ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Cálculo diferencial de funciones de una variable.
- Cálculo integral de funciones de una variable.
- Derivación de la función compuesta e implícita.
- Representación de curvas planas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Poder definir los conceptos básicos del tema.
2. Saber si una función es solución de una e.d.o. de segundo orden . Dadas una familia biparamétrica de curvas y una e.d.o. de segundo orden saber comprobar que la familia es la solución general de la ecuación. Para una familia biparamétrica de curvas, saber encontrar la ecuación cuya solución general es la familia dada.
3. Conocida la solución general de una e.d.o., poder encontrar la particular correspondiente a unas condiciones iniciales o de frontera. Dado un problema de valor inicial, saber analizar si existe solución y ésta es única.
4. Poder utilizar el método de reducción de orden para encontrar una segunda solución de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, conocida una primera solución.
5. Determinar si un conjunto de soluciones de una ecuación homogénea es un sistema fundamental.
6. En ecuaciones lineales no homogéneas, conocer la construcción de la solución general a partir de una particular y de la general de la homogénea asociada. Saber utilizar el principio de superposición, para simplificar la resolución.
7. Saber encontrar la solución general de una e.d.o. lineal homogénea de segundo orden de coeficientes constantes, manejando la relación entre las raíces de la ecuación característica y el sistema fundamental de soluciones.
8. Discriminar cuándo se pueden utilizar los métodos de coeficientes indeterminados y variación de constantes para la búsqueda de soluciones particulares y saber emplearlos.
9. Saber utilizar el cambio de variable en ecuaciones diferenciales de orden superior a uno.
10. Poder transformar un problema de valor inicial sobre una e.d.o. lineal en un sistema de ecuaciones de primer orden para su posterior resolución analítica o numérica.
11. Saber obtener la solución analítica de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes de primer orden.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES. GENERALIDADES

1 Introducción

Una aplicación clásica de las ecuaciones diferenciales se presenta en el estudio de un circuito eléctrico que consiste en resistores, inductores y capacitores, al cual se aplica una fuerza electromotriz. En este caso una aplicación de las leyes de Kirchoff conduce a la ecuación

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$$

donde L es la inductancia, R la resistencia, C la capacitancia, $E(t)$ la fuerza electromotriz, $q(t)$ la carga y t el tiempo. Esta ecuación diferencial constituye un ejemplo de las ecuaciones diferenciales que se estudiarán en este tema: las ecuaciones lineales de segundo orden.

2 Definición ecuación diferencial lineal de orden n

Ecuación diferencial lineal de orden n.- Es una ecuación de la forma:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=b(x)$$

- Si $b(x)=0$ la ecuación diferencial lineal de orden n se llama homogénea

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

- Si $b(x)\neq 0$, *la ecuación lineal se llama* **no homogénea o completa**.

Ecuación diferencial ***lineal de orden n de coeficientes constantes.***- Es una ecuación de la forma:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=b(x),\qquad a_i\in\mathbb{R}$$

Centraremos nuestro estudio en las ecuaciones lineales de segundo orden, cuya forma canónica es:

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)\quad (1)}$$

Los resultados obtenidos para estas ecuaciones se generalizan fácilmente a ecuaciones lineales de orden superior a 2.

3 Soluciones

Solución general.- Una familia biparamétrica de funciones $\phi(x,y,C_1,C_2)=0$ es solución general de la ecuación (1) si cada función de la familia satisface la ecuación y si dados unos valores y_o e y_1, existen C_1 y C_2 tales que la correspondiente función cumpla que $y\left(x_o\right)=y_o$ y que $y'\left(x_o\right)=y_1$.

Solución particular.- Es cada una de las funciones que se obtiene de la solución general al dar valores a los parámetros.

Solución singular.- Es una solución que no puede extraerse de la solución general.

Conocida la solución general, puede obtenerse la ecuación diferencial de la familia por derivación y eliminación de parámetros.

Ejemplo: Dada la solución general $y = C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{x}$, encontrar la EDO cuya solución es la familia de curvas biparamétricas.

Para ello eliminamos los dos parámetros del sistema formado por

$$\left.\begin{array}{ll} y = C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{x} & (I) \\ y' = 2C_1 x - \dfrac{C_2}{x^2} & (II) \\ y'' = 2C_1 + \dfrac{2C_2}{x^3} & (III) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} (I) + x(II) & \boxed{y + xy' = 3C_1 x^2} \\ (II) - x(III) & \boxed{y' - xy'' = -3\dfrac{C_2}{x^3}} \end{array}$$

Sustituyendo en (I)

$$y = \frac{y + xy'}{3} + \frac{-y'x + x^2 y''}{3} \Rightarrow 3y = y + x^2 y'' \Rightarrow \boxed{2y - x^2 y'' = 0}$$

4 Problemas asociados

Problema de valores iniciales (PVI).- Es el formado por la ecuación diferencial junto con los valores que debe de tomar la solución y su derivada en un mismo punto $x = x_o$:

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1$$

Problema de valores en la frontera.- Es el formado por la ecuación diferencial junto con los valores fijados para la solución en dos puntos distintos $x = x_o$ y $x = x_1$:

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1$$

Problema mixto.- Es el formado por la ecuación diferencial junto con los valores fijados de la solución y su derivada en dos puntos distintos $x = x_o$ y $x = x_1$:

$$\alpha_1 y(x_0) + \alpha_2 y'(x_0) = 0, \qquad \beta_1 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) = 0, \qquad \alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{R}$$

5 Existencia y unicidad de un PVI

Las condiciones de existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial vienen dadas por el siguiente teorema:

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.- Si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en un intervalo (a,b), si x_o es un punto cualquiera de (a,b) y si y_0 e y_1 son números cualesquiera, entonces la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ tiene solución única, $y(x)$, en este intervalo, cumpliendo $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$.

Ejemplo: Se considera el problema de valor inicial siguiente

$$\begin{cases} x^2 y'' + y = x \\ y(1) = 2 \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

Vamos a ver que se puede asegurar que solo hay una curva solución de este problema de valor inicial.

Solución La ecuación diferencial se puede escribir $y'' + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{x}{x^2}$ donde

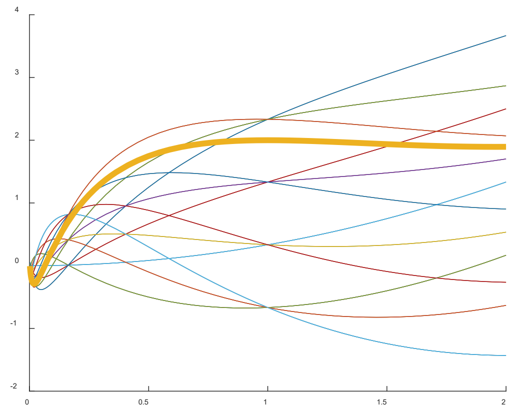
$$p(x) = 0 \qquad q(x) = \frac{1}{x^2} \qquad r(x) = \frac{1}{x}$$

Estas funciones son continuas para todo x real distinto de cero. Por lo tanto, son continuas en un entorno del punto $x_o = 1$. Aplicando el teorema de existencia y unicidad se puede probar que existe una única solución pasando por el punto (1,2) y con pendiente 0 en dicho punto.

Buscando la solución en Matlab y representando la familia de curvas solución general y la solución que satisface el problema de valor inicial.

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

```
syms y(x) C1 C2
ecuacion=diff(y,x,2)==-y/x^2+1;
sol(x,C1,C2)=dsolve(ecuacion)
hold on
for k1=0:2
    for k2=-1:2;
        fplot(sol(x,k1,k2),[0,2])
    end
end
cond1=y(1)==2;der(x)=diff(y,1);cond2=der(1)==0;
sol1(x)=dsolve(ecuacion,cond1,cond2)
fplot(sol1(x),[0 2], 'Linewidth',4)
hold off
```



6 Solución general de una ecuación lineal de segundo orden

TEOREMA.- Si se denota por y_p cualquier solución particular de la ecuación completa y por y_h la solución general de la homogénea asociada, entonces la solución general de la completa es: $y = y_p + y_h$

Así pues, a la hora de resolver una ecuación diferencial lineal debemos resolver dos problemas:

- encontrar la ecuación general de la homogénea asociada y
- encontrar una particular de la completa.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS

Consideramos en este apartado las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

7 Soluciones

Comenzaremos observando que cualquier combinación lineal de dos soluciones de la ecuación homogénea, es también solución. En efecto, si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

la función $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ lo es también (para comprobarlo basta derivar $y(x)$ y sustituir en la ecuación).

El hecho de que en la función $y(x)$ así construida estemos incluyendo dos constantes C_1 y C_2, debe hacernos pensar que si sabemos encontrar $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tendremos ya la solución general de la homogénea: estamos incluyendo los dos grados de libertad que debe presentar toda solución general de una ecuación lineal de segundo orden. Por supuesto, esto será así siempre que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ no sean proporcionales, es decir siempre que sean linealmente independientes.

Funciones linealmente independientes.- El conjunto de funciones

$$\left\{y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots, y_n(x)\right\}$$

son linealmente independientes en el intervalo $\left[a,b\right]$, si la ecuación

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0$$

admite como única solución $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ en $\left[a,b\right]$.

Sistema fundamental de soluciones.- La pareja de soluciones $\left\{y_1(x),\ y_2(x)\right\}$, forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, en $\left(a,b\right)$ si son linealmente independientes en $\left(a,b\right)$.

En el caso de dos funciones, $\left\{y_1(x),\ y_2(x)\right\}$, serán linealmente dependientes si existe una constante k tal que $y_1(x) = k\ y_2(x)$ y linealmente independientes si el cociente $y_1(x) / y_2(x)$ es una función no constante de x. En la práctica es frecuente estudiar la dependencia lineal a través del Wronskiano.

Wronskiano de un conjunto de funciones.- Se llama Wronskiano del conjunto de funciones $\left\{y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots, y_n(x)\right\}$ al determinante funcional:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1} & y_2^{(n-1} & \ldots & y_n^{(n-1} \end{vmatrix}$$

Ejemplo: Calcular el wronskiano del conjunto de funciones $\left\{\cos\left(x\right), sen\left(x\right)\right\}$

$$W(\cos\left(x\right), sen\left(x\right)) = \begin{vmatrix} \cos\left(x\right) & sen\left(x\right) \\ -sen\left(x\right) & \cos\left(x\right) \end{vmatrix} = \cos^2\left(x\right) + sen^2\left(x\right) = 1$$

TEOREMA (**Propiedad del Wronskiano de soluciones**).- Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones de la ecuación homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en el intervalo (a,b), siendo $p(x)$ y $q(x)$ continuas en (a,b).

- Estas soluciones son linealmente dependientes si y solo si el wronskiano es idénticamente nulo en (a,b)
- *Estas soluciones* son linealmente independientes si y solo si $W(y_1,y_2) \neq 0$ para todo x en (a,b).

Ejemplo: Consideremos la EDO lineal homogénea $y'' + y = 0$. Es fácil ver que $y_1 = \cos(x)$, $y_2 = sen(x)$ son soluciones de esa ecuación diferencial. Como hemos visto en el ejemplo anterior

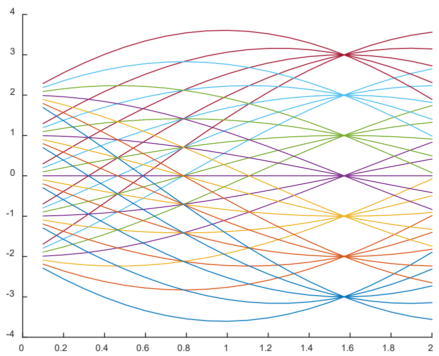
$$W\left(\cos(x), sen(x)\right) = 1 \neq 0$$

Por lo tanto, son soluciones linealmente independientes en $\mathbb{R}$ de la EDO $y'' + y = 0$.

TEOREMA (**Solución general de la e. d. lineal homogénea de segundo orden**).- Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en el intervalo (a,b), siendo $p(x)$ y $q(x)$ continuas en (a,b). Entonces la solución general de esa ecuación en (a,b) es $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Esto significa que el problema de encontrar la solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden está resuelto si se han encontrado dos soluciones no proporcionales. Los resultados de los teoremas anteriores, son generalizables al caso de una ecuación lineal homogénea de orden n.

Ejemplo: Teniendo en cuenta que $y_1 = \cos(x)$, $y_2 = sen(x)$ son soluciones linealmente independientes de $y'' + y = 0$, la solución general de esta ecuación diferencial lineal homogénea es $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 sen(x)$.



Ejemplo: Demostrar que e^x como e^{-x} son soluciones de la EDO $y''-y=0$. Demuestre que esas funciones son linealmente independientes y halle la solución general de la ecuación diferencial.

Solución

El determinante Wronskiano del conjunto $\left\{e^x, e^{-x}\right\}$ es

$$W\left(e^x, e^{-x}\right)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}=e^x\left(-e^{-x}\right)-e^{-x}\left(e^x\right)=-2\neq 0$$

Como el Wronskiano es distinto de cero el conjunto $\left\{e^x, e^{-x}\right\}$ es linealmente independiente y forman un conjunto fundamental de soluciones. La solución general es $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

8 Reducción de orden

Por reducción de orden entendemos el proceso por el cual, dada una solución $y_1(x)$ de la ecuación

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

se encuentra otra solución $y_2(x)$, de manera que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son independientes. En lo que sigue, supondremos que las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son continuas.

Si $y_1(x)$ es una solución de una ecuación lineal homogénea de orden 2, entonces la sustitución

$$y_2(x)=v(x)y_1(x)$$

la reduce a una de primer orden. Descripción del método:

1. Se escribe $y_2(x)=v(x)y_1(x)$, siendo el objetivo encontrar $v(x)$.
2. Se deriva dos veces $y_2(x)=v(x)y_1(x)$ y se impone que se verifique la ecuación homogénea: $y''+p(x)y'+q(x)y=0$
3. Se agrupan los términos en $v''(x)$ (sólo hay uno), en $v'(x)$ y en $v(x)$.
4. El término en $v(x)$ debe anularse por ser $y_1(x)$ solución, luego resulta una ecuación de primer orden[1] en $v'(x)$, de la cual se obtiene esta función.
5. Se integra $v'(x)$ para encontrar $v(x)$ y con ella la solución $y_2(x)$ requerida.

Ejemplo. Suponiendo que $y_1(x)=x^{-2}$ es solución de la ecuación diferencial $x^2y''-7xy'-20y=0$, encontrar la solución general en el intervalo $\left(0,a\right)$. Es fácil ver que $y_1(x)=x^{-2}$ cumple $x^2y_1''-7xy_1'-20y_1=0$, ya que $y'_1(x)=-2x^{-3}$, $y''_1(x)=6x^{-4}$.

[1]De aquí el nombre del método: para encontrar la solución de una de segundo se resuelve una de primer orden.

Para obtener una solución linealmente independiente consideramos una solución de la forma $y_2(x)=x^{-2}v(x)$. Se tendrá

$$y_2(x)=x^{-2}v(x) \qquad\qquad y'_2(x)=-2x^{-3}\ v(x)+x^{-2}v'(x)$$

$$y''_2(x)=6x^{-4}\ v(x)-2x^{-3}v'(x)-2x^{-3}v'(x)+x^{-2}v''(x)$$

Sustituyendo

$$x^2y_2''-7xy_2'-20y_2=0$$

$$x^2\left[6x^{-4}\ v(x)-4x^{-3}v'(x)+x^{-2}v''(x)\right]-7x\left[-2x^{-3}v(x)+x^{-2}v'(x)\right]-20x^{-2}v(x)=0$$

$$v''(x)+v'(x)\left[-4x^{-1}-7x^{-1}\right]+v(x)\underbrace{\left[6x^{-2}+14x^{-2}-20x^{-2}\right]}_{=0}=0$$

$$v''(x)-\frac{11}{x}v'(x)=0\Rightarrow\frac{v''(x)}{v'(x)}=\frac{11}{x}\Rightarrow\log v'(x)=11\log x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v'(x)=x^{11}\Rightarrow v(x)=\frac{x^{12}}{12}$$

Por lo tanto, $y_2(x)=x^{-2}\dfrac{x^{12}}{12}=\dfrac{x^{10}}{12}$. La solución general entonces de la ecuación diferencial es

$$y(x)=C_1x^{-2}+C_2x^{10}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS

Como ya hemos visto, son ecuaciones de la forma

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$$

En esta sección describiremos el método de variación de constantes para determinar una solución particular de esta ecuación. Previamente se puede aplicar el principio de superposición para desglosar la resolución de una ecuación de este tipo en procesos más sencillos.

8 Principio de superposición

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN.- Si $y_1(x)$ es solución de

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=r_1(x)$$

e $y_2(x)$ es solución de

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=r_2(x)$$

entonces $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)$ es solución de

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=\alpha_1r_1(x)+\alpha_2r_2(x)$$

Ejemplo: Se tiene que

- $y_1 = -4x^2$ es solución particular de $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8$
- $y_2 = e^{2x}$ es solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$

Por lo tanto, $y_3 = y_1 + y_2 = -4x^2 + e^{2x}$ es solución de $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x}$

9 Método de variación de constantes

Con este método podremos encontrar una solución particular para una ecuación lineal no homogénea, siempre que se conozca el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.

- La idea, que da nombre al método, es sustituir las constantes de la familia solución general de la homogénea $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ por funciones, para hallar una solución particular de la forma $y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$
- Puesto que deben hallarse dos incógnitas, necesitaremos una condición añadida, que además permita simplificar los cálculos; esta condición es

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \qquad (1)$$

- El primer paso del desarrollo del método consiste en derivar dos veces $y_p(x)$ e imponer que verifique la ecuación: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$; de ahí se obtendrá la ecuación en $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$ siguiente

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = r(x) \qquad (2)$$

- Después, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) en las incógnitas $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$; este sistema siempre tiene solución única puesto que las soluciones y_1 e y_2 son no proporcionales.
- Por último se integran $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$ para obtener la solución $y_p(x)$ buscada.

Ejemplo: Consideremos la ecuación diferencial $y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 1}$. En la sesión 2 de la semana anterior se demostró que la solución general de la homogénea asociada es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Vamos a encontrar la solución particular utilizando el método de variación de las constantes.

Para encontrar una solución particular de la completa se considera una solución particular de la forma

$$y_p = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x} \text{ considerando que se cumple } \boxed{C'_1(x) e^x + C'_2(x) e^{-x} = 0}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, se tendrá que cumplir

$$y_p'' - y_p = \frac{1}{e^x + 1}$$

Como

$$y'_p = C'_1(x)e^x + C_1(x)e^x + C'_2(x)e^{-x} - C_2(x)e^{-x} = C_1(x)e^x - C_2(x)e^{-x}$$

$$y''_p = C_1'(x)e^x + C_1(x)e^x - C'_2(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-x}$$

al sustituir en el ecuación diferencial

$$C_1'(x)e^x + C_1(x)e^x - C'_2(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-x} - C_1(x)e^x - C_2(x)e^{-x} = x$$

$$\boxed{C_1'(x)e^x - C'_2(x)e^{-x} = \frac{1}{e^x+1}}$$

Para encontrar se resuelve el sistema

$$\begin{cases} C'_1(x)e^x + C'_2(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C'_2(x)e^{-x} = \dfrac{1}{e^x+1} \end{cases}$$

Este sistema se resuelve utilizando la regla de Cramer suponiendo $C'_1(x)$ y $C'_2(x)$ como incógnitas. Se tendrá,

$$C'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \dfrac{1}{e^x+1} & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-x}}{2(e^x+1)} \Rightarrow C_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{2(e^x+1)}dx \underbrace{=}_{\substack{Hacer \\ cambio \\ e^x=t}} \frac{1}{2}\log(e^x+1) - \frac{e^{-x}}{2} - \frac{x}{2}$$

$$C'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{1}{e^x+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{e^x}{-2(e^x+1)} \Rightarrow C_2(x) = \int \frac{e^x}{-2(e^x+1)}dx = -\frac{\log(e^x+1)}{2}$$

Sustituyendo en $y_p = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$ se obtendrá la solución particular

$$y = \left(\frac{1}{2}\log(e^x+1) - \frac{e^{-x}}{2} - \frac{x}{2}\right)e^x - \frac{\log(e^x+1)}{2}e^{-x} = \log(e^x+1)\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{x}{2}e^x - \frac{1}{2}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEN 2

Estas ecuaciones son un caso particular de las de coeficientes variables, sin embargo, tienen su propio método de resolución, tanto para obtener la ecuación general de la homogénea asociada, como para localizar una solución particular de la completa.

10 Ecuaciones lineales de coeficientes constantes

Estas ecuaciones son de la forma: $y''(x)+py'(x)+qy(x)=R\left(x\right) \quad con \;\; p,q \in \mathbb{R}$

11 Ecuaciones lineales de coeficientes constantes homogéneas

En esta sesión resolveremos la ecuación diferencial homogénea y en la siguiente cómo obtener la solución particular de la completa.

La forma general de las ecuaciones de este tipo es

$$y''(x)+py'(x)+qy(x)=0 \quad con \;\; p,q \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Introducción:
https://es.khanacademy.org/math/differential-equations/second-order-differential-equations/linear-homogeneous-2nd-order/v/2nd-order-linear-homogeneous-differential-equations-2

*Definición (**Ecuación característica**).- Se llama ecuación característica de la ecuación* $y''(x)+py'(x)+qy(x)=0$*, a la ecuación algebraica asociada*: $r^2+pr+q=0$

Conociendo las raíces de esta ecuación podemos formar la solución general de (3). Según que p^2-4q sea positivo, nulo o negativo, nos encontraremos con tres situaciones diferentes:

CASO 1.- La ecuación característica tiene dos raíces reales distintas, r_1 y r_2:

Entonces el sistema fundamental de soluciones es $y_1(x)=e^{r_1x} \;\; , y_2(x)=e^{r_2x}$

y la solución general será: $y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

CASO 2.- La ecuación característica tiene una raíz real doble, r:

Entonces el sistema fundamental de soluciones [2] es $y_1(x)=e^{rx} \;\; , y_2(x)=xe^{rx}$

y la solución general será: $y(x)=e^{rx}(C_1+C_2x)$

CASO 3.- La ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas, $r_1=a+bi$ y $r_2=a-bi$:

[2]La segunda solución se encuentra por el método de reducción de orden.

Entonces el sistema fundamental de soluciones es:

$$y_1(x) = e^{ax}\cos bx \quad , y_2(x) = e^{ax}\,\mathrm{sen}\, bx$$

y la solución general será: $y(x) = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\,\mathrm{sen}\, bx)$

Ejemplo: Supongamos la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$. Para llegar al polinomio característico, basta considerar que se buscan soluciones de la forma e^{rx}. Si e^{rx} es solución de la ecuación diferencial se tendrá que cumplir

$$r^2e^{rx} - 5re^{x} + 6e^{rx} = 0 \underset{e^{rx}\neq 0}{\Rightarrow} r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r-2)(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 3$$

Entonces e^{2x}, e^{3x} son solución de la ecuación diferencial de coeficientes constantes. Además, se puede comprobar que son linealmente independientes, por lo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

Nota: Estamos en el caso 1, donde el polinomio característico tiene dos raíces reales distintas.

Ejemplo: Supongamos la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$. Para llegar al polinomio característico, basta considerar que se buscan soluciones de la forma e^{rx}. Si e^{rx} es solución de la ecuación diferencial se tendrá que cumplir

$$r^2e^{rx} + 2re^{x} + e^{rx} = 0 \underset{e^{rx}\neq 0}{\Rightarrow} r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1\ (doble)$$

Entonces $y_1 = e^{x}$ sería solución de la ecuación diferencial de coeficientes constantes. Como necesitamos otra solución linealmente independiente consideramos $y_2 = e^{x}v(x)$. Es fácil ver que utilizando el método de reducción de orden $v(x) = x$, y por tanto, $y_2 = xe^{x}$.

La solución general de la ecuación diferencial será entonces

$$y = C_1e^{x} + C_2xe^{x}$$

Nota: Estamos en el caso 2, donde el polinomio característico tiene una raíz real doble.

Ejemplo: Supongamos la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 5y = 0$. Para llegar al polinomio característico, basta considerar que se buscan soluciones de la forma e^{rx}. Si e^{rx} es solución de la ecuación diferencial se tendrá que cumplir

$$r^2e^{rx} + 4re^{x} + 5e^{rx} = 0 \underset{e^{rx}\neq 0}{\Rightarrow} r^2 + 4r + 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = -2 \pm i$$

Entonces $y_1 = e^{(-2+i)x}$, $y_1 = e^{(-2-i)x}$ puede demostrarse que son linealmente independientes y que la solución general será una combinación lineal de ellas. Teniendo en cuenta que

$$y_1 = e^{(-2+i)x} = e^{-2x}(\cos x + isenx)$$

$$y_2 = e^{(-2-i)x} = e^{-2x}(\cos x - isenx)$$

También sería un sistema fundamental $\left\{e^{2x}\cos x, e^{2x}senx\right\}$, lo que permite no trabajar con números complejos.

La solución general de la ecuación diferencial será entonces

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x} senx$$

Nota: Estamos en el caso 3, donde el polinomio característico tiene dos raíces complejas conjugadas.

12 Ecuaciones lineales de coeficientes constantes no homogéneas

La forma general de las ecuaciones de este tipo es

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = R(x)$$

Sabemos que la solución de esta ecuación se obtiene mediante la suma $y_p + y_h$ donde y_h es la solución general de la homogénea asociada, que ya podemos calcular, e y_p es una solución particular de la completa. Esta solución particular puede calcularse a partir de la general de la homogénea, por el método de coeficientes indeterminados o por el método de variación de constantes descrito en el apartado de las ecuaciones lineales de coeficientes variables.

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este método se aplica únicamente cuando los coeficientes son constantes; su utilización permite construir una solución particular de la ecuación

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = R(x)$$

cuando $r(x)$ es combinación lineal o producto de funciones polinómicas, exponenciales, cosenos y senos.

La idea del método es buscar una solución particular del mismo tipo que el término $R(x)$, puesto que la parte izquierda de la ecuación es únicamente una combinación lineal de $y(x)$ y sus derivadas.

Es imprescindible haber resuelto la ecuación característica de la homogénea asociada y disponer ya del sistema fundamental de soluciones de esa ecuación.

El primer paso del método es el diseño de una propuesta de solución particular, $y_p(x)$, del mismo tipo que la función $R(x)$ (Ver cuadro). Esta función $y_p(x)$ dependerá de unos coeficientes aún por determinar[3].

El segundo paso es el cálculo de esos coeficientes, para lo cual hay que derivar dos veces $y_p(x)$ e imponer que cumpla la ecuación; se obtendrá un sistema lineal de ecuaciones de la misma dimensión que el número de coeficientes a determinar.

[3] De aquí el nombre de este método.

En el diseño de $y_p(x)$ es muy importante tener en cuenta que no debe contener ningún sumando que sea solución de la homogénea asociada.

En virtud del principio de superposición, a una suma de funciones $R(x)$ de las del cuadro, le corresponderá una suma de las soluciones propuestas para cada sumando.

Lo mismo puede indicarse si el segundo término de la ecuación es producto de funciones $R(x)$ de las del cuadro, teniendo en cuenta que habrá que añadir un único factor x^s.

$R(x)$	$y_p(x)$
ae^{kx}	$Ax^s e^{kx}$
$b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$	$x^s(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$
$a_0 \cos kx + a_1 \operatorname{sen} kx$	$x^s(A_0 \cos kx + A_1 \operatorname{sen} kx)$
	en todos los casos s es el menor entero no negativo tal que ningún sumando de $y_p(x)$ sea solución de la homogénea asociada.

Cuadro 1.- Diferentes soluciones particulares según diferentes valores de $R(x)$.

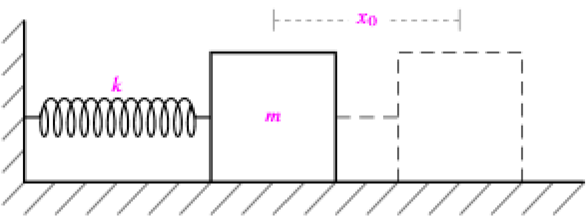
Hemos visto que en el caso de las ecuaciones de coeficientes constantes la búsqueda de la solución particular puede hacerse por dos métodos: la ventaja del de variación de constantes respecto al de coeficientes indeterminados es que no restringe el tipo de $R(x)$; su desventaja es que conlleva integración, lo que en muchos casos complica su aplicación respecto al de coeficientes indeterminados, en el que no se calculan primitivas.

APLICACIONES: VIBRACIONES EN SISTEMAS MECÁNICOS

Una masa m está sujeta a una pared mediante un resorte o muelle. Este muelle ejerce sobre el objeto una fuerza de recuperación, F_m. Las vibraciones del objeto se producen a consecuencia de la pérdida del equilibrio del sistema; las fuerzas presentes en el sistema tenderán a recuperar el equilibrio. Dependiendo de cuáles sean esas fuerzas se presentan distintos casos.

13 Vibraciones armónicas simples no amortiguadas

Supongamos que la superficie es lo suficientemente lisa como para despreciar la fuerza de rozamiento.



La única fuerza presente en el sistema es la del muelle[4]: $F_m = -k\ x(t)$ donde k es una constante positiva que depende de la rigidez del muelle.

La segunda ley de Newton establece que la fuerza total que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por su aceleración, esto es

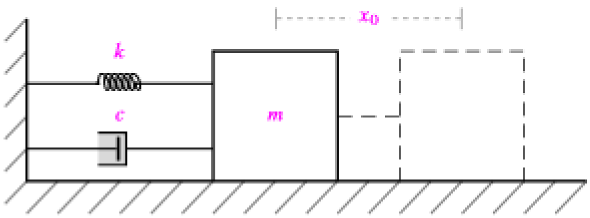
$$mx''(t) = F_m$$

El problema de valor inicial que modela las vibraciones del objeto es

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,\ \ x(0) = x_o,\ x'(0) = 0$$

14 Vibraciones armónicas amortiguadas

En el sistema anterior consideremos que se agrega un sistema mecánico (amortiguador) que tiene el efecto de reducir la velocidad cuando el sistema se encuentra vibrando. El amortiguador ejerce una fuerza dependiendo de la velocidad de la masa.



Por simplicidad supongamos que esta fuerza en magnitud es proporcional a la rapidez, entonces la fuerza que ejerce el amortiguador es

$$F_c = -c \cdot x'(t)\ \ (c > 0)$$

Observad que el signo negativo indica que la fuerza de amortiguación va en sentido contrario a la del cuerpo. La fuerza total ejercida por la masa es $F_m + F_c$.

La ecuación para este sistema[5] es

$$m\,x''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = 0$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial es

$$m\,r^2 + c\,r + k = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuación son:

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad\qquad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

El signo del radicando $c^2 - 4mk$ determina el tipo de movimiento del sistema:

---

[4] La fuerza que actúa sobre un objeto causada por un resorte tiene una magnitud proporcioanl a la elongación del resorte a partir de su longitud natural y de sentido opuesto a la elongación (ley de Hooke)
[5] La misma ecuación diferencial modela el sistema masa-resorte colocado verticalmente

1. Movimiento sobreamoriguado $c^2 - 4mk > 0$. En este caso

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Las dos funciones exponenciales son decrecientes y el sistema tiende rápidamente a su posición de equilibrio.

2. Movimiento críticamente amortiguado $c = \sqrt{4mk}$. En este caso

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{r_1 t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{c}{2m} t}$$

La función posición contiene un término exponencial decreciente multiplicada por una función lineal en el tiempo. Se espera que la posición decrezca hacia la posición de equilibrio sin vibrar, la manera qn la que lo haga dependerá de las condiciones iniciales.

3. Movimiento subamortiguado $c^2 - 4mk > 0$. En este caso

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m} t} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t \right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t \right) \right)$$

El sistema oscilará alrededor de la posición de equilibrio. Como el factor exponencial es decreciente, se espera que la amplitud de vibración sea cada vez más pequeña.

15 Vibraciones forzadas

Además de las fuerzas de recuperación y de rozamiento sobre el sistema puede actuar una fuerza externa dada por $F_e = f(t)$. Se tendrá entonces

$$mx''(t) = F_m + F_c + F_e$$

es decir,

$$mx''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = f(t)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEAS DE ORDEN N

16 Soluciones

En general, para una ecuación lineal de orden n de la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

la ecuación característica, es la siguiente ecuación de grado n:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

Además, la solución general de la ecuación se escribe como una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes, es decir, en base a un sistema fundamental de n soluciones. Generalizando lo expuesto para orden 2, veamos qué relación guardan las raíces de la ecuación característica con las n soluciones que forman el sistema fundamental:

1. A cada raíz real r de multiplicidad s, le corresponden las soluciones independientes

   $$e^{rx}, \; xe^{rx}, \; x^2 e^{rx}, \ldots, x^{s-1} e^{rx}$$

2. A cada par de raíces complejas conjugadas $a \pm bi$ de multiplicidad s, le corresponden las soluciones independientes

   $$e^{ax} \cos bx, \; e^{ax} \operatorname{sen} bx, \; xe^{ax} \cos bx, \; xe^{ax} \operatorname{sen} bx, \ldots, x^{s-1} e^{ax} \cos bx, \; x^{s-1} e^{ax} \operatorname{sen} bx$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

17 Definiciones básicas

Un sistema de orden 2 con condiciones iniciales tiene la forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1\left(t, x_1, x_2\right) & \quad x_1\left(t_o\right) = y_1 \\ x_2'(t) = f_2\left(t, x_1, x_2\right) & \quad x_2\left(t_o\right) = y_2 \end{cases}$$

En el caso de que f1 y f2 sean lineales entonces el sistema se denominará lineal

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}\left(t\right) x_1\left(t\right) + a_{12}\left(t\right) x_2\left(t\right) + g_1\left(t\right) & \quad x_1\left(t_o\right) = y_1 \\ x_2'(t) = a_{21}\left(t\right) x_1\left(t\right) + a_{22}\left(t\right) x_2\left(t\right) + g_2\left(t\right) & \quad x_2\left(t_o\right) = y_2 \end{cases}$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\left(t\right) & a_{12}\left(t\right) \\ a_{21}\left(t\right) & a_{22}\left(t\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

18 Resolución de sistemas lineales

El método que desarrollaremos para la resolución analítica de un sistema de ecuaciones lineales de coeficientes constantes consiste en eliminar una de las variables junto con su derivada y resolver la ecuación diferencial de segundo orden que resulta del proceso de eliminación. Sustituyendo en el sistema la solución obtenida, se calcula la función que falta.

Denotamos por D la derivación respecto de x, con D^2 la derivación respecto de x dos veces y, en general, por D^n la derivación respecto de x, n veces.

Así,

$$y'' + py' + qy = D^2y + pDy + qy = \left(D^2 + pD + q\right)y$$

Este operador permite utilizar técnicas algebraicas en la eliminación.

Por ejemplo, sea el sistema $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 4x(t) - 7y(t) \end{cases}$

Reescribimos el sistema utilizando el operador D

$$\begin{cases} (D-3)x + 4y = 0 \\ -4x + (D+7)y = 0 \end{cases}$$

En el sistema algebraico obtenido, se elimina una de las variables. Si multiplicamos la primera ecuación por $(D+7)$ y la segunda por -4, se elimina la variable y, obteniéndose la ecuación de segundo orden

$$x''(t) + 4x'(t) - 5x = 0$$

Esta ecuación se resolverá mediante la ecuación característica. Una vez obtenida $y\left(t\right)$, se substituye en la primera ecuación del sistema para calcular $y\left(t\right)$.

Ejercicios propuestos

1 Halla, mediante eliminación de los parámetros, la e.d.o. de segundo orden cuya solución general es la familia

$$y = C_1x^2 + \frac{C_2}{x}$$

Solución: $x^2y'' - 2y = 0$

2 Utilizar el teorema de existencia para discutir la existencia y unicidad de la solución de los siguientes problemas de valor inicial:

a) $\begin{cases} x^2y'' + y = \cos x \\ y(1) = y_0\ , \quad y'(1) = y_1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} e^xy'' - \dfrac{1}{x-3}y' + y = \log x \\ y(1) = y_0\ , \quad y'(1) = y_1 \end{cases}$

donde y_0 e y_1 son constantes reales.

Solución: a) Tiene solución única definida en $\left(0,\infty\right)$; b) Tiene solución única definida en $\left(0,3\right)$.

3 En los siguientes problemas de valor inicial, determinar si se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones lineales y en caso afirmativo definir el intervalo donde se garantiza la existencia de solución única.

a. $y'' + yy' = x^2 - 1$;
$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

b. $(1-x)y'' + xy' - 2y = \operatorname{sen} x$;
$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

Solución: a) No se puede aplicar el teorema de existencia porque no es un problema lineal; b) La solución es única y está definida en $(-\infty, 1)$

4 a. Demostrar que $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ e $y_2(x) = x^3$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ en el intervalo $\left(0,\infty\right)$.

b. Probar que son soluciones linealmente independientes en $\left(0,\infty\right)$.

c. Escribir la solución general.

Solución: c) $y = C_1 \dfrac{1}{x} + C_2 x^3$

5 Determinar si las siguientes funciones pueden ser wronskianos en $(-1,1)$ de dos soluciones de alguna ecuación lineal homogénea de segundo orden con $p(x)$ y $q(x)$ continuas.

a) $w(x) = -3e^{-2x}$ b) $w(x) = x^2$

c) $w(x) = \dfrac{1}{x+1}$ d) $w(x) = 0$

e) ¿Y la función $w(x) = 3(x-1)^2$ en el intervalo $(0,2)$?

Solución: a) Sí, b) No, c) Sí, d) Sí, e) No.

6 Considerar dos funciones linealmente independientes de la forma e^{ax} y encontrar la ecuación diferencial homogénea cuya solución general sea una combinación lineal de ambas.

7 La expresión

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

se llama familia biparamétrica de curvas porque cada par de valores reales (C_1, C_2) proporciona una curva diferente.

a. Comprueba que todas las curvas de la familia anterior verifican la relación $y'' = y$.
b. Representa con Matlab, en el intervalo $[-2,2]$, una muestra de curvas de esa familia y comprueba gráficamente que son cóncavas en el semiplano $y > 0$ y convexas en el semiplano $y < 0$. ¿Presentan puntos de inflexión? Toma para C_1 y C_2 los valores $\{-2,-1,0,1,2\}$.
c. Modifica el programa anterior para que dibuje una muestra de curvas de la familia
$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$
d. omprueba que todas las curvas de esta familia son soluciones de $y'' = -y$

8 Partimos de nuevo de la familia de curvas $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ que es la solución general de $y'' = y$, no sólo porque cada una de las curvas es solución de la ecuación (como comprobaste antes), sino también porque para cada par de condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ existen unos valores adecuados de C_1 y C_2 de forma que la curva que los lleva cumple esas condiciones.

a. Representa con Matlab, en el intervalo $[-1,1]$, una muestra de soluciones de $y'' = y$, primero fijando un punto de paso, $P(0,2)$, y dejando variar la pendiente y después fijando una pendiente, $y'(0) = 2$, y dejando variar el punto de paso.
b. Adapta el fichero anterior para que repita el mismo proceso para la familia de curvas $y(x) = e^x(C_1 + C_2 x)$. Para ello debes primero encontrar las fórmulas que dan C_1 y C_2 en función de $y(0)$ e $y'(0)$.
c. Repite el apartado anterior para la familia de curvas $y(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

9 Los coeficientes de la familia de curvas

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

también pueden ajustarse para que la función pase por dos puntos dados. Éstas son las condiciones de frontera.

a. Representa, en el intervalo $[0,2]$, una muestra de cinco curvas de la familia pasando por el punto $P(0,2)$, es decir cumpliendo $y(0) = 2$, y luego cinco curvas pasando por $Q(2,2)$, es decir, cumpliendo que $y(2) = 2$. Adapta ese fichero para que repita el mismo proceso para la familia de curvas
$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$
y los puntos $P(0,2)$ y $Q(\pi/2,1)$. Para ello debes primero encontrar las fórmulas que dan C_1 y C_2 en función de $y(0)$ e $y(\pi/2)$.

10 Sabiendo que la función dada, $y_1(x)$, es solución de la ecuación, encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

a. $(x-1)y'' - xy' + y = 0$, $y_1(x) = x$

b. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y_1(x) = x$

c. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $y_1(x) = x^2$

Comprueba los resultados con Matlab, utilizando `dsolve`.

Solución: a) $y(x) = C_1x + C_2e^x$

b) $y(x) = C_1x + C_2x^{-2}$

c) $y(x) = C_1x^2 + C_2x^{-2}$

11 Dada la ecuación diferencial $x^2y'' - 4xy' + 6y = \dfrac{1}{x}$. Se pide

a. Demostrar que $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.

b. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

Solucion b) $y_1 = \dfrac{1}{12x} + C_1x^2 + C_2x^3$

12 Dada la ecuación diferencial $x^2y'' - xy' + y = 4x\log x$. Se pide

a. Demostrar que $y_1 = x$, $y_2 = x\log x$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.

b. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

Solucion b) $y_1 = \dfrac{2}{3}x \cdot \log^3 x + C_1x + C_2x\log x$

13 Para la siguiente ecuación, encuentra la solución particular que se obtiene mediante el método de variación de constantes

$$(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 1$$

sabiendo que la solución general de la homogénea asociada es

$$y_h(x) = C_1x + C_2(1+x^2)$$

Comprueba los resultados con Matlab, utilizando `dsolve`.

Solución:

$$y_p(x) = -x^2 + x\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \\ + \frac{x^2+1}{2}\log|x^2-1|$$

14 Efectúa el cambio de variable $x = e^t$ para transformar las ecuaciones siguientes en otras de coeficientes constantes y resuelve éstas últimas.

a. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

b. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^3$

Comprueba los resultados con Matlab, utilizando `dsolve`.

Solución: a) $y(x) = x^2(C_1 + C_2\log x)$

b) $y(x) = x^3(C_1 + \log x) + C_2x^2$

15 Halla la solución particular de los siguientes problemas de valor inicial

a. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 13$

b. $y'' + 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

c. $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = -1$

Comprueba los resultados con Matlab, utilizando `dsolve`.

Solución: a) $y(x) = e^{5x}(3-2x)$

b) $y(x) = e^{-3x}(2\cos 2x + 3\,\mathrm{sen}\,2x)$

c) $y(x) = 4e^{2x} + 3e^{-3x}$

16 Encuentra la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones lineales

a. $y'' + y' = -1/x$

b. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}\cos x$

c. $y'' - y = (e^x+1)^{-1}$

d. $y'' + y = 2x\,\mathrm{sen}\,x$

Comprueba los resultados con Matlab, utilizando `dsolve`.

Solución:

a) $y(x) = C_1 + C_2e^{-x} - \log x + e^{-x}\displaystyle\int \frac{e^x}{x}dx$

b) $y(x) = e^{-x}[C_1 + C_2x +$

$$+4x \operatorname{sen} x + (6 - x^2)\cos x$$

c) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} +$

$$+\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\log(e^x + 1) - \frac{1}{2}(xe^x + 1)$$

d) $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x +$

$$\frac{x}{2}\operatorname{sen} x + \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\cos x$$

17 Encuentra la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones lineales

a. $y'' + 3y' - 4y = x + 2$

b. $y'' + y' = 3x^2 - x$

c. $y'' - 2y' + 5y = 2e^{-x} + 3\operatorname{sen} x + 3x^2 - x$

d. $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}(x^3 - 5x^2)$

Solución

a. $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{11}{16}$

b. $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + x^3 - \dfrac{7x^2}{2} + 7x$

c. $y(x) = e^x\left(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x\right) + \dfrac{1}{4}e^{-x} +$

$$+\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\operatorname{sen} x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x - \frac{16}{125}$$

d. $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + e^{2x}\left(\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{9}{4}x - \dfrac{25}{8}\right)$

18 Halla la solución general de la siguiente ecuación, utilizando el método de coeficientes indeterminados para encontrar una particular de la ecuación completa

$$y'' + 9y = \operatorname{sen}^4 x$$

Nota: Debes escribir $\operatorname{sen}^4 x$ como combinación de cosenos.

Solución:

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x +$$
$$+\frac{1}{24} - \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{56}\cos 4x$$

19 Considerar una masa de 10 Kg. Que está unida a una pared una distancia de 0.02 m. y se suelta a partir del reposo, determinar la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, la frecuencia de oscilación, la amplitud, el ángulo de fase y las energías cinética y potencial en el tiempo t.

El problema que modela esta situación es: $10x'' + 10x = 0,\ x(0) = 0.02,\ x'(0) = 0$.

Solución: $x(t) = 0.02\cos t = 0.02\operatorname{sen}\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$w = 1 rad/seg.,\ T = 2\pi seg.,\ A = 0.02\, m.$, la frecuencia de oscilación $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}$ osc/seg (Hertz), el ángulo de fase es $\phi = \dfrac{\pi}{2}$,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0.002\operatorname{sen}^2 t,$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0.002\cos^2 t$$

20 Un resorte cuelga verticalmente de un techo, el resorte sufre una deformación en su longitud de un centímetro cuando se coloca una masa de 1.5 kg y después el sistema queda en equilibrio. Posteriormente se elonga una cantidad de 1.5 cm. y se suelta a partir del reposo. Determinar la constante del resorte, la posición y la velocidad de la masa en el tiempo $t \geq 0$. ¿Cuál es la frecuencia de oscilaciones de la masa y la amplitud del movimiento?

Nota: En la posición de equilibrio, la constante del resorte es: $k = \dfrac{mg}{\Delta l}$. Considerando como origen de coordenadas a la posición de equilibrio y la dirección positiva del eje vertical hacia abajo, entonces, la posición de la masa viene dada por la solución del problema de valor inicial

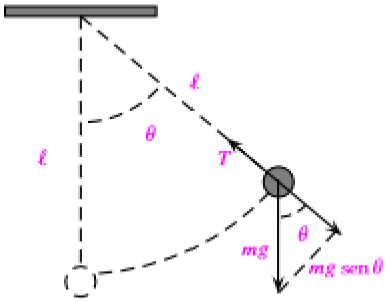
$$mx'' + kx = 0,\ x(0) = x_o,\ x'(0) = v_o$$

Solución: $\begin{array}{l} x(t) = 0.015\cos\left(\sqrt{980}\, t\right) \\ v(t) = 0.015\sqrt{980}\operatorname{sen}\left(\sqrt{980}\, t\right) \end{array}$

$w = \sqrt{980}\, rad/seg,\ f = \dfrac{\sqrt{980}}{2\pi} \approx 4.98$ oscilaciones en un segundo. La amplitud es $A = 0.015m$

21 Un péndulo de masa $m = 2kg$ y de longitud 2.45 m. está suspendido sobre un marco horizontal. El péndulo se levanta un ángulo de 10º y se suelta con una velocidad angular de -0.4 rad/seg. Se pide:

a. ¿cuántos ciclos (oscilaciones) completos habrá completado el péndulo después de 10 seg.?
b. ¿en qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con velocidad angular positiva por tercera vez?
c. ¿En qué instantes la masa alcanza sus desplazamientos extremos?
d. ¿Cuál es la posición de la masa del péndulo en cualquier tiempo?
e. ¿Cuál es la posición de la masa a los 10 seg.?



Nota: La ecuación diferencial del moviemiento es $\theta'' + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$. Suponiendo ángulos pequeños se puede suponer $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, obteniendo la ecuación diferencial

$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$.

Solución:

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18}\cos 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2t = A\operatorname{sen}(wt+\phi)$$

siendo $A = \sqrt{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}$,

$tg\phi = \dfrac{\pi/18}{-0.2}$, $\phi \approx 2.4242$, $w = 2$, $T = \pi$,

en 10 segundos se realizarán $10/\pi \approx 3$ ciclos,

$\theta(10) \approx -0.01$

22 Encontrar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a. $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 2x - y \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' + y = t^2 \\ y' - x = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' + y' + 2x = 0 \\ x' + y' - x - y = \operatorname{sen} t \end{cases}$

Solución: e.d.o. $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$;

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$$

Test de autoevaluación

1 Si en la ecuación $xy'' + y' = 9x^2$ se realiza el cambio de variable $x = e^t$, se obtiene la ecuación:

A) $y'' = 9e^{3t}$

B) $y'' = 9e^{2t}$

C) $y'' + 2y' = 9e^{3t}$

D) Ninguna de las anteriores.

2 Se considera la ecuación diferencial $y'' - y' = 0$. Justificar cuál de los conjuntos $\{y_1(x), y_2(x)\}$ son un sistema de soluciones linealmente independientes:

A) $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = e^x$

B) $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = e^x$

C) $y_1(x) = 1 + 2e^x$, $y_2(x) = \frac{1}{4}e^x$

D) Ninguna de las anteriores.

3 Dado el problema de valores en la frontera,

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi / 2) = 1$$

podemos afirmar que:

A) Una solución de este problema es $y = 0$.

B) Este problema no tiene solución.

C) Este problema tiene infinitas soluciones.

D) Ninguna de las anteriores.

4 Dada la ecuación diferencial,

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$$

podemos afirmar que una ecuación particular es de la forma:

A) $y_p = Ax^2$

B) $y_p = x^2e^{-x}$.

C) $y_p = ax^2 + bx + c$

D) Ninguna de las anteriores.

1	2	3	4
A	C	B	C

Ejercicios resueltos

DEFINICIONES BÁSICAS

1 Encontrar mediante eliminación de constantes, la ecuación diferencial de la familia $y = C_1x + C_2x^2$

Solución

Derivando la expresión dos veces, se tiene un sistema que nos permite despejar las constantes

$$\left.\begin{array}{l} y' = C_1 + 2C_2x \\ y'' = 2C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_2 = \frac{1}{2}y'' \\ C_1 = y' - y''x \end{array}\right\}$$

Así sustituyendo en la expresión inicial

$$y = \left(y' - y''x\right)x + \left(\frac{1}{2}y''\right)x^2 \Rightarrow x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

se obtiene la ecuación diferencial de la cual es solución la familia biparamétrica dada.

2 Demostrar que $y_1(x)=0$, $y_2(x)=x^2 \operatorname{sen}(x)$ son soluciones de la ecuación differencial $x^2 y''-4xy'+(x^2+6)=0$. ¿Contradice el teorema de existencia y unicddad de soluciones?

Solución

Es sencillo probar que $y_1(x)=0$ es solución de la ecuación, así como ver que $y_1(0)=y_1'(0)=0$.

Para comprobar que $y_2(x)=x^2 \operatorname{sen}(x)$ lo es, basta derivar

$$y'_2(x)=x^2\cos(x)+3x\operatorname{sen}(x)$$

$$y''_2(x)=4x\cos(x)+(2-x^3)\operatorname{sen}(x)$$

y susituir y_2, y_2', y_2'' en $x^2y''-4xy'+(x^2+6)=0$ para ver que se anula. Fácilmente se obtiene que $y_2'(0)=y_2''(0)=0$.

Para poder aplicar el teorema de existencia y unicidad, escribimos la ecuación de la forma.

$$y''-\frac{4}{x}y'+\left(1+\frac{6}{x^2}\right)y=0$$

Observando esta expresión, se deduce que el teorema no puede aplicarse porque $p(x)=\frac{-4}{x}$ y $q(x)=1+\frac{6}{x^2}$ no están definidas para x=0. Por lo tanto, no hay contradicción en la existencia de dos solucionjes pasando por el mismo punto con la misma pendiente en ese punto.

RESOLUCIÓN CON MATLAB

dsolve(ecuación,condiciones)

Devuelve la solución de la ecuación diferencial con las condiciones iniciales o de frontera especificadas.

```
syms y(x)
der(x)=diff(y);der2(x)=diff(y,x,2);
ecuacion=der2(x)-x*der(x)+y==0;
cond1=der(0)==1;cond2=der2(0)==0;
sol(x)=dsolve(ecuacion,cond1,cond2)
fplot(sol(x),[-3,3])
```

3 Halla y representa en $\left[-0.5,\ 0.5\right]$ la solución de los siguientes problemas de valor inicial, utilizando el comando `dsolve`:

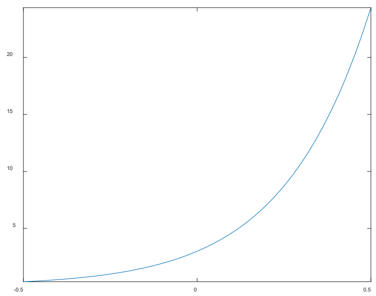
a) $y'' - 10y' + 25y = 0\,,\quad y(0) = 3\,,\ y'(0) = 13$

b) $y'' + 6y' + 13y = 0\,,\quad y(0) = 2\,,\ y'(0) = 0$

c) $y'' + y' - 6y = 0\,,\quad y(0) = 7\,,\ y'(0) = -1$

Solución a)

```
syms y(x)
eqn= diff(y,x,2)-10*diff(y,x)+25*y==0;
Dy=diff(y,x);
cond=[y(0)==3,Dy(0)==13]
sol(x)=dsolve(eqn,cond)
fplot(sol(x),[-0.5,0.5])
```



EDOS LINEALES

4 Determinar si la familia $y = C_1x + C_2x^2$ es solución general de la ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ en cualquier intervalo que no contenga al cero.

Solución

Para que una combinación lineal de $y_1\left(x\right) = x$ e $y_2\left(x\right) = x^2$ sea la solución general de la ecuación diferencial se tendrá que demostrar que son soluciones linealmente independientes.

- Soluciones. Se puede comprobar fácilmente que $y_1\left(x\right) = x$ e $y_2\left(x\right) = x^2$ verfican la ecuación, es decir, se cumple:

$$x^2y_1'' - 2xy_1' + 2y_1 = 0 \qquad\qquad x^2y_2'' - 2xy_2' + 2y_2 = 0$$

- Linealmente independientes. Calculando el wronskiano

$$W\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=x^2\neq 0 \quad para\ todo\ x\in\left[a,b\right],\ 0\notin\left[a,b\right]$$

se deduce que y son linealmente independientes en cualquier intervalo que no contenga al cero.

Constituyen por tanto un sistema fundamental de soluciones.

5

Encontrar la solución general de la ecuación $x^2y''-\left(x+2\right)xy'+\left(x+2\right)y=0$ sabiendo que $y_1\left(x\right)=x$ es solución de la misma.

Solución

Se debe buscar una solución independiente con $y_1\left(x\right)$ de la forma $y_2\left(x\right)=v\left(x\right)y_1\left(x\right)$. Derivando e imponiendo que $y_2\left(x\right)$ verifique la ecuación, se obtiene la expresión

$$x^2\left(vy_1''+2v'y_1+v''y_1\right)-\left(x+2\right)x\left(vy_1'+v'y_1\right)+\left(x+2\right)vy_1=0$$

donde se ha omitido, para mayor claridad, la dependencia de la x en las distintas funciones.

Agrupando los términos en v, v’ y v’’

$$v''\left(x^2y_1\right)+v'\left(2x^2y_1'-x\left(x+2\right)y_1\right)+v\left(x^2y_1''-\left(x+2\right)xy_1'+\left(x+2\right)y_1\right)=0$$

De esta forma observamos que el coeficiente env es nuelo por ser $y_1\left(x\right)$ solución de la ecuación $x^2y''-\left(x+2\right)xy'+\left(x+2\right)y=0$.

La expresión se reduce a

$$v''x^3+v'\left(2x^2-x^2\left(x+2\right)\right)=0 \qquad \Rightarrow \qquad v''-v'=0$$

que es una ecuación lineal de primer orden, cuya función incógnita es $v'\left(x\right)$. Resolviendo esta última ecuación, sabemos que

$$v'\left(x\right)=ke^x \qquad \Rightarrow \qquad v\left(x\right)=Ke^x+C$$

De esta expresión se puede obtener la forma general de $y_2\left(x\right)$,

$$y_2\left(x\right)=Kxe^x+Cx$$

Dado que basta encontrar una función independiente con $y_1\left(x\right)$, se hará K=1 y C=0 para concluir que podemos tomar como expresión de la solución general de la ecuación

$$y\left(x\right)=C_1x+C_2xe^x$$

6

Dada la ecuación diferencial $x^2y''+8xy'+12y=\dfrac{6}{x^2}$. Se pide

a) Demostrar que $y_1 = x^{-3}$, $y_2 = x^{-4}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.

b) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

Solución a)

Basta ver que $y_1 = x^{-3}$, $y_2 = x^{-4}$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea (cumplen la ecuación diferencial homogénea) y son linealmente independientes.

Solución b)

Como la ecuación diferencial es lineal $y''+\frac{8}{x}y'+\frac{12}{x^2}y=\frac{6}{x^4}$ la solución general será

$y_G = y_H + y_p$ siendo y_H solución general del homogéneo e y_p solución particular de la completa.

Por el primer apartado se tiene que $y_H = C_1x^{-3} + C_2x^{-4}$

Para obtener y_p se considera $y_p = C_1(x)x^{-3} + C_2(x)x^{-4}$ con la condición $C'_1(x)x^{-3} + C'_2(x)x^{-4} = 0$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se deberá cumplir:

$$\begin{cases} C'_1(x)x^{-3} + C'_2(x)x^{-4} = 0 \\ -3\,C'_1(x)x^{-4} - 4C'_2(x)x^{-5} = \dfrac{6}{x^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'_1(x)x^{-3} + C'_2(x)x^{-4} = 0 \\ -3\,C'_1(x) - 4C'_2(x)x^{-1} = 6 \end{cases}$$

$$C_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-4} \\ 6 & x^{-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{-3} & x^{-4} \\ -3 & -4x^{-1} \end{vmatrix}} = \frac{-6x^{-4}}{-x^{-4}} = 6 \quad \Rightarrow \qquad C_1(x) = 6x$$

$$C_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} x^{-3} & 0 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{-3} & x^{-4} \\ -3 & -4x^{-1} \end{vmatrix}} = \frac{6x^{-3}}{-x^{-4}} = -6x \Rightarrow \qquad C_2(x) = -3x^2$$

Se tiene que $y_p = 6x \cdot x^{-3} - 3x^2 \cdot x^{-4} = 3x^{-2}$.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es $y_G = C_1x^{-3} + C_2x^{-4} + 3x^{-2}$

7 Se consideran $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones de la ecuación $y''+x^2y'=1$. Determinar, justificadamente, si $-y_1(x)+2y_2(x)$ e $y_1(x)-2y_2(x)$ son también soluciones de la ecuación diferencial.

Solución

$y = -y_1\left(x\right) + 2y_2(x)$ sí es solución ya que

$$y'' + x^2 y' = -y_1'' - x^2 y_1' + 2y_2'' + 2x^2 y_2' = -1 + 2 = 1$$

$y = y_1\left(x\right) - 2y_2(x)$ no es solución ya que

$$y'' + x^2 y' = y_1'' + x^2 y_1' - 2y_2'' - 2x^2 y_2' = 1 - 2 = -1$$

8 Encontrar la solución general para la siguiente ecuación

$$\left(x^2 - 1\right) y'' - 2xy' + 2y = \left(x^2 - 1\right)^2$$

sabiendo que $y_1\left(x\right) = x$ es solución de la ecuación lineal homogénea asociada.

Solución

Se recurrirá a la reducción de orden para encontrar otra independiente con ella. Se considera

$$y_2\left(x\right) = xv\left(x\right) \quad \Rightarrow \quad y_2'\left(x\right) = xv'\left(x\right) + v\left(x\right) \qquad y_2'' = 2v'\left(x\right) + xv''\left(x\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{v''}{v'} = \frac{2}{x\left(x^2 - 1\right)} \quad \Rightarrow \quad v\left(x\right) = K\left(x + \frac{1}{x} + C\right)$$

de donde

$$y_2\left(x\right) = x^2 + 1 \Rightarrow \quad y_H\left(x\right) = c_1 x + c_2\left(x^2 + 1\right)$$

Una vez obtenida esta solución general de la homogénea, se buscará una particular de la completa. Se hará mediante variación de parámetros:

$$y_p\left(x\right) = c_1\left(x\right)x + c_2\left(x\right)\left(x^2 + 1\right) \text{ con } c_1'\left(x\right)x + c_2'\left(x\right)\left(x^2 + 1\right) = 0$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación,

$$\left.\begin{array}{l} y_p'\left(x\right) = c_1\left(x\right)x + 2xc_2\left(x\right) \\ y_p''\left(x\right) = c_1'\left(x\right) + 2xc_2'\left(x\right) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_1'\left(x\right) + 2xc_2'\left(x\right) = x^2 - 1$$

Así, se dispone del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguiente

$$\left.\begin{array}{l} c_1'\left(x\right) + 2xc_2'\left(x\right) = x^2 - 1 \\ c_1'\left(x\right)x + c_2'\left(x\right)\left(x^2 + 1\right) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} c_1'\left(x\right) = -x^2 - 1 \\ c_2'\left(x\right) = x \end{array}\right\}$$

Integrando se tiene

$$\left.\begin{array}{l} c_1\left(x\right) = -\dfrac{x^3}{3} - x \\ c_1\left(x\right) = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y_p\left(x\right) = \frac{x^2}{6}\left(x^2 - 3\right)$$

Retomando la solución general de la homogénea, se concluye finalmente que la solución general de la completa es

$$y(x) = c_1 x + c_2 \left(x^2 - 1\right) + \frac{x^2}{6}\left(x^2 - 3\right)$$

9

Justificar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) La siguiente ecuación $x^2 y'' + xy' - 5x = e^{x^2}$ es una ecuación diferencial lineal homogénea.

(b) La ecuación $y_1(x) = e^x$ es solución de la ecuación $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$. Si $y_2(x)$ es otra solución de esta ecuación, la función $v(x) = \dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$ cumple que es solución de la ecuación $xv'' + (x-2)v' = 0$

(c) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son solución de la ecuación $y'' + x^2 y' = 1$ entonces $y_1(x) - y_2(x)$ también es solución de la ecuación diferencial.

Solución a)

Se trata de una ecuación diferencial lineal por ser de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' = \frac{e^{x^2} + 5x}{x^2} \qquad p(x) = \frac{1}{x} \qquad q(x) = 0 \qquad r(x) = \frac{e^{x^2} + 5x}{x^2}$$

Pero, no es homogénea ya que $r(x) \neq 0$

Solución b)

Es fácil ver que $y_1(x) = e^x$ es solución: $xe^x - (x+2)e^x + 2e^x = 0$.

Considerando $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ y teniendo en cuenta que

$$y_2(x) = v(x)e^x$$

$$y'_2(x) = v'(x)e^x + v(x)e^x$$

$$y''_2(x) = v''(x)e^x + 2v'(x)e^x + v(x)e^x$$

Como $y_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial, se tendrá que cumplir

$$xy''_2(x) - (x+2)y''_2(x) + 2y_2(x) = 0$$

Sustituyendo

$$x\left(v''e^x + 2v'e^x + ve^x\right) - \left(x+2\right)\left(v'e^x + ve^x\right) + 2ve^x = 0$$

Dividiendo por e^x y operando

$$\left(xv'' + 2xv' + xv\right) - \left(xv' + 2v' + xv + 2v\right) + 2v = 0$$

$$\boxed{x\,v'' + \left(x-2\right)v' = 0}..$$

La afirmación es cierta

Solución c)

Si $y_1\left(x\right)$ es solución de la ecuación $y'' + x^2y' = 1$ se cumplirá

$$y_1'' + x^2y_1' = 1$$

Si $y_2\left(x\right)$ es solución de la ecuación $y'' + x^2y' = 1$ se cumplirá

$$y_2'' + x^2y_2' = 1$$

Por lo tanto,

$$\left(y_1 - y_2\right)'' + x^2\left(y_1 - y_2\right)' = y_1'' + x^2y_1'' - y_2'' - x^2y_1'' = 1 - 1 = 0$$

Al no cumplir la ecuación diferencial no es solución.

10 Dada la ecuación diferencial $x^2y'' - xy' + y = 0$, se pide:

(a) Comprobar con Matlab que $y_1 = x\log\left(x\right)$ es solución de la ecuación diferencial.

(b) Determinar a mano la solución general de la ecuación diferencial. Puedes utilizar Matlab para realizar las integrales.

(c) Calcular con Matlab la solución general y representar la solución que verifica $y\left(1\right) = 2$, $y'\left(1\right) = 0$.

Solución a)

El código Matlab para ver que es solución puede ser el siguiente que comprueba que cumple la ecuación diferencial

```
syms y(x)
y=x*cos(log(x));
dy=diff(y,x);dy2=diff(dy,x);
simplify(x^2*dy2-x*dy+2*y)
```

Solución b)

Como la ecuación diferencial es lineal homogénea utilizaremos el método de reducción de orden. Dada $y_1 = x\log\left(x\right)$ buscamos $y_2\left(x\right) = y_1\left(x\right)v\left(x\right)$ linealmente independiente con ella. Se tendrá que

$$y_2'(x) = y_1'(x)v(x) + y_1(x)v'(x)$$

$$y_2''(x) = y_1''(x)v(x) + 2y_1'(x)v'(x) + y_1(x)v''(x)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial $x^2y_2'' - xy_2' + 2y_2 = 0$, es decir,

$$x^2\left[y_1''(x)v(x) + 2y_1'(x)v'(x) + y_1(x)v''(x)\right] - x\left[y_1'(x)v(x) + y_1(x)v'(x)\right] + 2y_1(x)v(x) = 0$$

Simplificando, utilizando que y1 es solución

$$x^2\left[2y_1'(x)v'(x) + y_1(x)v''(x)\right] - x\left[y_1(x)v'(x)\right] = 0$$

$$v''(x)x^2y_1(x) + v'(x)\left[2x^2y_1'(x) - xy_1(x)\right] = 0$$

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = -\frac{2x^2y_1'(x) - xy_1(x)}{x^2y_1(x)} = -\frac{2xy_1'(x) - y_1(x)}{x\,y_1(x)}$$

Utilizando Matlab

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = -\frac{\cos(\log(x)) - 2\sin(\log(x))}{x\cos(\log(x))}$$

Integrando con Matlab

$$\log v'(x) = -2\log(\cos(\log x)) - \log(x) = \log\left(\frac{1}{x\cos^2(\log x)}\right)$$

$$v'(x) = \frac{1}{x\cos^2(\log x)}$$

Esta integral es inmediata, teniendo en cuenta que $\int \frac{u'}{\cos^2(u)}du = tg(u)$, luego

$$v(x) = tg(\cos(\log(x)))$$

Por lo tanto,

$$y_2(x) = x\cos(\log(x))\,tg(\cos(\log(x))) = x\,sen(\log(x))$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G(x) = C_1\,x\cos(\log(x)) + C_2x\,sen(\log(x)) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Código Matlab

```
syms y(x)
y1=x*cos(log(x));
dy=diff(y1,x);dy2=diff(dy,x);
```

```
aux=simplify(-(2*x*dy-y1)/(x*y1))
aux1=int(aux)
v1=simplify(exp(aux1))
%Comprobación
y2=x*sin(log(x))
simplify(x^2*diff(y2,x,2)-x*diff(y2,1)+2*y2)
```

Solución c)

El código para calcular la solución con Matlab es

```
syms y(x)
dy=diff(y,x);dy2=diff(dy,x);
eqn=x^2*dy2-x*dy+2*y==0
dsolve(eqn)
```

Para encontrar la solución al problema de valor inicial dado se añadirá al código anterior

```
cond=[y(1)==1,dy(1)==2];
solu=dsolve(eqn,cond)
```

Para representar la solución anterior, teniendo en cuenta que la solución está definida para x>0, se considera un intervalo dentro de este dominio

```
fplot(solu,[0.2,4])
```

11 Sabiendo que $y_1(x) = e^x$ es solución de la siguiente ecuación

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0$$

Encontrar su solución general.

Solución

Si $y_1 = e^x$, otra solución de la ecuación diferencial homogénea $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ que sea linealmente independiente con ella será de la forma $y_2 = v(x)e^x$. Deberá cumplir entonces

$$xy_2'' - (x+1)y_2' + y_2 = 0$$

$$y_2' = v'(x)e^x + v(x)e^x \qquad\qquad y_2'' = v''(x)e^x + 2v'(x)e^x + v(x)e^x$$

es decir,

$$x\left[v''(x)\cancel{e^x} + 2v'(x)\cancel{e^x} + v(x)\cancel{e^x}\right] - (x+1)\left[v'(x)\cancel{e^x} + v(x)\cancel{e^x}\right] + v(x)\cancel{e^x} = 0$$

Simplificando

$$xv''(x) + 2xv'(x) - (x+1)v'(x) = 0$$

$$xv''(x)+(x-1)v'(x)=0$$

$$\frac{v''(x)}{v'(x)}=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1 \qquad \log v'(x)=\log x-x$$

$$v'(x)=xe^{-x} \qquad v(x)=\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}$$

Por lo tanto,

$$y_2=\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)e^{x}=-x-1$$

La solución general es

$$\boxed{y_{GH}=C_1e^{x}+C_2\left(-x-1\right)}$$

12 Verificar que x^2 e x^{-1} son solución de la ecuacion diferencial $x^2y''-2y=0$. Calcular la solución general de $x^2y''-2y=0$.

Solución

Se comprueba que cumplen la ecuación

$$y_1=x^2 \quad y_1'=2x \quad y_1''=2 \;\rightarrow\; x^2y_1''-3y_1=0$$

$$y_2=x^{-1} \quad y_2'=-x^{-2} \quad y_2''=-2x^{-3} \;\rightarrow\; x^2y_2''-3y_2=0$$

Como además son linealmente independientes forman un sistema fundamentalmente de soluciones:

$$W\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2x & -x^{-2} \end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0$$

La solución de la edo es $y_{GH}=C_1x^2+C_2x^{-1} \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}$

EDOs COEFICIENTES CONSTANTES

13 Conociendo las raíces de sus ecuaciones características, formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas correspondientes.

(a) $r_1=1,\ r_2=2$ (b) $r_1=1=r_2$ (c) $r_1=3-2i \quad r_2=3+2i$

Solución

(a) Ecuación característica: $r^2-3r+2=0$

Ecuación diferencial: $y''-3y'+2y=0$

(b) Ecuación característica: $r^2-2r+1=0$

Ecuación diferencial: $y''-2y'+y=0$

(c) Ecuación característica: $r^2-6r+13=0$

Ecuación diferencial: $y''-6y'+13y=0$

14 Encontrar la solución de la ecuación $y'''-3y''+3y'-y=0$ para la cual $y(0)=1, y'(0)=2,\ y''(0)=3$

Solución

Para encontrar la solución pedida, se calculan las raíces de la ecuación característica

$$r^3-3r^2+3r-1=0 \quad \Rightarrow \quad (r-1)^3=0$$

La raíz es r=1 con multiplicidad 3, luego tres soluciones independientes son $\left\{e^x,\ xe^x,\ x^2e^x\right\}$ y la solución general es

$$y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$$

De todas las soluciones de la familia biparamétrica, se deben encontrar las que verifican las tres condiciones pedidas.

$$y(0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=1 \Rightarrow \quad y(x)=e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$$

Derivando

$$y'(x)=(1+C_2)e^x+(C_2+2C_3)xe^x+C_3x^2e^x$$

Como

$$y'(0)=2 \quad \Rightarrow \quad C_2=1 \quad \Rightarrow \quad y(x)=e^x+xe^x+C_3x^2e^x$$

Derivando de nuevo

$$y''(x)=(3+2C_3)e^x+(1+4C_3)xe^x+C_3x^2e^x$$

Imponiendo la última condición, se tiene

$$y''(0)=3 \quad \Rightarrow \quad C_3=0 \Rightarrow \quad y(x)=e^x+xe^x$$

15 **Justificar la certeza o falsedad** de la siguiente afirmación:

Las funciones $y_1=e^t\cos t$, $y_2=e^t sent$ son funciones linealmente independientes y una combinación lineal de ellas es solución de una ecuación diferencial de orden 2 con coeficientes constantes.

Solución

Considerando que las funciones dadas son de la forma $\left\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\right\}$ con a y b iguales a 1, basta considerar el polinomio que tiene como solución estas dos raíces complejas: $1\pm i$ es . El polinomio es el siguiente

$$\left[r-\left(1+i\right)\right]\left[r-\left(1-i\right)\right]=r^2-2r+2$$

que será el polinomio característico de la ecuación diferencial $y''-2y'+2y=0$ que tiene a esas dos funciones como soluciones linealmente independientes. La ecuación diferencial es de orden 2 con coeficientes constantes.

16 Dada las funciones $y_1=e^{2x}$, $y_2=xe^{2x}$, justificar si constituyen un sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes. En caso afirmativo, encontrar dicha ecuación diferencial.

Solución

Las dos funciones son linealmente independientes ya que

$$W\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x}\end{vmatrix}=e^{4x}+2xe^{4x}-2xe^{4x}=e^{4x}\neq 0$$

Además, estas dos funciones son solución de la ecuación diferencial de coeficientes constantes que tiene por polinomio característico

$$\left(r-2\right)^2=r^2-4r+4$$

que corresponde a la EDO de coeficientes constantes siguiente: $y''-4y'+4y=0$. La solución general de esta ecuación diferencial es $y_{GH}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

17 Escribir, utilizando el método de coeficientes indeterminados, la expresión que tendría una solución particular y_p de la ecuación

$$y''+2y'-3y=g(x)$$

para los siguientes valores de $g(x)$:

a) $7\cos 3x$ b) $5e^{-3x}$ c) $x^2\cos \pi x$ d) $2xe^{x}$

Escribir la forma que tendría la solución particular (no se pide resolver).

Solución

Calculamos en primer lugar, la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$r^2+2r-3=0$$

que tiene por raíces $r=1$, $r=-3$. La solución general es $y_{GH}=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}$.

En función del término independiente de la ecuación diferencial, escribimos la solución particular

a) $7\cos 3x$ $\qquad y_p=A\cos 3x+Bsen3x$

b) $5e^{-3x}$ $\qquad y_p = Axe^{-3x}$

c) $x^2\cos\pi x$ $\qquad y_p = \left(Ax^2 + Bx + C\right)\left(\cos\pi x + sen\pi x\right)$

d) $2xe^x$ $\qquad y_p = \left(Ax + B\right)xe^x$

18 Encontrar la solución general de las ecuaciones

(a) $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$ $\qquad$ (b) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$

(c) $y'' + y = 2\cos x$ $\qquad$ (d) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$

Solución a)

La ecuación característica tiene como raíces -2 y 3. Esto implica que la forma de la solución particular de la completa es

$$y_p\left(x\right) = Axe^{-2x}$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\left.\begin{array}{l} y_p'\left(x\right) = A\left(-2x+1\right)e^{-2x} \\ y_p''\left(x\right) = A\left(4x-4\right)e^{-2x} \end{array}\right\} \Rightarrow y'' - y' - 6y = -5Ae^{-2x} = 20e^{-2x} \Rightarrow A = -4$$

Con lo que la solución general de la completa resulta

$$y\left(x\right) = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} - 4xe^{-2x}$$

Solución b)

La ecuación característica es $\left(r+5\right)^2 = 0$ y la solución general de la homogenea es $y_{GH}\left(x\right) = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x}$. Esto implica que la forma de la solución particular de la completa es

$$y_p\left(x\right) = Ax^2e^{-5x}$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\left.\begin{array}{l} y_p'\left(x\right) = A\left(2x-5x^2\right)e^{-5x} \\ y_p''\left(x\right) = A\left(2-20x+25x^2\right)e^{-5x} \end{array}\right\} \Rightarrow y'' + 10y' + 25y = 2Ae^{-5x} = 14e^{-5x} \Rightarrow A = 7$$

Con lo que la solución general de la completa resulta

$$y\left(x\right) = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x} + 7x^2e^{-5x}$$

Solución c)

Las raíces de la ecuación característica son $\pm i$, por lo que se debe buscar una solución de la forma

$$y_p\left(x\right) = Ax\cos\left(x\right) + Bx\,\mathrm{sen}\left(x\right)$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\left.\begin{array}{l} y_p^{'}\left(x\right)=\left(A+Bx\right)\cos\left(x\right)+\left(B-Ax\right)\operatorname{sen}\left(x\right) \\ y_p^{''}\left(x\right)=\left(2B+Ax\right)\cos\left(x\right)+\left(-2A-Bx\right)\operatorname{sen}\left(x\right) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Tras sustituir y simplificar, se tiene

$$y_p^{''}+y_p^{'}\left(x\right)=2B\cos x-2A\operatorname{sen}\left(x\right)=2\cos\left(x\right)\ \Rightarrow A=0 \qquad B=1$$

Por lo tanto, $y_p\left(x\right)=x\operatorname{sen}\left(x\right)$, siendo entonces la solución general de la completa

$$y\left(x\right)=x\operatorname{sen}\left(x\right)+C_1\cos\left(x\right)+C_2\operatorname{sen}\left(x\right)$$

Solución d)

La ecuación característica $r^2-2r+5=0$, tiene como raíces $1+2i$, $1-2i$. La forma de la solución general de la homogénea asociada es

$$y_H\left(x\right)=e^x\left(C_1\cos\left(2x\right)+C_2\operatorname{sen}\left(2x\right)\right)$$

Por ser el término independiente un polinomio de grado 2, y no ser el 0 raíz de la ecuación característica, para la solución particular de la completa se debe ensayar un polinomio de grado 2

$$y_p\left(x\right)=ax^2+bx+c$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación completa se tiene

$$\left.\begin{array}{l} y_p^{'}\left(x\right)=\left(A+Bx\right)\cos\left(x\right)+\left(B-Ax\right)\operatorname{sen}\left(x\right) \\ y_p^{''}\left(x\right)=\left(2B+Ax\right)\cos\left(x\right)+\left(-2A-Bx\right)\operatorname{sen}\left(x\right) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Tras sustituir y simplificar, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} y_p^{'}\left(x\right)=2ax+b \\ y_p^{''}\left(x\right)=2a \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ 5ax^2+\left(-4a+5b\right)x+\left(2a-2b+5c\right)=25x^2+12$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a=5 \\ b=4 \\ c=2 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto,

$$y\left(x\right)=e^x\left(C_1\cos\left(2x\right)+C_2\operatorname{sen}\left(2x\right)\right)+5x^2+4x+2$$

19 Encontrar la solución general de la ecuación $y''-y'-6y=e^{-x}$ hallando la solución particular primero mediante el método de los coeficientes indeterminados y después por variación de parámetros.

Solución

En primer lugar, se calculan las raíces de la ecuación característica

$$r^2 - r - 6 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = -2 \qquad r_2 = 3$$

La solución general de la homogénea asociada es

$$y_H(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$$

COEFICIENTES INDETERMINADOS

Dado que el término independiente es exponencial y que -1 no es raíz de la ecuación característica, se debe buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ae^{-x} \;\Rightarrow\; y_p'(x) = -Ae^{-x} \Rightarrow \; y_p''(x) = Ae^{-x}$$

que sustituyendo en la ecuación proporciona

$$e^{-x}(A + A - 6A) = e^{-x} \Rightarrow \; A = -\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; y_p = \frac{-1}{4}e^{-x}$$

VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Se considera $y_p(x) = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{3x}$, derivando

$$y_p'(x) = c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{3x} - 2c_1(x)e^{-2x} + 3c_2(x)e^{3x}$$

Antes de volver a derivar hay que simplificar la primera derivada teniendo en cuenta la condición adicional de que

$$c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{3x} = 0$$

Luego

$$y_p'(x) = -2c_1(x)e^{-2x} + 3c_2(x)e^{3x}$$

Derivando otra vez

$$y_p''(x) = -2c_1'(x)e^{-2x} + 3c_2'(x)e^{3x} + 4c_1(x)e^{-2x} + 9c_2(x)e^{3x}$$

y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$-2c_1'(x)e^{-2x} + 3c_2'(x)e^{3x} = e^{-x}$$

Por lo tanto, las funciones incógnitas se obtienen del sistema

$$\left.\begin{array}{l} c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{3x} = 0 \\ -2c_1'(x)e^{-2x} + 3c_2'(x)e^{3x} = e^{-x} \end{array}\right\}$$

de donde

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ e^{-x} & 3e^{x} \end{vmatrix}}{5e^{x}} = \frac{-e^{x}}{5} \qquad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & e^{-x} \end{vmatrix}}{5e^{x}} = \frac{e^{-4x}}{5}$$

con lo que

$$c_1(x) = \frac{-e^{x}}{5} \qquad c_2(x) = -\frac{e^{-4x}}{20}$$

$$y_p(x) = \frac{-e^{x}}{5}e^{-2x} - \frac{e^{-4x}}{20}e^{3x} = \frac{-1}{4}e^{-x}$$

La solución general de la completa es

$$y(x) = \frac{-1}{4}e^{-x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$$

$$y(x) = e^{x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\,\mathrm{sen}(2x)\right) + 5x^2 + 4x + 2$$

20 Encontrar la solución particular de la ecuación $y'' + 4y = tg(2x)$.

Solución

En este caso el término independiente no es adecuado para utilizar el método de coeficientes indeterminados por lo que se utiliza el método de variación de constantes. Las raíces de la ecuación característica son $\pm 2i$, por lo que se busca una solución particular de la forma

$$y_p(x) = c_1(x)\cos(2x) + c_2\,\mathrm{sen}(2x)$$

Derivando y teniendo en cuenta la condición adicional

$$c_1'(x)\cos(2x) + c_2'(x)\,\mathrm{sen}(2x) = 0$$

se tiene

$$y_p'(x) = c_1'(x)\cos(2x) + c_2'\,\mathrm{sen}(2x) - 2c_1(x)\,\mathrm{sen}(2x) + 2c_2(x)\cos(2x) \Rightarrow$$

$$y_p'(x) = -2c_1(x)\,\mathrm{sen}(2x) + 2c_2(x)\cos(2x)$$

Derivando de nuevo

$$y_p''(x) = -2c_1'(x)\,\mathrm{sen}(2x) + 2c_2'(x)\cos(2x) - 4c_1(x)\cos(2x) - 4c_2(x)\,\mathrm{sen}(2x)$$

Sustituyendo en la ecuación

$$y_p''(x) + 4y_p(x) = -2c_1'(x)\,\mathrm{sen}(2x) + 2c_2'(x)\cos(2x) = tg(2x)$$

El sistema que hay que resolver es

$$\left.\begin{array}{l} c_1'(x)\cos(2x) + c_2'(x)\,\mathrm{sen}(2x) = 0 \\ -2c_1'(x)\,\mathrm{sen}(2x) + 2c_2'(x)\cos(2x) = tg(2x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1'(x) = \dfrac{-1}{2}tg(2x)\,\mathrm{sen}(2x) \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{sen}(2x) \end{array}\right\}$$

Integrando

$$c_1(x) = \frac{-1}{2}\int tg(2x)\,\mathrm{sen}(2x)\,dx = \frac{-1}{2}\int \frac{\mathrm{sen}^2(2x)}{\cos(2x)}dx = \frac{-1}{2}\int \frac{1-\cos^2(2x)}{\cos(2x)}dx =$$

$$= \frac{-1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos(2x)} - \cos(2x)\right)dx = \frac{-1}{2}\left(\log\left(\frac{1+\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right)$$

$c_2(x) = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\,dx = \frac{-1}{4}\cos(2x)$

Finalmente resulta

$$y_p(x) = c_1(x)\cos(2x) + c_2(x)\operatorname{sen}(2x) = \frac{-1}{4}\cos(2x)\left[\log\left(\sec(2x) + tg(2x)\right)\right]$$

21 Resolver la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$.

Solución

Se trata de una ecuación diferencial de coeficientes constantes. El polinomio característico asociado a la ecuación homogénea es

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0 \Rightarrow y_{GH} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

Para obtener la solución particular consideramos

$$y_p = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)xe^{-2x} \text{ cumpliendo } C'_1(x)e^{-2x} + C'_2(x)xe^{-2x} = 0$$

Sustituyendo yp en la ecuación e imponiendo esta condición obtenemos

$$-2C'_1(x)e^{-2x} + C'_2(x)\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

Calculamos $C'_1(x), C'_2(x)$ del sistema

$$\left.\begin{array}{l} C'_1(x)e^{-2x} + C'_2(x)xe^{-2x} = 0 \\ -2C'_1(x)e^{-2x} + C'_2(x)\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} C'_1(x) + C'_2(x)x = 0 \\ -2C'_1(x) + C'_2(x)(1-2x) = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right\}$$

Despejando de la primera ecuación $C'_1(x) = -C'_2(x)x$, sustituyendo en la segunda

$$2xC'_2(x) + C'_2(x)(1-2x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C'_2(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C_2(x) = -\frac{1}{x}$$

$$C'_1(x) = -\frac{1}{x^2}x = -\frac{1}{x} \qquad \Rightarrow C_1(x) = -\log|x|$$

La solución particular es

$$y_p = -\log|x|e^{-2x} - e^{-2x}$$

La solución general es

$$y_G = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \log|x|e^{-2x}$$

22 Resolver la ecuación diferencial $y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$.

Solución

La ecuación diferencial de coeficientes constantes $y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$ tiene como polinomio característico

$$r^2 - 9 = (r-3)(r+3) = 0$$

La solución general es $y_{GH} = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$. Para encontrar la solución particular de la completa consideramos

$$y_p = x(Ax+B)e^{-3x} \qquad y_p = (Ax^2 + Bx)e^{-3x}$$

y determinamos los coeficientes A y B sabiendo que es solución de la ecuación diferencial: $y_p'' - 9y_p = \frac{9x}{e^{3x}} = 9xe^{-3x}$. Como se cumple

$$y_p' = (2Ax+B)e^{-3x} - 3(Ax^2+Bx)e^{-3x}$$

$$y_p'' = 2Ae^{-3x} - 6(2Ax+B)e^{-3x} + 9(Ax^2+Bx)e^{-3x}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial

$$2Ae^{-3x} - 6(2Ax+B)e^{-3x} + 9(\cancel{Ax^2} + \cancel{Bx})e^{-3x} - 9(\cancel{Ax^2} + \cancel{Bx})e^{-3x} = 9xe^{-3x}$$

se tiene el siguiente sistema

$$\begin{gathered} -12A = 9 \\ 2A - 6B = 0 \end{gathered}$$

cuya solución es $A = -3/4,\ b = -1/4$. Por lo tanto, la solución particular es

$$y_p = \left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)e^{-3x}$$

y la solución general es

$$y_G = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + \left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)e^{-3x}$$

23 Escribir la **expresión** de la solución particular de la ecuación diferencial $y''-5y'+4y=\left(12x-5\right)e^{4x}$ utilizando el método de coeficientes indeterminados. Nota: No se pide calcular la solución particular.

Solución

Para encontrar la expresión de la solución particular, calculamos en primer lugar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada $y''-5y'+4y=0$. El polinomio característico es

$$r^2-5r+4=\left(r-4\right)\left(r-1\right)=0$$

La solución general de la homogénea asociada es

$$y_{GH}\left(x\right)=C_1e^x+C_2e^{4x} \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

En consecuencia, la solución particular será d ela forma

$$y_p\left(x\right)=x\left(Ax+B\right)e^{4x}=\left(Ax^2+Bx\right)e^{4x} \qquad A,B\in\mathbb{R}$$

Aunque no pide resolverla para encontrar esta solución se tendrá en cuenta que

$$y_p\left(x\right)=\left(Ax^2+Bx\right)e^{4x}$$

$$y_p'\left(x\right)=\left(2Ax+B\right)e^{4x}+4\left(Ax^2+Bx\right)e^{4x}=\left(4Ax^2+\left(2A+4B\right)x+B\right)e^{4x}$$

$$y_p''\left(x\right)=\left(8Ax+\left(2A+4B\right)\right)e^{4x}+4\left(4Ax^2+\left(2A+4B\right)x+B\right)e^{4x}=$$

$$=2\left(8Ax^2+\left(8A+8B\right)x+A+4B\right)e^{4x}$$

Como $y_p''-5y_p'+4y_p=\left(12x-5\right)e^{4x}$, se tendrá

$$\left[6Ax+\left(2A+3B\right)\right]e^{4x}=\left(12x-5\right)e^{4x}$$

Se debe resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 6A&=12 &&\to A=2\\ 2A+3B&=-5 &&\to B=-3 \end{aligned}$$

La solución es entonces $y_p=\left(2x^2-3x\right)e^{4x}$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$y=C_1e^x+C_2e^{4x}+\left(2x^2-3x\right)e^{4x} \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

24 Resolver la siguiente ecuación diferencial $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{t^2}$

Solución

Como es una edo de segundo orden de coeficientes constantes, calculamos el polinomio característico para obtener la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada. Dado que

$$r^2-2r+1=0 \qquad \Rightarrow \qquad r=1\ doble$$

la solución general de la homogénea es

$$y_{GH}=C_1e^t+C_2te^t \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

Para obtener la solución particular de la completa utilizamos el método de variación de constantes

$$y_p = C_1(t)e^t + C_2(t)te^t \qquad C_1'(t)e^t + C_2'(t)te^t = 0$$

Las funciones C1 y C2 deben cumplir

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(t)e^t + C_2'(t)te^t = 0 \\ C_1'(t)e^t + C_2'(t)\left(e^t + te^t\right) = \dfrac{e^t}{t^2} \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema

$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & te^t \\ \dfrac{e^t}{t^2} & e^t(1+t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t(1+t) \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{e^{2t}}{t}}{e^{2t}(1+t) - te^{2t}} = \frac{1}{t} \qquad \Rightarrow \qquad C_1(t) = \log|t|$$

$$C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & \dfrac{e^t}{t^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t(1+t) \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{e^{2t}}{t^2}}{e^{2t}} = \frac{1}{t^2} \qquad \Rightarrow \qquad C_2(t) = -\frac{1}{t}$$

La solución particular es

$$y_p = \log|t|e^t - \frac{1}{t}te^t = \log|t|e^t - e^t$$

La solución de la edo dada es

$$y(t) = C_1e^t + C_2te^t + \log|t|e^t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Observar que la expresión $-e^t$ de la solución particular no se ha añadido al formar parte de la expresión C_1e^t.

APLICACIONES

25 Aplicación. Oscilaciones mecánicas

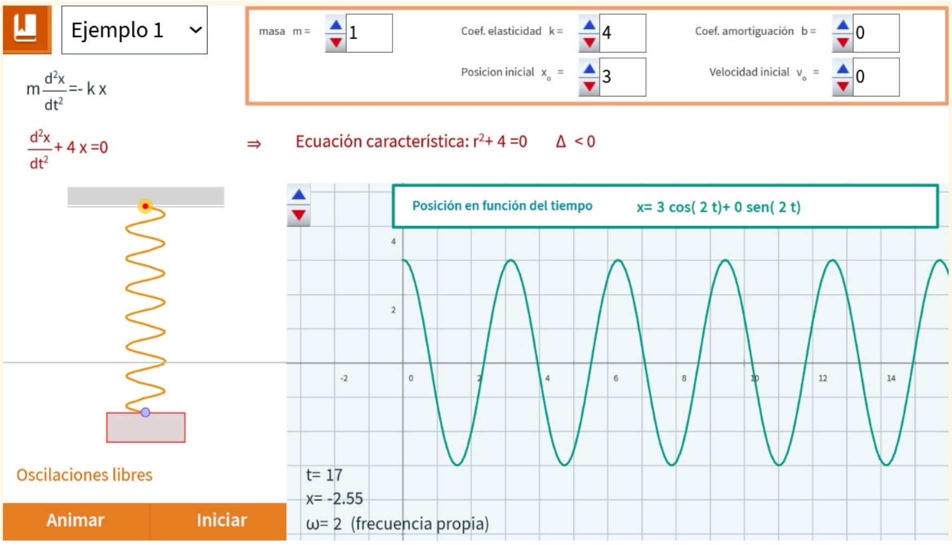
Supongamos un muelle de masa m que colgamos de un resorte y que se agrega un sistema mecánico (amortiguador) que tiene el efecto de reducir la velocidad cuando el sistema se encuentra vibrando. Supongamos que $f(t)$ es una fuerza externa que actúa sobre el sistema.

Teniendo en cuenta la ley de Hooke, el movimiento del cuerpo viene dado

$$mx''(t) = F_m + F_c + F_e$$

Donde F_m es la fuerza del muelle siendo k una constante que depende de la rigidez del muelle, F_c es la fuerza que ejerce el amortiguador y $F_e = f(t)$ es la fuerza externa. La ecuación diferencial de este sistema es

$$mx''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = f(t)$$



https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/MuelleResorte-JS/index.html

Ejemplo: Un cuerpo oscilando sobre su posición de equilibrio (x=0) se mueve de acuerdo a la ecuación diferencial $x''(t) + 16x(t) = 24\cos(4t)$. Si en el instante inicial se encuentra en su posición de equilibrio y con velocidad nula, ¿en qué posición se encontrará al cabo de 10 segundos? Representa la solución de la ecuación diferencial.

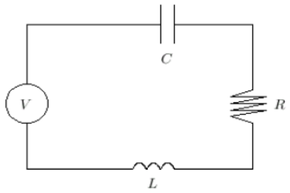
Solución con Matlab

```
syms x(t)
eqn= diff(x,t,2)+16*x==24*cos(4*t);
Dx=diff(x,t);
cond=[x(0)==0,Dx(0)==0]
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
%En el instante t=10
sol(10)
ezplot(sol(t),[0,10])
hold on
plot(0,0,'o')
plot(10,sol(10),'*')
hold off
```

26 Aplicación. Oscilaciones mecánicas

Aplicación. Circuito eléctrico LRC

Una aplicación clásica de las ecuaciones diferenciales se presenta en el estudio de un circuito eléctrico que consiste en resistores, inductores y capacitores, al cual se aplica una fuerza electromotriz.



En este caso una aplicación de las leyes de Kirchoff conduce a la ecuación

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$$

donde L es la inductancia, R la resistencia, C la capacitancia, $E(t)$ la fuerza electromotriz, $q(t)$ la carga y t el tiempo. Esta ecuación diferencial constituye un ejemplo de las ecuaciones diferenciales que se estudiarán en este tema: las ecuaciones lineales de segundo orden.

Teniendo en cuenta que la intensidad se define como la derivada de la carga, la ecuación diferencial en términos de la intensidad es

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=E'(t)$$

Ejemplo: Determina la carga $q(t)$ en un circuito en serie LRC, cuando:

$$L=0.25\ henrios\,(h) \qquad R=10\ ohmios\,(\Omega)$$

$$\mathrm{C}=0.001\ \mathrm{faradios}\,(\mathrm{f}) \qquad E(t)=200\,\mathrm{sen}\,40t\ \ voltios\,(V)$$

$$\mathrm{q}(0)=3\ \mathrm{culombios}\ (\mathrm{C}) \qquad i(0)=q'(0)=0\ amperios\,(A)$$

Solución con Matlab

```
syms q(t)
L=0.25;R=10;C=0.001;
eqn= L*diff(q,t,2)+R*diff(q,t)+q/C==200*sin(40*t);
Dq=diff(q,t);
cond=[q(0)==3,Dq(0)==0]
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
ezplot(sol(t),[0,10])
```

$$q(t)=e^{-20t}\left(\frac{41}{13}\cos 60t+\frac{35}{39}\mathrm{sen}\,60t\right)+\frac{3}{13}\mathrm{sen}\,40t-\frac{2}{13}\cos 40t$$

Puedes ver más ejercicios resueltos sobre ecuaciones diferenciales de segundo orden en la página de Giematic UC
http://www.giematic.unican.es/index.php/edos-segundo-orden/material-interactivo