx} - \frac{2}{9}y = 0$$

Solución: Consideremos la solución $y = x^k$, las respectivas derivadas son

$$\frac{dy}{dx} = kx^{k-1} \qquad y \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = k(k-1)x^{k-2}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial.

$$x^2\left[k(k-1)x^{k-2}\right] + \frac{2}{3}x\left[kx^{k-1}\right] - \frac{2}{9}x^k = x^k\left[k(k-1) + \frac{2}{3}k - \frac{2}{9}\right] = 0$$

Como $x \neq 0$, entonces la ecuación auxiliar es

$$k(k-1) + \frac{2}{3}k - \frac{2}{9} = 0$$

o bien,

$$k^2 - \frac{1}{3}k - \frac{2}{9} = 0$$

Resolviendo para k obtenemos las raíces $k_1 = \dfrac{2}{3}$ y $k_2 = -\dfrac{1}{3}$. Como las raíces son reales y distintas, de acuerdo a (6), la solución de la ecuación de Cauchy – Euler es

$$y(x) = c_1 x^{2/3} + c_2 x^{-1/3}$$

$\square$

Ejemplo: Resolver la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Solución: Consideremos la solución $y = x^k$, las respectivas derivadas son

$$\frac{dy}{dx} = kx^{k-1} \qquad y \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = k(k-1)x^{k-2}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial.

$$x^2\left[k(k-1)x^{k-2}\right]+3x\left[kx^{k-1}\right]+x^k=x^k\left[k(k-1)+3k+1\right]=0$$

Como $x\neq 0$, entonces la ecuación auxiliar es

$$k(k-1)+3k+1=0$$

o bien,

$$k^2+2k+1=0$$

Resolviendo para k obtenemos las raíces $k_1=k_2=-1$. Como las raíces son reales repetidas, por (9) concluimos que la solución general de la ecuación de Cauchy – Euler es

$$y(x)=c_1x^{-1}+c_2x^{-1}\ln(x)=\frac{1}{x}[c_1+c_2\ln(x)]$$

$\square$

Ejemplo: Resolver la ecuación de Cauchy-Euler

$$3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+6x\frac{dy}{dx}+y=0$$

Solución: Consideremos la solución $y=x^k$, las respectivas derivadas son

$$\frac{dy}{dx}=kx^{k-1}\qquad y\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=k(k-1)x^{k-2}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial.

$$3x^2\left[k(k-1)x^{k-2}\right]+6x\left[kx^{k-1}\right]+x^k=x^k\left[3k(k-1)+6k+1\right]=0$$

Como $x\neq 0$, entonces la ecuación auxiliar es

$$3k(k-1)+6k+1=0$$

o bien,

$$3k^2+3k+1=0$$

Resolviendo para k obtenemos las raíces

$$k_1=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2\sqrt{3}}\qquad y\qquad k_2=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Identificamos que

$$\alpha=-\frac{1}{2}\qquad y\qquad \beta=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Las raíces son complejas conjugadas, de manera que la solución esta dada por (18). Así, la solución general de la ecuación de Cauchy – Euler es

$$y(x) = x^{-1/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(x)\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(x)\right)\right]$$

$\square$

Caso no homogéneo

Para resolver la ecuación no homogénea (3) podemos aplicar el método de variación de parámetros visto en la entrada anterior, pues basta encontrar el conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, y_2\}$ de la ecuación homogénea asociada y con ello aplicar la fórmula de la solución particular, esto es

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)}dx \tag{19}$$

Recordar que la función $g(x)$ se obtiene de la **forma estándar** de la ecuación diferencial.

Realicemos un ejemplo.

Ejemplo: Usando el método de variación de parámetros, resolver la ecuación de Cauchy – Euler

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2x$$

Solución: Debemos hallar el conjunto fundamental de soluciones, así que primero debemos resolver la ecuación homogénea asociada.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Consideremos la solución $y = x^k$ y sus derivadas

$$\frac{dy}{dx} = kx^{k-1} \qquad y \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = k(k-1)x^{k-2}$$

Sustituimos en la ecuación homogénea asociada.

$$x^2\left[k(k-1)x^{k-2}\right] - x\left[kx^{k-1}\right] + x^k = x^k\left[k(k-1) - k + 1\right] = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

De donde $k_1 = k_2 = 1$, así la solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1x + c_2x\ln(x)$$

Las funciones

$$y_1(x) = x \qquad y \qquad y_2(x) = x\ln(x)$$

conforman al conjunto fundamental de soluciones. Para determinar el Wronskiano vamos a considerar la primer derivada de cada solución.

$$\frac{dy_1}{dx} = 1 \qquad y \qquad \frac{dy_2}{dx} = \ln(x) + 1$$

Sustituimos en el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x & x\ln(x) \\ 1 & \ln(x) + 1 \end{vmatrix} = x\ln(x) + x - x\ln(x) = x$$

El Wronskiano es

$$W(x) = x$$

Para determinar la función g dividamos entre x^2 la ecuación diferencial y así escribirla en su forma estándar.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}y = \frac{2}{x}$$

Vemos que

$$g(x) = \frac{2}{x}$$

Ahora podemos sustituir en la solución particular (19).

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -x\int \frac{x\ln(x)\left(\dfrac{2}{x}\right)}{x}dx + x\ln(x)\int \frac{x\left(\dfrac{2}{x}\right)}{x}dx \\ &= -2x\int \frac{\ln(x)}{x}dx + 2x\ln(x)\int \frac{dx}{x} \\ &= -2x\frac{[\ln(x)]^2}{2} + 2x[\ln(x)]^2 \\ &= x[\ln(x)]^2 \end{aligned}$$

La solución particular es

$$y_p(x) = x[\ln(x)]^2$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación de Cauchy – Euler será la superposición de ambas soluciones, esto es

$$y(x) = c_1x + c_2x\ln(x) + x[\ln(x)]^2$$

$\square$

Reducción a coeficientes constantes

Las similitudes entre las formas de las soluciones de ecuaciones de Cauchy – Euler y soluciones de ecuaciones con coeficientes constantes no son una coincidencia.

Por ejemplo, cuando las raíces de las ecuaciones auxiliares para

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

y

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$$

son distintas y reales, las soluciones generales respectivas, para $x>0$, son

$$y(x)=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x} \qquad y \qquad y(x)=c_1x^{k_1}+c_2x^{k_2} \tag{20}$$

Usando la identidad

$$e^{\ln x}=x$$

Para $x>0$, la segunda solución dada en (20) puede expresarse en la misma forma que la primera solución.

$$y(x)=c_1e^{k_1\ln(x)}+c_2e^{k_2\ln(x)}=c_1e^{k_1t}+c_2e^{k_2t} \tag{21}$$

donde $t=\ln(x)$. Este resultado ilustra que cualquier ecuación de Cauchy – Euler se puede escribir como una ecuación con coeficientes constantes haciendo la sustitución $x=e^t$ y con esto resolver la nueva ecuación diferencial en términos de la variable t, usando los métodos descritos en la entrada correspondiente y una vez obtenida la solución general, sustituir nuevamente $t=\ln(x)$. Este método requiere del uso de la regla de la cadena.

Si se hace la sustitución $x=e^t$, (o bien $t=\ln(x)$), aplicando la regla de la cadena obtenemos las siguientes expresiones para las derivadas.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \tag{22}$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) \tag{23}$$

Sustituyendo en la ecuación de Cauchy – Euler obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy &= ax^2\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]+bx\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right]+cy \\ &= a\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\frac{dy}{dt}+cy \end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo la sustitución $x=e^t$ reducimos la ecuación de Cauchy – Euler a la ecuación

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+(b-a)\frac{dy(t)}{dt}+cy(t)=g(t) \tag{24}$$

que corresponde a una ecuación diferencial con coeficientes constantes en donde la variable independiente es t.

Realicemos un ejemplo.

Ejemplo: Usar el cambio de variable $x = e^t$ para convertir la ecuación de Cauchy – Euler

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 13y = 4 + 3x$$

en una ecuación de coeficiente constantes y obtener la solución general.

Solución: Consideremos el cambio de variable $x = e^t$, usando los resultados (22) y (23), la ecuación de Cauchy – Euler queda como sigue

$$x^2 \left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] - 3x\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right] + 13y = 4 + 3e^t$$

Esto es,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 13y = 4 + 3e^t$$

Ahora tenemos una ecuación no homogénea con coeficientes constantes. Comencemos por resolver la ecuación homogénea.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

Las raíces son

$$k_1 = 2 + i3 \qquad y \qquad k_2 = 2 - i3$$

Identificamos que $\alpha = 2$ y $\beta = 3$, entonces la solución complementaria, en la variable t, es

$$y_c(t) = c_1 e^{2t}\cos(3t) + c_2 e^{2t}\sin(3t)$$

Las funciones correspondientes al conjunto fundamental de soluciones son

$$y_1(x) = e^{2t}\cos(3t) \qquad y \qquad y_2(x) = e^{2t}\sin(3t)$$

Las derivadas correspondientes son

$$\frac{dy_1}{dx} = 2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t) \qquad y \qquad \frac{dy_2}{dx} = 2e^{2t}\sin(3t) + 3e^{2t}\cos(3t)$$

El Wronskiano esta dado por

$$W = \begin{vmatrix} e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) \\ 2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t) & 2e^{2t}\sin(3t) + 3e^{2t}\cos(3t) \end{vmatrix}$$

Calculando el determinante obtendremos

$$W(t) = 3e^{4t}$$

La ecuación diferencial ya se encuentra en su forma estándar, así que la función g es

$$g(t) = 4 + 3e^{t}$$

Ahora podemos sustituir las funciones correspondientes en la solución particular (19) para la variable t.

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -e^{2t}\cos(3t)\int \frac{e^{2t}\sin(3t)(4+3e^{t})}{3e^{4t}}dt + e^{2t}\sin(3t)\int \frac{e^{2t}\cos(3t)(4+3e^{t})}{3e^{4t}}dt \\ &= -e^{2t}\cos(3t)\left[\frac{4}{3}\int \frac{\sin(3t)}{e^{2t}}dt + \int \frac{\sin(3t)}{e^{t}}dt\right] \\ &+ e^{2t}\sin(3t)\left[\frac{4}{3}\int \frac{\cos(3t)}{e^{2t}}dt + \int \frac{\cos(3t)}{e^{t}}dt\right] \end{aligned}$$

Las integrales se resuelven con integración por partes. De tarea moral desarrolla el cálculo de cada integral, los resultados correspondientes son

$$\int \frac{\sin(3t)}{e^{2t}}dt = -\frac{2}{13}e^{-2t}\sin(3t) - \frac{3}{13}e^{-2t}\cos(3t)$$

$$\int \frac{\sin(3t)}{e^{t}}dt = -\frac{3}{10}e^{-t}\cos(3t) - \frac{1}{10}e^{-t}\sin(3t)$$

$$\int \frac{\cos(3t)}{e^{2t}}dt = -\frac{2}{13}e^{-2t}\cos(3t) + \frac{3}{13}e^{-2t}\sin(3t)$$

$$\int \frac{\cos(3t)}{e^{t}}dt = \frac{3}{10}e^{-t}\sin(3t) - \frac{1}{10}e^{-t}\cos(3t)$$

Sustituyendo estos resultados en $y_p(t)$ y reduciendo la expresión obtendremos la solución particular

$$y_p(t) = \frac{4}{13} + \frac{3}{10}e^{t}$$

Por tanto, la solución general en términos de la variable t es

$$y(t) = c_1e^{2t}\cos(3t) + c_2e^{2t}\sin(3t) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}e^{t}$$

Si regresamos a la variable original $x = e^{t}$ obtenemos finalmente que la solución general de la ecuación de Cauchy – Euler es

$$y(x) = c_1x^2\cos[3\ln(x)] + c_2x^2\sin[3\ln(x)] + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}x$$

$\square$

Con esto concluimos el estudio de la ecuación de Cauchy – Euler y en general con el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes y ecuaciones sencillas con coeficientes variables.

Tarea moral

Los siguientes ejercicios no forman parte de la evaluación del curso, pero servirán para entender mucho mejor los conceptos vistos en esta entrada, así como temas posteriores.

1. Resolver las siguientes ecuaciones de Cauchy – Euler.

- $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 12y = 0$
- $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 5x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$
- $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$
- $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$
- $25x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 25x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$
- $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 5x\dfrac{dy}{dx} - 5y = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones de Cauchy – Euler usando el método de variación de parámetros.

- $2x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 5x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2 - x$
- $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = \dfrac{1}{x+1}$

3. Usar el cambio de variable $x = e^t$ para convertir las ecuaciones de Cauchy – Euler en ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes y resolver la ecuación.

- $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 10x\dfrac{dy}{dx} + 8y = x^2$
- $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 6y = \ln(x^2)$

4. Hacer una extensión a orden 3 de la teoría desarrollada en esta entrada y aplicando el método de variación de parámetros obtener la solución general de la siguiente ecuación de Cauchy – Euler.

- $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6x\dfrac{dy}{dx} - 6y = 3 + \ln(x^3)$

Más adelante…

Con esto concluimos la primera parte de la unidad dos. En la siguiente entrada abordaremos el tema de las oscilaciones mecánicas como ejemplo de aplicación de la teoría que hemos desarrollado hasta este momento.

En entradas posteriores haremos un estudio detallado sobre las ecuaciones diferenciales de orden superior con coeficientes variables y con ello cerraremos la segunda unidad.

Entradas relacionadas

- Página principal del curso: Ecuaciones Diferenciales I
- Entrada anterior del curso: Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden – Método de variación de parámetros
- Siguiente entrada del curso: Oscilaciones mecánicas

- Video relacionado al tema: Ecuación de Euler

Agradecimientos

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104522 «Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM – Etapa 2»

Esta entrada se publicó en Matemáticas y está etiquetada con ecuación auxiliar, ecuación con coeficientes variables, Ecuación de Cauchy-Euler, raíces complejas, raíces reales distintas, raíces repetidas en diciembre 16, 2021 [https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-ecuacion-de-cauchy-euler/] por Omar González Franco.