15. $\int x^2 e^x\, dx$

16. $\int y^2 e^{3y}\, dy$

17. $\int x^3 e^{4x}\, dx$

18. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx$

19. $\int x^2 \operatorname{sen} bx\, dx$

20. $\int x^3 \cos\frac{x}{2}\, dx$

21. $\int x\csc^2 ax\, dx$

22. $\int y\sec^2 my\, dy$

23. $\int \operatorname{arc\,cos} ax\, dx$

24. $\int \operatorname{arc\,sen} bx\, dx$

25. $\int \operatorname{arc\,tan} ax\, dx$

26. $\int \operatorname{arc\,sec} mx\, dx$

27. $\int \operatorname{arc\,cot}\frac{x}{n}\, dx$

28. $\int e^{2\theta}\operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$

29. $\int e^{3x}\cos 4x\, dx$

30. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{5t+3}}$

31. $\int \frac{x\, dx}{(ax+b)^4}$

32. $\int \frac{x^2\, dx}{(2x+1)^5}$

33. $\int \frac{\ln(\ln y)}{y}\, dy$

34. $\int x^3 e^{2x}\, dx$

35. $\int \frac{\operatorname{arc\,cos}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

36. $\int e^{2x}\cos x\, dx$

37. $\int (\operatorname{arc\,cos} y)^2\, dy$

38. $\int \frac{\operatorname{arc\,cos} x}{x^2}\, dx$

39. $\int \frac{w^2}{\sqrt{16-w^2}}\, dw$

40. $\int \operatorname{sen}^2(\ln x)\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración por fracciones parciales

Integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tales que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$

Caso I. El denominador tiene sólo factores de 1er grado que no se repiten
A cada factor de la forma:

$$ax + b$$

Le corresponde una fracción de la forma,

$$\frac{A}{ax+b}$$

Donde A es una constante por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}$

Solución

Se factoriza el denominador

$$\frac{7x+29}{x^2+8x+15}=\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)} \quad \rightarrow \quad \frac{7x+29}{(x+5)(x+3)}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x+3}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+5)}{(x+5)(x+3)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$7x+29=A(x+3)+B(x+5)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$7x+29=x(A+B)+3A+5B$$

Resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+B=7 \\ 3A+5B=29 \end{cases}$$

la solución del sistema es:

$$A=3 \quad \text{y} \quad B=4$$

Entonces:

$$\int \frac{(7x+29)}{x^2+8x+15}dx=\int\left(\frac{3}{x+5}+\frac{4}{x+3}\right)dx=\int \frac{3}{x+5}dx+\int \frac{4}{x+3}dx=3\ln|x+5|+4\ln|x+3|+C$$

$$\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}=\ln\left|(x+5)^3\cdot(x+3)^4\right|+C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$

Solución

Se factoriza el denominador,

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{4x-2}{x(x^2-x-2)}=\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

Se hace la equivalencia como sigue:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+1)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$4x-2=A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$4x-2=x^2(A+B+C)+x(-A+B-2C)-2A$$

Resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B-2C=4 \\ -2A=-2 \end{cases},$$

la solución del sistema es:

$$A=1, B=1, C=-2$$

Entonces:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x+1} = \ln|x|+\ln|x-2|-2\ln|x+1|+C$$

$$= \ln|x|+\ln|x-2|-\ln(x+1)^2+C$$

Se aplican las leyes de los logaritmos para simplificar la expresión:

$$= \ln\frac{|x(x-2)|}{(x+1)^2}+C=\ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

Por consiguiente:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x} = \ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

➡ **Caso II.** Los factores del denominador son todos de 1er grado y algunos se repiten

Si se tiene un factor de la forma $(ax+b)^n$, se desarrolla una suma como sigue:

$$\frac{A}{(ax+b)^n}+\frac{B}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{C}{(ax+b)^{n-2}}+\ldots+\frac{Z}{ax+b}$$

En donde A, B, C y Z son constantes por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de: $\int \frac{\left(3x^2+5x\right)dx}{(x-1)(x+1)^2}$

Solución

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x-1)+C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad:

$$3x^2+5x=x^2(A+C)+x(2A+B)+A-B-C$$

Entonces se genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+C=3 \\ 2A+B=5, \\ A-B-C=0 \end{cases}$$

su solución es:

$$A=2, B=1, C=1$$

finalmente,

$$\int\frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2}=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}=2\ln|x-1|-\frac{1}{x+1}+\ln|x+1|+C$$

$$=\ln\left|(x+1)(x-1)^2\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

2 Resuelve $\int\frac{(y^4-8)}{y^3+2y^2}\,dy$

Solución

Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se efectúa la división.

$$\frac{y^4-8}{y^3+2y^2}=y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}$$

Entonces,

$$\int\frac{\left(y^4-8\right)dy}{y^3+2y^2}=\int\left(y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}\right)dy$$

Se separan las integrales,

$$=\int y\,dy-2\int dy+\int\frac{\left(4y^2-8\right)dy}{y^3+2y^2}=\frac{y^2}{2}-2y+\int\frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$$

La integral $\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$ se resuelve mediante fracciones parciales,

$$\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}=\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} \quad \rightarrow \quad \frac{4y^2-8}{y^2(y+2)}=\frac{A}{y^2}+\frac{B}{y}+\frac{C}{y+2}$$

$$\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} = \frac{A(y+2)+By(y+2)+Cy^2}{y^2(y+2)} = \frac{y^2(B+C)+y(A+2B)+2A}{y^2(y+2)}$$

De la igualdad se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B+C=4 \\ A+2B=0 \\ 2A=-8 \end{cases},$$

donde

$$A=-4, B=2 \text{ y } C=2$$

La integral se separa de la siguiente manera:

$$\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^{2y}}=-4\int\frac{dy}{y^2}+2\int\frac{dy}{y}+2\int\frac{dy}{y+2}=\frac{4}{y}+2\ln|y|+2\ln|y+2|+C$$

$$=\frac{4}{y}+2(\ln|y|+\ln|y+2|)+C$$

$$=\frac{4}{y}+2\ln|y^2+2y|+C$$

Se concluye que,

$$\int\frac{(y^4-8)\,dy}{y^3+2y^2}=\frac{y^2}{2}-2y+\frac{4}{y}+2\ln|y^2+2y|+C$$

EJERCICIO 15

Obtén las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}dx$
2. $\int \frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}dx$
3. $\int \frac{(x^2+11x-30)\,dx}{x^3-5x^2+6x}$
4. $\int \frac{(12+10x-2x^2)\,dx}{x^3-4x}$
5. $\int \frac{(-9x-9)\,dx}{x(x^2-9)}$
6. $\int \frac{7x^2-4}{x^3+x^2-2x}$
7. $\int \frac{(16x^2-48x+15)\,dx}{2x^3-7x^2+3x}$
8. $\int \frac{(8+3x-x^2)\,dx}{(2x+3)(x+2)^2}$
9. $\int \frac{2x^2-5x+4dx}{(x-2)^3}$
10. $\int \frac{2x^2-10x+14}{(x-3)^3}$
11. $\int \frac{(x^2+x-1)}{x^3+2x^2+x}dx$
12. $\int \frac{dy}{(y-m)(y-n)}$

13. $\int \frac{w^2-9w+25}{w^2-9w+20}\,dw$

14. $\int \frac{dy}{(y-3)(y-2)(y-1)}$

15. $\int \frac{3-5x}{x^3-6x^2+9x}\,dx$

16. $\int \frac{3\,dw}{w^3-w}$

17. $\int \frac{(11x-7)\,dx}{2x^2-3x-2}$

18. $\int \frac{w^2dw}{(w-6)(w^2-36)}$

19. $\int \frac{8x-3}{12x^2-7x+1}\,dx$

20. $\int \frac{(x-x^2)dx}{3x^3+26x^2+64x+32}$

21. $\int \frac{5x^2-5}{x^3-9x^2+23x-15}\,dx$

22. $\int \frac{2x^5+x^4-39x^3-22x^2+112x+96}{4x^3-25x^2+38x-8}\,dx$

23. $\int \frac{dx}{16x-x^3}$

24. $\int \frac{5-4x}{6x-x^2-x^3}\,dx$

25. $\int \frac{m}{(1-m)^2}\,dm$

26. $\int \frac{y\,dy}{(y+5)^2(y-5)}$

27. $\int \frac{(x+2)dx}{x(x+6)^2}$

28. $\int \frac{x^2+1}{(2x-1)^3}\,dx$

29. $\int \frac{1+x^5}{(x-1)^4}\,dx$

30. $\int \frac{x^3}{(x-3)^2(x+3)^2}\,dx$

31. $\int \frac{x^3-1}{x^3(x-2)^2}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Caso III. El denominador contiene factores de segundo grado y ninguno de ellos se repite

A todo factor de la forma $ax^2 + bx + c$, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

En donde A y B son constantes por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}$

Solución

La expresión

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x}=\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}$$

entonces:

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{A(x^2+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+3)}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{x^2(A+B)+Cx+3A}{x(x^2+3)}$$

De la igualdad resulta el sistema:

$$\begin{cases} A+B=4 \\ C=0 \\ 3A=6 \end{cases}$$

donde

$$A=2, B=2, C=0$$

Entonces,

$$\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}=\int \frac{2dx}{x}+\int \frac{(2x+0)dx}{x^2+3}=2\int \frac{dx}{x}+2\int \frac{x\,dx}{x^2+3}=2\ln|x|+\ln(x^2+3)+C$$

$$=\ln x^2+\ln(x^2+3)+C$$

$$=\ln x^2(x^2+3)+C$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}=\ln x^2(x^2+3)+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{(x^2+x)}{(x-3)(x^2+1)}\,dx$

Solución

Se realiza la separación mediante fracciones parciales,

$$\frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-3)}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$= \frac{A(x^2+1)+Bx^2-3Bx+Cx-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$\frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B)+x(-3B+C)+A-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

De la igualdad resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3B+C=1 \\ A-3C=0 \end{cases}$$

donde

$$A=\frac{6}{5},\ B=-\frac{1}{5} \text{ y } C=\frac{2}{5}$$

Al sustituir en la integral, se obtiene:

$$\int \frac{(x^2+x)dx}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{6}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{\left(-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{6}{5}\ln|x-3| - \frac{1}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{6}{5}\ln|x-3| - \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\text{arc tan } x + C$$

$$= \ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right| + \frac{2}{5}\text{arc tan } x + C$$

Finalmente:

$$\int \frac{(x^2+x)}{(x-3)(x^2+1)}\,dx = \ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right| + \frac{2}{5}\text{arc tan } x + C$$

Caso IV. Los factores del denominador son todos de segundo grado y algunos se repiten
Si existe un factor de segundo grado de la forma

$$(ax^2+bx+c)^n$$

Se desarrolla una suma de n fracciones parciales, de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{Vx+W}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{Yx+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}$

Solución

Se realiza la separación mediante fracciones parciales:

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2} = \frac{A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x^3+2x) + (Dx+E)x}{x(x^2+2)^2}$$

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2} = \frac{A(x^4+4x^2+4) + (Bx^4+2Bx^2+Cx^3+2Cx) + (Dx^2+Ex)}{x(x^2+2)^2}$$

Se agrupan términos semejantes,

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2} = \frac{x^4(A+B) + Cx^3 + x^2(4A+2B+D) + x(2C+E) + 4A}{x(x^2+2)^2}$$

De la igualdad anterior se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+2B+D=4 \\ 2C+E=2 \\ 4A=8 \\ C=0 \end{cases}$$

donde

$$A = 2, B = -2, C = 0, D = 0 \text{ y } E = 2$$

La integral se puede separar en:

$$\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2} = 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x\,dx}{x^2+2} + 2\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x^2+2| + 2\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

La última integral se resuelve por sustitución trigonométrica y el resultado es:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)} + C$$

Este resultado se sustituye en la integral.

$$\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2} = \ln|x^2| - \ln|x^2+2| + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)}\right) + C$$

Entonces se concluye que:

$$\int \frac{(4x^2+2x+8)\,dx}{x(x^2+2)^2} = \ln\left|\frac{x^2}{x^2+2}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\arc\tan\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right) + \frac{x}{2x^2+4} + C$$

2 Encuentra el resultado de $\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2}$

Solución

Como el numerador es más grande en grado que el denominador, se realiza la división,

$$\frac{x^5}{(x^2+4)^2} = x - \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}$$

Entonces la integral se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2} = \int x dx - \int \frac{(8x^3+16x)\, dx}{(x^2+4)^2}$$

La integral

$$\int \frac{(8x^3+16x)\, dx}{(x^2+4)^2}$$

se realiza por fracciones parciales,

$$\frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+4)+Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+x(4A+C)+4B+D}{(x^2+4)^2}$$

De la cual se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A=8 \\ B=0 \\ 4A+C=16 \\ 4B+D=0 \end{cases}$$

donde $A = 8$, $B = 0$, $C = -16$ y $D = 0$

$$\int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = 8\int \frac{x\, dx}{x^2+4} - 16\int \frac{x\, dx}{(x^2+4)^2} = 4\ln\left|x^2+4\right| + \frac{8}{x^2+4}$$

Finalmente, este resultado se sustituye en la integral

$$\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2} = \int x dx - \int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{2} - \left(4\ln\left|x^2+4\right| + \frac{8}{x^2+4}\right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4\ln\left|x^2+4\right| - \frac{8}{x^2+4} + C$$