3.	$\int (3x^2 - 2x - 5) sen2x\ dx$ $R: -\frac{1}{2}(3x^3 - 2x - 5)cos2x + \frac{1}{4}(3x^2 - 2)sen2x + \frac{3}{4}xcos2x - \frac{3}{8}sen2x + C$	
4.	$\int \frac{x}{e^x} dx$	$R: -xe^{-x} - e^{-x} + C$
5.	$\int e^{3x}\, sen2x\ dx$	$R: \frac{1}{13} e^{3x}(3sen2x - 2cos2x) + C$
6.	$\int \frac{lnx}{x} dx$	$R: \frac{1}{2} ln^2x + C$
7.	$\int arccotgxdx$	$R: xarccotgx - \frac{1}{2} ln\|1 + x^2\| + C$
8.	$\int (x^2 + 3)\, 3x^2\ dx$	$R: \frac{3}{5}x^5 + 3x^3 + C$
9.	$\int \frac{arcsen\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	$2\sqrt{x}arcsen\sqrt{x} + 2\sqrt{1 - x} + C$
10.-	$\int xtg^{-1}xdx$	$\frac{x^2}{2} tg^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} tg^{-1}x + C$

2.3 Integración de funciones trigonométricas

En este punto el estudiante ya puede reconocer cuando integrar usando sustitución o cambio de variable y cuando usar el método de múltiple integración o por partes.

Es conveniente que ahora, el estudiante repase sus conocimientos sobre trigonometría, pues el uso de identidades es constante en esta sección y en adelante.

"Caso 1. Integrales de la forma $\int sen^n dx$, $\int cos^n dx$.

*Cuando los integrales tienen esta forma, pueden presentarse dos casos: que **n** sea par o que **n** sea impar.*

a. *Si **n** es impar, usar la identidad trigonométrica* $sen^2x + cos^2x = 1$

b. *Si **n** es par, se recomienda usar las identidades trigonométricas siguientes:*

$$sen^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \;\; cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$$

(Villena, pág. 13)

Ejercicio 1

$$\int sen^5x\, dx$$

En este caso el exponente es impar, usar entonces la segunda recomendación

$$\int sen^5dx = \int sen^4x\; senx\; dx = \int (sen^2x)^2 senx\; dx$$

Usando la identidad trigonométrica $sen^2x + cos^2x = 1$

$$= \int (1 - cos^2x)^2 senx\; dx = \int (1 - 2cos^2x + cos^4x)\; senx\; dx$$

$$= \int senx\; dx - \int 2cos^2x\; senx\; dx + \int cos^4x\; senx\; dx$$

Sustituyendo *u=cosx* en los dos últimos integrales, *du=-senxdx*

$$= -cosx + 2\int u^2du - \int u^4du = -cosx + 2\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

Retornando a la variable original

$$\int sen^5dx = -cosx + 2\frac{cos^3x}{3} - \frac{cos^5x}{5} + C$$

Ejercicio 2

$$\int cos^3x\, dx$$

(Jiménez, 2008, p. 118).

$$\int cos^3 dx = \int cos^2x\, cosx\, dx = \int (1 - sen^2x) cosx\, dx = \int cosx - \int sen^2x\, cosx\, dx$$

La primera integral es directa. La segunda integral se la resuelve por sustitución o cambio de variable.

$$Sea\ u = senx, \qquad du = cosx\, dx$$

$$= \int cosx\, dx - \int u^2 du = senx - \frac{u^3}{3} + C = senx - \frac{sen^3x}{3} + C$$

Ejercicio 3

$$\int sen^4x\, dx$$

$$\int sen^4x\, dx = \int \left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1 - 2cos2x\text{-}cos^2 2x}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int cos2xdx + \frac{1}{4}\int cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int cos2x + \frac{1}{4}\int \frac{1 + cos4x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int cos2x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int cos4x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{sen2x}{2}\right) + \frac{1}{8}x + \left(\frac{1}{8}\right)\frac{sen4x}{4} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + C$$

"Caso 2. Integrales de la forma $\int sen^m x\, cos^n x\, dx$

a. *Los exponentes **m** o **n** son impares"* (Villena, s.f., p. 14).

Ejercicio 1

$$\int sen^3xcos^{-4}x\,dx$$

$$\int sen^3xcos^{-4}x\,dx = \int sen^2x\,senx\,cos^{-4}x\,dx = \int (1-cos^2x)cos^{-4}x\,senx\,dx$$

$$= \int cos^{-4}x\,senx\,dx - \int cos^{-2}x\,senx\,dx$$

Cambiando de variable

$$u = cosx \quad du = -senxdx$$

$$= -\int u^{-4}\,du + \int u^{-2}\,du = -\frac{u^{-3}}{-3} + \frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{cos^{-3}x}{3} - \frac{cos^{-1}x}{1} + C$$

$$= 3sec^3x\text{-}secx + C$$

El estudiante se habrá dado cuenta que la idea de partir sen^3x en sen^2x *y* $senx$ fue formar la pareja $cosx$ y $senx$ para poder aplicar cambio de variable.

Ejercicio 2

$$\int sen^3\left(\frac{x}{2}\right)cos^5\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

Reordenando para que el estudiante vea con mayor claridad el proceso se tiene

$$\int cos^5\left(\frac{x}{2}\right)sen^3\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int cos^4\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)sen^3\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \int\left(cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 cos\left(\frac{x}{2}\right)sen^3\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \int\left(1 - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 cos\left(\frac{x}{2}\right)sen^3\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \int \left(1 - 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + sen^4\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 cos\left(\frac{x}{2}\right) sen^3\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \int \left[sen^3\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2sen^5\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right) + sen^7\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx$$

$$= \int \left[sen^3\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx - \int \left[2sen^5\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx + \int \left[sen^7\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx$$

$$Sea\ u = sen\frac{x}{2} \quad du = \frac{1}{2} cos\frac{x}{2}\, dx$$

Multiplicando y dividiendo al mismo tiempo por 2 a cada integral con la intención de obtener el valor completo de *du* en la integral

$$= 2\int u^3\, du\text{-}(2)(2)\int u^5\, du + 2\int u^7\, du = 2\frac{u^4}{4} - 4\frac{u^6}{6} + 2\frac{u^8}{8} + C$$

$$= \frac{1}{2} sen^4\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{3} sen^6\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} sen^8\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b. *Los exponentes* **m** *y* **n** *son pares*

Ejercicio 1

$$\int sen^2 x cos^4 x\, dx$$

Ya que ambos exponentes son pares, el procedimiento recomendado es el siguiente:

$$\int sen^2 x cos^4 x\, dx = \int sen^2 x (cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)\left(\frac{1 + cos2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - cos2x)\ (1 + 2cos2x + cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx$$

$$=\frac{1}{8}\left[\int dx+\int \cos 2x\,dx-\int \cos^{2}2x\,dx-\int \cos^{3}2x\,dx\right]$$

Resolviendo cada una de las integrales por separado:

$$\int dx = x + C$$

$$\int cos2xdx = \frac{1}{2}sen2x + C$$

$$\int cos^2 2x = \frac{1}{2}\int (1 + cos4x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}sen4x + C$$

$$\int \cos^{3}2x\,dx=\frac{1}{2}sen2x-\frac{sen^{3}2x}{6}+C$$

Esta integral ya fue resuelta en el ejercicio 2 del Caso 1 con la diferencia que ahora se trata de ángulo doble. Se deja al estudiante para que resuelva esta parte del ejercicio.

La respuesta final es

$$\int sen^{2}x\cos^{4}x\,dx=\frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}sen2x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}sen4x\right)-\left(\frac{1}{2}sen2x-\frac{sen^{3}2x}{6}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}sen2x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}sen4x-\frac{1}{2}sen2x+\frac{1}{6}sen^{3}2x\right]+C$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{8}sen4x+\frac{1}{6}sen^{3}2x\right]+C$$

"Caso 3. Integrales de la forma ∫sen(mx)cos(nx) dx, ∫sen(mx) sen(nx) dx, ∫cos(mx)cos(nx) dx" (Villena, s.f., p. 14).

Para estos casos se recomienda usar las identidades de ángulo múltiple y de ángulo negativo que se muestran a continuación:

$$sen(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[sen(m+n)x+sen(m-n)x\right](1)$$

$$sen(mx)sen(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right](2)$$

$$\cos(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right](3)$$

$$sen(-x)=-senx \quad (4)$$

$$\cos(-x)=\cos x\,(5)$$

Ejercicio 1

$$\int sen2xcos4x\,dx$$

Aplicando la identidad (1) en donde *m=2* y *n=4*

$$\int sen2xcos4x\,dx=\int\frac{1}{2}[sen(2+4)x+sen(2-4)x]\,dx=\frac{1}{2}\int sen6x+sen(-2x)\,dx$$

Aplicando la identidad (4)

$$=\frac{1}{2}\int(sen6x\text{-}sen2x)dx=\frac{1}{2}\left[\left(\text{-}\frac{cos6x}{6}\right)+\frac{cos2x}{2}\right)+C$$

$$=\text{-}\frac{1}{12}cos6x+\frac{1}{4}cos2x+C$$

Ejercicio 2

$$\int cos3xcosxdx$$

Aplicando la identidad (3) haciendo *m=3 y n=1*

$$=\frac{1}{2}\int(sen6x\text{-}sen2x)dx=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{cos6x}{6}\right)+\frac{cos2x}{2}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{12}cos6x+\frac{1}{4}cos2x+C$$

"Caso 4. Integrales de la forma ∫tgnx dx, ∫cotgnx dx" (Villena, s.f., p. 17).

Igual que en los casos anteriores, para llevar estas integrales a una forma donde pueda aplicarse el método de sustitución o cambio de variable, se recomienda usar las siguientes identidades:

$$tg^2x = sec^2x - 1 \;\; (1)$$

$$cotg^2x = csc^2x - 1 \;\; (2)$$

Ejercicio 1

$$\int tg^2xdx$$

Usando la identidad (1)

$$\int tg^2xdx = \int (sec^2x - 1)dx = tgx - x + C$$

Ejercicio 2

$$\int cotg^3xdx = \int cotgxcotg^2x\, dx$$

$$= \int cotgx(csc^2x - 1)dx = \int cotgxcsc^2x\, dx - \int cotgx\, dx$$

$$sea\, u = cotgx, \;\; du = -csc^2xdx$$

$$= -\int udu - ln|senx| + C = -\frac{u^2}{2} - ln|senx| + C = -\frac{cotg^2x}{2} - ln|senx| + C$$

"Caso 5. Integrales de la forma ∫tgmx secnx dx, ∫cotgmx cscnx dx"

a. Si el exponente n es par" (Villena, s.f. p. 18).

Ejercicio 1

$$\int tg^3 3x\, sec^4 3x\, dx$$

(Jiménez, 2008, p. 121).

Ya que la derivada de la *tgx* es *sec*^{2}*x*, se tratará de formar la pareja para aplicar el método de sustitución de variables.

$$\int tg^3 3x\, sec^4 3x\, dx = \int tg^3 3x\, (1 + tg^2 3x) sec^2 3x\, dx$$

$$= \int tg^3 3x\, sec^2 3x\, dx + \int tg^5 3x\, sec^2 3x\, dx$$

$$sea\ u = tg3x, du = 3sec^2 3x\ dx$$

Multiplicando y dividiendo para 3 ambas integrales para tener el diferencial completo

$$= \int \frac{1}{3} tg^3 3x\, (3) sec^2 3x\, dx + \int \frac{1}{3} tg^5 3x\, (3) sec^2 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int u^3\, du + \frac{1}{3}\int u^5\, du = \frac{1}{3}\frac{u^4}{4} + \frac{1}{3}\frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{tg^4 3x}{12} + \frac{tg^6 3x}{18} + C$$

a. Si el exponente m es impar

Ejercicio 1

$$\int cotg^3 x\, csc^3 x\, dx = \int cotg^2 x\, csc^2 x\, cotgx\, cscx\, dx$$

Usando la identidad

$$ctg^2 x = csc^2 x - 1$$

$$\int cotg^3 x\, csc^3 x\, dx = \int (csc^2 x - 1)\, csc^2 x\, ctgx\, cscx\, dx$$

$$= \int csc^4 x\, cotgx\, cscx\, dx - \int csc^2 x\, ctgx\, cscx\, dx$$

$$sea\ u = cscx,\ \ du = -cscx\, cotgx\, dx$$

$$= -\int u^4 du + \int u^2 du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C = -\frac{csc^5 x}{5} + \frac{csc^3 x}{3} + C$$

Los casos aquí expuestos cubren una gran cantidad de integrales de combinaciones de funciones trigonométricas, sin embargo puede haber otros casos en donde probablemente se puedan integrar aplicando alguno de los métodos ya vistos.